МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ШАРИПОВ Р. А.

# ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ И ШКОЛЬНИКОВ

Учебное пособие

УФА 1998

УДК 541.1

Шарипов Р. А. **Основания геометрии для студентов и школьников**: учебное пособие / Издание Башкирского ун-та. — Уфа, 1998. — 220 с. ISBN 5-7477-0249-1

Книга представляет собой учебное пособие по курсу оснований геометрии. Она адресована студентам-математикам, а также школьникам 7-11 классов для самостоятельного углубленного изучения геометрии и для использования в кружках и на факультативных занятиях.

Подготовка книги к изданию выполнена методом компьютерной верстки на базе пакета $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX от Американского Математического Общества. При этом были использованы кириллические шрифты семейства Lh, распространяемые Ассоциацией *CyrTUG* пользователей кириллического TEX'а.

Рецензенты: д. ф.-м. н., проф. Гадыльшин Р. Р. (БГПИ),
к. ф.-м. н., доц. Бронштейн Е. М. (УГАТУ),
заслуженный учитель республики Башкортостан Медведева Н. В. (шк. № 42 г. Уфы).

ISBN 5-7477-0249-1

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

# ПРЕДИСЛОВИЕ.

*Элементарная геометрия*, с которой обычно начинается изучение этого предмета в школе, описывает строение окружающего нас повседневного предметного мира. Очень давно из всего разнообразия форм реального мира люди научились выделять простейшие компоненты, такие как *точка*, *прямая*, *отрезок*, *плоскость*, *круг*, *цилиндр*, *шар* и некоторые другие, и стали изучать их свойства. Больше всех в этом преуспели древнегреческие геометры. Они заметили, что свойства простейших геометрических фигур не являются просто коллекцией фактов, а связаны друг с другом множеством логических связей. Одни из этих свойств можно выводить из других.

В V-ом веке до нашей эры Евклид выдвинул список простейших базовых свойств, которые теперь называются *постулатами* или *аксиомами* Евклида. Элементарная геометрия, или геометрия Евклида, основанная на этих аксиомах, стала первой аксиоматической теорией в математике.

Цель данной книги — дать последовательное изложение элементарной геометрии исходя из аксиом Евклида в их современной редакции. Книга адресована студентам университетов как учебное пособие по курсу *оснований геометрии*. Она также может быть рекомендована школьникам, желающим точнее узнать, что же представляет собой предмет школьной геометрии с точки зрения профессиональных математиков. Специально для школьников в первой главе книги собран предварительный материал из теории множеств.

При написании этой книги использовался материал из книг И. Я. Бакельмана [1] и Н. В. Ефимова [2]. Доказательство некоторых теорем взято из книги А. В. Погорелова [3].

Июнь, 1998 г. Р. А. Шарипов.

ГЛАВА I

# ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АКСИОМАТИКА.

## § 1. Некоторые начальные понятия теории множеств.

Теория множеств составляет основу построения всей современной математики. Сама она базируется на двух очень простых понятиях: на понятии *множества* и понятии *элемента*. Под множеством принято понимать любую совокупность объектов, которые по какой-либо причине необходимо сгруппировать вместе. Отдельные объекты, входящие в состав множества называются его элементами. Множество $A$ и его элемент $a$ находятся в отношении *принадлежности*: $a \in A$. Эта запись расшифровывается так: элемент $a$ *принадлежит* множеству $A$, а множество $A$ *содержит* в себе элемент $a$. Перевернутая запись $A \ni a$ означает то же самое.

Выделим из множества $A$ какую-нибудь часть его элементов. Эту выделенную часть можно трактовать как самостоятельное множество $B$. Тот факт, что $B$ является частью $A$, обозначают так: $B \subset A$. При этом говорят, что $B$ есть *подмножество* множества $A$. Надо четко различать две записи:

$$a \in A, \qquad\qquad B \subset A.$$

Знак включения $\subset$ связывает два множества, а знак принадлежности $\in$ связывает множество с его элементом.

Составляя множество $B$, мы могли включить в него все элементы из $A$. Тогда получится $B = A$. Но даже в этом крайнем случае $B$ можно трактовать как часть $A$. То есть $B \subset A$ не исключает возможности совпадения $B = A$. Желая обозначить подмножество $B$, не совпадающее с $A$, будем писать $B \subsetneq A$.

Другой крайний случай $B \subset A$ возникает, когда $B$ не содержит ни одного элемента. Такое множество называют *пустым множеством* и обозначают специальным значком $\varnothing$. Пустое множество можно рассматривать как подмножество для любого множества $A$, т. е. $\varnothing \subset A$.

Пусть $A$ и $B$ — два произвольных множества. Некоторые из элементов этих двух множеств могут быть общими: $c \in A$ и $c \in B$. Из таких элементов формируется отдельное множество $C$, которое называют *пересечением* множеств $A$ и $B$. Его обозначают так: $C = A \cap B$. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то говорят, что множества $A$ и $B$ *пересекаются.* Если же, наоборот, $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что эти множества *не пересекаются.*

Пусть вновь $A$ и $B$ — два произвольных множества. Соберем в одно множество $C$ все элементы из $A$ и $B$. Полученное множество в этом случае называют *объединением* множеств $A$ и $B$. Его обозначают так $C = A \cup B$.

Элементы, составляющие множество $A \cup B$, разбиваются на три группы (на три подмножества). Это

(1) элементы, принадлежащие множеству $A$ и множеству $B$ одновременно;
(2) элементы, принадлежащие множеству $A$, но не принадлежащие множеству $B$;
(3) элементы, принадлежащие множеству $B$, но не принадлежащие множеству $A$.

Первая группа элементов составляет пересечение $A \cap B$. Вторая группа элементов составляет множество, которое называют *разностью* множеств $A$ и $B$. Его обозначают $A \setminus B$. Очевидно, что третья группа элементов, составляет множество, которое является разностью $B \setminus A$. Множества $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$ не пересекаются друг с другом. При этом их объединение совпадает с объединением $A$ и $B$: $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

## § 2. Отношение эквивалентности и разбиение на классы.

Пусть $M$ — некоторое множество. Рассмотрим упорядоченные пары элементов $(a, b)$, где $a \in M$ и $b \in M$. Упорядоченность означает, что $a$ — первый элемент в паре, а $b$ — второй элемент. При этом пара $(b, a)$ считается отличающейся от пары $(a, b)$. Множество всевозможных упорядоченных пар элементов из $M$ называется *декартовым квадратом* множества $M$ и обозначается $M \times M$.

Пусть некоторые из пар в множестве $M \times M$ как-то выделены. Тогда выделенные пары составят некоторое подмножество $R \subset M \times M$. Если такое подмножество задано, то будем говорить, что на множестве $M$ задано *бинарное отношение* $R$. Действительно, выделенность пары $(a, b) \in R$ может служить указанием на то, что между элементами $a$ и $b$ имеется определенная связь, которая отсутствует для невыделенных пар. Выделенность пары $(a, b)$ можно обозначать специальным символом, например: $a \overset{R}{\rightharpoondown} b$. Запись $a \overset{R}{\rightharpoondown} b$ читается так: элемент $a$ находится с элементом $b$ в отношении $R$.

Хорошо известными примерами бинарных отношений являются отношение равенства и отношение порядка между числами. Они записываются так: $a = b$, $a < b$ или $b > a$.

Определение 2.1. Бинарное отношение $R$ на множестве $M$ называется *отношением эквивалентности* и обозначается символом $\overset{R}{\sim}$, если выполнены следующие условия:

(1) *рефлексивность:* $a \overset{R}{\sim} a$ для любого $a \in M$;
(2) *симметричность:* из $a \overset{R}{\sim} b$ вытекает $b \overset{R}{\sim} a$;
(3) *транзитивность:* из $a \overset{R}{\sim} b$ и $b \overset{R}{\sim} c$ вытекает $a \overset{R}{\sim} c$.

Если по контексту ясно, о каком отношении эквивалентности идет речь, то буква $R$ в записи $a \overset{R}{\sim} b$ опускается и отношение $R$ между $a$ и $b$ записывается так: $a \sim b$.

Определение 2.2. Пусть на множестве $M$ задано отношение эквивалентности $R$. Классом эквивалентности элемента $a$ из $M$ называется множество всех элементов $x$ из $M$, которые эквивалентны элементу $a$, то есть $\mathrm{Cl}_R(a) = \{x \in M : x \overset{R}{\sim} a\}$.

Теорема 2.1. *Если* $a \overset{R}{\sim} b$, *то* $\mathrm{Cl}_R(a) = \mathrm{Cl}_R(b)$. *Если же элементы $a$ и $b$ не эквивалентны, то их классы эквивалентности не пересекаются* $\mathrm{Cl}_R(a) \cap \mathrm{Cl}_R(b) = \varnothing$.

Иногда классы эквивалентности, заданные отношением $R$, рассматривают как элементы некоторого множества. Множество, составленное из всех классов эквивалентности, называют *фактормножеством* и обозначают $M/R$. Переход от множества $M$ к фактормножеству $M/R$ называют *факторизацией*.

Теорема 2.1 показывает, что если два класса эквивалентности различны, то они не имеют общих элементов. При этом любой элемент $a$ из $M$ содержится в одном из классов эквивалентности. Поэтому всякое отношение эквивалентности $R$ определяет разбиение множества $M$ в объединение не пересекающихся друг с другом классов эквивалентности:

$$M = \bigcup_{Q \in M/R} Q.$$

Упражнение 2.1. *Пользуясь свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения эквивалентности $R$, докажите теорему 2.1.*

## § 3. Упорядоченные множества.

Определение 3.1. Бинарное отношение $P$ на множестве $M$ называется *отношением порядка* и обозначается символом $\overset{P}{\prec}$, если выполнены следующие условия:

(1) *нерефлексивность:* из $a \overset{P}{\prec} b$ вытекает $a \neq b$;

(2) *несимметричность:* условие $a \overset{P}{\prec} b$ исключает $b \overset{P}{\prec} a$;

(3) *транзитивность:* из $a \overset{P}{\prec} b$ и $b \overset{P}{\prec} c$ вытекает $a \overset{P}{\prec} c$.

Запись $a \overset{P}{\prec} b$ читается как «*a предшествует b*» или «$b$ следует за $a$». Когда по контексту ясно, о каком отношении предшествования идет речь, буква $P$ над значком $\prec$ не ставится.

Если выполнено одно из условий $a \prec b$ или $b \prec a$, то говорят, что элементы $a$ и $b$ *сравнимы*. Множество $M$ с отношением порядка $P$ называется *линейно упорядоченным*, если любые два элемента в нем сравнимы. Если же в $M$ допускается существование несравнимых пар элементов, то $M$ называется *частично упорядоченным* множеством.

## § 4. Тернарные отношения.

Наряду с бинарными отношениями иногда приходится рассматривать и тройные, или тернарные, отношения. Простой пример дает операция сложения чисел. Равенство $a + b = c$ означает, что упорядоченная тройка чисел $(a, b, c)$ выделена по сравнению с другими тройками, для которых такое равенство не выполнено. Эту ситуацию легко формализовать.

Определение 4.1. Скажем, что на множестве $M$ задано тернарное отношение $R$, если задано некоторое подмножество $R$ в декартовом произведении $M \times M \times M$.

## § 5. Теоретико множественный язык в геометрии.

Основное множество, которое изучается в геометрии Евклида, — это *пространство*, его элементы называются *точками*. Геометрическое пространство евклидовой геометрии принято обозначать буквой $\mathbb{E}$. Отдельные точки пространства по традиции обозначают заглавными буквами латинского алфавита. Кроме всего пространства и отдельных точек здесь рассматриваются различные геометрические фигуры: *плоскости*, *прямые*, *отрезки*, *лучи*, *многоугольники*, *многогранники* и другие. Все они являются некоторыми подмножествами пространства и состоят из точек.

Отношения принадлежности и включения, введенные значками $\in$ и $\subset$, в геометрии обозначаются различными словами, соответствующими их наглядному смыслу. Так, например, если точка $A$ принадлежит прямой $m$, то говорят, что точка $A$ лежит на прямой $m$, а прямая $m$ проходит через точку $A$. Точно так же, если прямая $m$ содержится в плоскости $\alpha$, то говорят, что прямая $m$ лежит на плоскости $\alpha$, а плоскость $\alpha$ проходит через прямую $m$. Обычно подобная вольность речи не вызывает трудностей для понимания и делает изложение более живым и наглядным.

## § 6. Аксиоматика Евклида.

Геометрическое пространство $\mathbb{E}$ состоит из точек. Все точки этого пространства равноправны, ни одна из них ничем не выделена. Если взять отдельную точку, то она сама по себе никакими геометрическими свойствами не обладает. Свойства точек начинают проявляться при сопоставлении их с другими точками. Например, если взять три точки, то они могут лежать на одной прямой, а могут и не лежать. Треугольник, заданный этими точками может быть равносторонним, равнобедренным, прямоугольным, или каким-нибудь еще. Формируя определенную геометрическую фигуру, точки пространства $\mathbb{E}$ вступают в определенные отношения друг с другом. Основные свойства таких отношений собраны в аксиомах Евклида. Общее число аксиом Евклида в современной редакции равно двадцати. Они разбиваются на пять групп аксиом:

(1) аксиомы *связи* (8 аксиом A1–A8);
(2) аксиомы *порядка* (4 аксиомы A9–A12);
(3) аксиомы *конгруэнтности* (5 аксиом A13–A17);
(4) аксиомы *непрерывности* (2 аксиомы A18 и A19);
(5) аксиомы *параллельности* (1 аксиома A20).

В следующих главах мы дадим последовательное изложение перечисленных аксиом и основанной на них геометрии.

## § 7. Множества и отображения.

Пусть $X$ и $Y$ — два множества. *Отображением* множества $X$ в множество $Y$ называется правило, которое каждому элементу $x$ из множества $X$ ставит в соответствие некоторый элемент $y$ из множества $Y$. Отображения, так же, как и множества, обозначают различными буквами (чаще всего строчными буквами латинского алфавита). Запись $f : X \to Y$ означает, что задано отображение $f$ из множества $X$ в множества $Y$. Если $x \in X$, то запись $f(x)$ означает результат применения правила $f$ к элементу $x$. Элемент $y = f(x)$ из множества $Y$ называют *образом* элемента $x$ из $X$. А элемент $x \in X$, такой, что $y = f(x)$, называют *прообразом* элемента $y$ из $Y$.

Для того, чтобы правило $f$ можно было трактовать как отображение $f : X \to Y$, оно должно быть однозначным в том смысле, что применяя его всякий раз к одному и тому же элементу $x \in X$, мы должны получать один и тот же результат. Иными словами, из $x_1 = x_2$ вытекает $f(x_1) = f(x_2)$.

Простейшим примером отображения служит *тождественное отображение* из множества $X$ в то же самое множество $X$. Оно обозначается так: $\mathrm{id}_X : X \to X$. Каждому элементу $x$ из множества $X$ тождественное отображение ставит в соответствие его самого, то есть $\mathrm{id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — два отображения. В этом случае мы можем определить третье отображение. Зададим правило $h$, применение которого к элементу $x$ из $X$ состоит в том, что мы применяем к $x$ правило $f$, затем к результату $f(x)$ применяем второе правило $g$, получая в итоге $g(f(x))$. То есть $h(x) = g(f(x))$. Полученное отображение $h : X \to Z$ называют *композицией* отображений $g$ и $f$ и обозначают $h = g \circ f$. Тогда

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \tag{7.1}$$

для всех $x$ из $X$. Таким образом, соотношение (7.1) есть краткая формулировка определения композиции $g \circ f$. Композицию можно понимать как аналог умножения, где в качестве сомножителей выступают отображения.

Теорема 7.1. *Если заданы три отображения* $f : Z \to W$, $g\colon Y \to Z$ *и* $h\colon X \to Y$, *то имеет место соотношение*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \tag{7.2}$$

*Оно выражает свойство ассоциативности для композиции.*

Док-во. В левой и в правой частях (7.2) стоят отображения, то есть (7.2) — это равенство отображений. Два отображения в данном случае — это два правила, которые элементам из $X$ ставят в соответствие элементы из $W$. Их формулировки могут быть совсем не похожими друг на друга, однако, они считаются равными, если результаты их применения к элементу $x$ совпадают для всех $x \in X$. Поэтому доказательство (7.2) сводится к проверке равенства

$$(f \circ g) \circ h(x) = f \circ (g \circ h)(x) \tag{7.3}$$

для всех $x$ из $X$. Сделаем это прямым вычислением на основе формулы (7.1), определяющей композицию двух отображений:

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h(x) &= f \circ g(h(x)) = f(g(h(x))),\\ f \circ (g \circ h)(x) &= f(g \circ h(x)) = f(g(h(x))). \end{aligned}$$

В результате этих несложных вычислений левая и правая части (7.3) свелись к одному и тому же выражению $f(g(h(x)))$. Равенство (7.3), а значит и равенство (7.2), доказаны. $\square$

Определение 7.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множества $X$ в множество $Y$ и пусть $A$ — некоторое непустое подмножество в $X$. Тогда множество $B \subset Y$, состоящее из образов всех элементов множества $A$, называют *образом множества* $A$ и записывают $B = f(A)$.

Согласно этому определению образ непустого множества не пуст. Для пустого множества полагают $f(\varnothing) = \varnothing$. Образ самого множества $X$ иногда обозначают через $\operatorname{Im} f$, то есть $\operatorname{Im} f = f(X)$. Множество $X$ называют *областью определения* отображения $f$, множество $Y$ называют *областью значений*, а множество $\operatorname{Im} f$ называют *образом* отображения $f$. Область значений и образ отображения $f$ часто не совпадают.

Определение 7.2. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множества $X$ в множество $Y$ и пусть $y$ — некоторый элемент множества $Y$. Множество, состоящее из всех тех элементов множества $X$, которые отображаются в элемент $y$, называют *полным прообразом* элемента $y$. Его обозначают через $f^{-1}(y)$.

Определение 7.3. Пусть $f : X \to Y$ — отображение множества $X$ в множество $Y$ и пусть $B$ — некоторое непустое подмножество в множестве $Y$. Множество, состоящее из всех тех элементов $x$ из $X$, для которых $f(x) \in B$, называют *полным прообразом* множества $B$. Его обозначают через $f^{-1}(B)$.

Согласно определению7.3 полный прообраз множества $Y$ совпадает с $X$, то есть $f^{-1}(Y) = X$. Для пустого множества полагают $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Однако, полный прообраз непустого множества $B$ тоже может оказаться пустым.

Определение 7.4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъективным*, если для любого $y \in Y$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ содержит не более одного элемента.

Определение 7.5. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным*, если для любого $y \in Y$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ не пуст.

Определение 7.6. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно является инъективным и сюръективным одновременно.

Теорема 7.2. *Отображение $f : X \to Y$ инъективно тогда и только тогда, когда из $x_1 \neq x_2$ вытекает $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Теорема 7.3. *Отображение $f : X \to Y$ сюръективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} f = Y$.*

Упражнение 7.1. *Докажите теоремы 7.2 и 7.3, которые часто используются для проверки инъективности и сюръективности отображений вместо исходных определений 7.4 и 7.5.*

Пусть отображение $f : X \to Y$ биективно. Тогда для всякого элемента $y \in Y$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ не пуст, но содержит не более одного элемента. Значит, он содержит ровно один элемент. Это обстоятельство позволяет задать отображение $h : Y \to X$, которое каждому элементу $y$ из $Y$ ставит в соответствие тот самый единственный элемент из множества $f^{-1}(y)$. Такое отображение $h$ называется *обратным отображением* для $f$. Его обозначают $h = f^{-1}$.

Теорема 7.4. *Отображение $h : Y \to X$, обратное биективному отображению $f : X \to Y$, является биективным, причем из $h = f^{-1}$ вытекает $h^{-1} = f$.*

Теорема 7.5. *Отображение $f : X \to Y$ и обратное для него отображение $f^{-1} : Y \to X$ связаны соотношениями*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y, \qquad\qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X .$$

Теорема 7.6. *Композиция двух инъективных отображений есть инъективное отображение.*

Теорема 7.7. *Композиция двух сюръективных отображений есть сюръективное отображение.*

Теорема 7.8. *Композиция двух биективных отображений есть биективное отображение.*

Упражнение 7.2. *Докажите теоремы 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 и 7.8.*

## § 8. Сужение и продолжение отображений.

Пусть $X'$ — некоторое подмножество в множестве $X$ и пусть заданы два отображения $f : X \to Y$ и $h : X' \to Y'$. Если $h(x) = f(x)$ для всех $x \in X'$, то говорят, что $h$ есть *сужение* отображения $f$ на подмножество $X'$. Отображение $f$, напротив, называется *расширением* или *продолжением* отображения $h$ с множества $X'$ на множество $X$.

Если задано отображение $f : X \to Y$, то очень легко построить его сужение на произвольное подмножество $X' \subset X$. Достаточно просто запретить применение $f$ к элементам, не принадлежащим $X'$, и мы получим отображение $f : X' \to Y$, являющееся сужением исходного.

Продолжить отображение $f : X' \to Y'$ с множества $X'$ на большее множество $X$ обычно бывает сложнее. Для этого надо определить значения $f(x)$ для элементов $x$ из $X$, не принадлежащих множеству $X'$, что можно сделать многими способами. Однако, обычно в постановке задачи отображение $f : X' \to Y'$ обладает некоторыми свойствами, которые требуется сохранить в результате его продолжения на множество $X$. Это делает задачу о продолжении содержательной и резко сужает элемент произвола в выборе возможных продолжений.

ГЛАВА II

# АКСИОМЫ СВЯЗИ И ПОРЯДКА.

## § 1. Аксиомы связи.

Аксиома A1. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки.*

Аксиома A2. *Через любые две точки $A$ и $B$ проходит некоторая прямая, причем ровно одна.*

Аксиома A3. *В пространстве можно найти по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Аксиомы A1 и A2 показывают, что любую прямую можно фиксировать, задав две точки на ней. Это используется для обозначения прямых: под прямой $AB$ понимается прямая, проходящая через точки $A$ и $B$. Разумеется, не исключается возможность того, что прямая $AB$ совпадает с прямой $CD$.

Аксиома A3 показывает, что в пространстве есть по меньшей мере один треугольник. Но это еще не треугольник в обычном понимании, поскольку отдельно взятые аксиомы A1, A2 и A3 не дают понятия отрезка. На их основе нельзя также отличать внутренность треугольника от его внешности.

Аксиома A4. *Через любые три точки $A$, $B$ и C, не лежащие на одной прямой, проходит некоторая плоскость, причем ровно одна.*

Аксиома A5. *На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.*

Аксиома A6. *Если какие-либо две точки $A$ и $B$ прямой $a$ лежат на плоскости $\alpha$, то и вся прямая $a$ целиком лежит на плоскости $\alpha$.*

Аксиома A7. *Если две плоскости пересекаются, то их пересечение содержит не менее двух точек.*

Аксиома A8. *В пространстве найдутся по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Аксиом связи A1–A8 еще очень мало, чтобы вывести из них какие-то сложные содержательные утверждения. Но несколько простых простых и очевидных фактов на их основе уже можно доказать.

Теорема 1.1. *Если две не совпадающие прямые пересекаются, то их пересечение состоит ровно из одной точки.*

Док-во. Пусть $a \neq b$ — две не совпадающие прямые, имеющие непустое пересечение, и пусть точка $A$ лежит в пересечении $a \cap b$. Допустим, что утверждение теоремы не верно. Тогда в пересечении прямых $a \cap b$ найдется еще одна точка $B$, отличная от $A$. При этом мы имеем две не совпадающие прямые $a$ и $b$, проходящие через точки $A$ и $B$. Но это противоречит аксиоме A2. $\square$

Теорема 1.2. *Если две не совпадающие плоскости пересекаются, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих двух плоскостей.*

Док-во. Пусть $A$ — общая точка двух не совпадающих плоскостей $\alpha \neq \beta$. Применим аксиому A7. Согласно этой аксиоме найдется еще одна общая точка плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Обозначим ее $B$ и рассмотрим прямую $AB$.

Точки $A$ и $B$ лежат на плоскости $\alpha$. Применим к ним аксиому A6 . Из нее получаем, что вся прямая $AB$ целиком лежит в плоскости $\alpha$.

Повторим эти рассуждения для плоскости $\beta$. В результате получим, что прямая $AB$ целиком лежит в плоскости $\beta$. То есть прямая $AB$ лежит в пересечении плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Это общая прямая для двух плоскостей.

Остается доказать, что пересечение плоскостей $\alpha \cap \beta$ не содержит точек, не принадлежащих прямой $AB$. Допустим, что такая точка $C$ нашлась. Тогда мы имеем три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой, и имеем две плоскости $\alpha$ и $\beta$, проходящие через эти три точки. Получается противоречие с аксиомой A4, которое и показывает, что пересечение $\alpha \cap \beta$ совпадает с прямой $AB$. $\square$

Теорема 1.3. *Через прямую и не лежащую на этой прямой точку, проходит некоторая плоскость, причем ровно одна.*

Док-во. Пусть точка $C$ не лежит на прямой $a$. Применим к прямой $a$ аксиому A1, которая утверждает, что на этой прямой можно найти какие-то две точки $A$ и $B$. Тогда точки $A$, $B$ и $C$ оказываются не лежащими на одной прямой. В силу аксиомы A4 имеется ровно одна плоскость $\alpha$, проходящая через точки $A$, $B$ и $C$. Применим к прямой $a$ и плоскости $\alpha$ аксиому A6. Из нее получим, что прямая $a$ целиком лежит в плоскости $\alpha$. Таким образом, плоскость $\alpha$ и есть искомая плоскость, проходящая через точку $C$ и прямую $a$.

Покажем, что плоскость $\alpha$, проходящая через точку $C$ и прямую $a$, единственна. Действительно, такая плоскость должна проходить через рассмотренные выше три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Она единственна в силу аксиомы A4. $\square$

Теорема 1.4. *Прямая $a$, не лежащая в плоскости $\alpha$, имеет с этой плоскостью не более одной общей точки.*

Если пересечение $a \cap \alpha$ пусто, то говорят, что прямая $a$ *параллельна* плоскости $\alpha$. Рассмотрим случай, когда это пересечение непусто. Пусть точка $A$ принадлежит пересечению $a \cap \alpha$. Если это пересечение содержит более одной точки, то имеется вторая точка $B \in a \cap \alpha$. Точки $A$ и $B$ прямой $a$ обе лежат на плоскости $\alpha$. Применив аксиому A6, получим, что вся прямая $a$ должна лежать в плоскости $\alpha$. Но это противоречит исходной посылке теоремы: $a \not\subset \alpha$. Полученное противоречие показывает, что пересечение $a \cap \alpha$ состоит ровно из одной точки $A$. Теорема доказана.

Теорема 1.5. *Для пары пересекающихся, но не совпадающих прямых существует ровно одна плоскость, содержащая в себе обе эти прямые.*

Док-во. Пусть $a$ и $b$ — пара пересекающихся, но не совпадающих прямых. Согласно теореме 1.1 их пересечение состоит из одной точки, обозначим ее $A$. Применим к прямой $b$ аксиому A1. Согласно этой аксиоме на прямой $b$ найдется еще одна точка $B$, отличная от $A$. Точка $B$ не лежит на прямой $a$, поскольку она лежит на другой прямой $b$ и не принадлежит пересечению прямых $a$ и $b$.

Применим к прямой $a$ и точке $B$ теорему 1.3. Согласно этой теореме через прямую $a$ и точку $B$ проходит ровно одна плоскость $\alpha$. Точки $A$ и $B$, лежащие на прямой $b$, принадлежат плоскости $\alpha$. В этой ситуации можно применить аксиому A6, согласно которой прямая $b$ целиком лежит в плоскости $\alpha$. Таким образом, построенная плоскость $\alpha$ содержит в себе обе пересекающиеся прямые $a$ и $b$.

Остается показать, что плоскость $\alpha$ единственна. Если она не единственна и $\beta$ — некоторая другая плоскость, содержащая в себе обе прямые $a$ и $b$, то плоскость $\beta$ проходит через прямую $a$ и не лежащую на этой прямой точку $B$. Согласно теореме 1.3 такая плоскость единственна, поэтому плоскость $\beta$ совпадает с плоскостью $\alpha$. $\square$

Лемма 1.1. *Для всякой плоскости $\alpha$ найдется точка пространства, не лежащая в этой плоскости.*

Док-во. Пусть $\alpha$ — некоторая произвольная плоскость. Используя аксиому A8, найдем четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$, не лежащие в одной плоскости. Ясно, что по крайней мере одна из этих четырех точек не лежит в плоскости $\alpha$. Иначе они оказались бы лежащими в одной плоскости $\alpha$, что противоречит их выбору. $\square$

Лемма 1.2. *Для всякой прямой $a$ найдется точка пространства, не лежащая на этой прямой.*

Док-во. Пусть $a$ — некоторая произвольная прямая. Применим аксиому A3 и найдем тройку точек $A$, $B$ и $C$, не лежащую на одной прямой. Ясно, что по крайней мере одна из этих трех точек не лежит на прямой $a$. Если бы это было не так, точки $A$, $B$ и $C$ оказались бы лежащими на одной прямой $a$, что противоречит их выбору. $\square$

Теорема 1.6. *В каждой плоскости можно найти три точки, не лежащие на одной прямой.*

Док-во. Пусть задана плоскость $\alpha$. Применив аксиому A5, выберем первую точку $A$ в этой плоскости. Теперь воспользуемся леммой 1.1. Она позволяет выбрать точку $X$, не принадлежащую плоскости $\alpha$. По этой причине прямая $AX$ имеет с плоскостью $\alpha$ общую точку $A$, но не лежит целиком в этой плоскости. Применим к этой ситуации теорему 1.4. Из нее получаем, что $A$ — это единственная общая точка прямой $AX$ и плоскости $\alpha$.

Применим лемму 1.2 к прямой $AX$. Из нее вытекает существование точки $Z$, не лежащей на прямой $AX$. Точки $A$, $X$ и $Z$ не лежат на одной прямой. Поэтому согласно аксиоме A4 они однозначно фиксируют некоторую плоскость $\beta = AXZ$, содержащую эти три точки.

Плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются и имеют общую точку $A$. Применим к этой ситуации аксиому A7. Из нее получаем, что кроме точки $A$ имеется по крайней мере еще одна общая точка плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Обозначим ее $B$. В результате мы установили, что на плоскости $\alpha$ имеются две точки $A$ и $B$.

Применим к плоскости $\beta$ лемму 1.1. Она позволяет найти точку $Y$, не принадлежащую плоскости $\beta$. Прямая $AX$ лежит в плоскости $\beta$, а точка $Y$ находится вне этой плоскости, поэтому $Y \notin AX$. Отсюда три точки $A$, $X$ и $Y$ не лежат на одной прямой. Согласно аксиоме A4 они единственным образом определяют плоскость $\gamma = AXY$.

Плоскости $\alpha$ и $\gamma$ не совпадают, поскольку имеется точка $X$, принадлежащая плоскости $\gamma$ и не принадлежащая плоскости $\alpha$. Эти плоскости пересекаются, поскольку они имеют общую точку $A$. Применим в этой ситуации теорему 1.2. Она утверждает, что пересечением плоскостей $\alpha$ и $\gamma$ будет некоторая прямая $a$, содержащая точку $A$.

По построению прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$. Она пересекается с прямой $AX$ в единственной точке $A$. Это следствие теоремы 1.1 и того факта, что $X \notin a$. Докажем, что прямая $a$ не содержит точки $B$. Вспомним, что $A$ — это единственная точка пересечения прямой $AX$ с плоскостью $\alpha$. Отсюда $B \notin AX$ и три точки $A$, $X$ и $B$ не лежат на одной прямой. Если допустить, что $B \in a$, то через три точки $A$, $X$ и $B$ проходят плоскости $\beta$ и $\gamma$ одновременно. В силу аксиомы A4 они должны совпасть: $\gamma = \beta$. Но по построению плоскость $\gamma$ содержит точку $Y$, не принадлежащую $\beta$, т. е. $\gamma \neq \beta$. Полученное противоречие показывает, что точка $B$ не принадлежит прямой $a$.

В результате всего этого в плоскости $\alpha$ мы построили прямую $a$, проходящую через точку $A$, и точку $B$, не лежащую на этой прямой. Применим к прямой $a$ аксиому A1 и найдем вторую точку $C \in a$, отличную от $A$. Три точки $A$, $B$ и $C$ образуют искомую тройку точек в плоскости $\alpha$, не лежащую на одной прямой. $\square$

Упражнение 1.1. *Постройте чертежи, иллюстрирующие доказательство шести теорем 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, а также двух лемм 1.1 и 1.2.*

Рассмотрим некоторое множество, состоящее из четырех элементов. Например, это может быть множество четырех первых натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4\}$. Назовем это множество *пространством*, а числа 1, 2, 3 и 4 его точками. Множества

$$\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\}$$

назовем *прямыми*. В качестве плоскостей выберем следующие четыре множества:

$$\{1, 2, 3\},\ \{1, 2, 4\},\ \{1, 3, 4\},\ \{2, 3, 4\}.$$

Перечисленные множества составляют *конечную модель* геометрии с аксиомами связи.

Упражнение 1.2. *Докажите, что вышеприведенная конечная модель геометрии удовлетворяет всем восьми аксиомам связи A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7* и *A8.*

## § 2. Аксиомы порядка.

Аксиомы порядка составляют вторую группу аксиом Евклида. В основном они описывают внутреннее устройство отдельных прямых. Для трех различных точек $A$, $B$ и $C$, лежащих на одной прямой, одна из них может лежать между двумя другими. Если $B$ лежит между $A$ и $C$, то это запишем так:

$$(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C). \tag{2.1}$$

Аксиомы порядка задают свойства тройного отношения между точками одной прямой, записываемого в форме (2.1).

Аксиома A9. *Если точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, то она лежит и между точками $C$ и $A$.*

Используя обозначение (2.1), эту аксиому можно записать так:

$$(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C) \implies (C \blacktriangleright B \blacktriangleleft A). \tag{2.2}$$

Аксиома A9 и формула (2.2) означают симметричность тройного отношения «лежать между» при перестановке первого и третьего аргументов.

Пусть $A$ и $B$ — две произвольные точки. Согласно аксиоме A2 они задают прямую $AB$. Назовем *открытым интервалом* (или просто *интервалом*) множество всех точек прямой $AB$, лежащих между $A$ и $B$:

$$(AB) = \{X \in AB : \quad (A \blacktriangleright X \blacktriangleleft B)\}.$$

Аксиома A9 означает, что интервал $(AB)$ совпадает с интервалом $(BA)$. Точки $A$ и $B$ называются *концами* интервала. Присоединив к открытому интервалу его концевые точки, мы получим *замкнутый интервал*, или *отрезок*:

$$[AB] = \{A\} \cup \{B\} \cup (AB).$$

Согласно все той же аксиоме A9 отрезок $[AB]$ совпадает с отрезком $[BA]$.

Интервал $(AB)$ называют *внутренностью* отрезка $[AB]$, а точки $A$ и $B$ — его *концами*. Точки прямой $AB$, не принадлежащие отрезку $[AB]$, называют *внешностью* отрезка $[AB]$. Наряду с открытым и замкнутым интервалами иногда определяют и полуоткрытые интервалы:

$$[AB) = \{A\} \cup (AB), \qquad\qquad [BA) = \{B\} \cup (AB).$$

Аксиома A10. *Для любых двух точек $A$ и $B$ на прямой $AB$ найдется точка $C$, такая, что $B$ лежит между $A$ и $C$.*

Аксиома A11. *Среди любых трех точек $A$, $B$ и $C$, лежащих на одной прямой, только одна из них может лежать между двумя другими.*

Аксиома A11 означает, что может быть выполнено не более одного из следующих трех условий:

$$(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C), \qquad (B \blacktriangleright C \blacktriangleleft A), \qquad (C \blacktriangleright A \blacktriangleleft B). \tag{2.3}$$

При этом аксиома A11 не исключает возможности того, что ни одно из перечисленных условий (2.3) не выполнено.

Теорема 2.1. *Внешность любого отрезка $[AB]$ непуста.*

Док-во. Применим аксиому A10 к точкам $A$ и $B$. Она дает существование точки $C$, лежащей на прямой $AB$, для которой выполнено условие $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$. В силу аксиомы A11 оно исключает выполнение другого условия $(B \blacktriangleright C \blacktriangleleft A)$. Значит, точка $C$ не является внутренней точкой отрезка $[AB]$. Концевой точкой она также не является, поскольку не совпадает ни с $A$, ни с $B$. Следовательно, $C$ — внешняя точка отрезка $[AB]$. Это доказывает утверждение теоремы. $\square$

В действительности, аксиомы A9, A10 и A11 могут дать больше. Из них можно вывести существование двух внешних точек для любого отрезка $[AB]$.

Теорема 2.2. *Для любого отрезка $[AB]$ на прямой $AB$ существуют две точки $C_1$ и $C_2$, такие, что выполнены условия $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C_1)$ и $(B \blacktriangleright A \blacktriangleleft C_2)$.*

Док-во. Заметим, что точки $A$ и $B$ входят в формулировку аксиомы A10 не симметричным образом. Применим сначала аксиому A10 в исходной формулировке. Это дает существование точки $C_1$, для которой выполнено условие $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C_1)$. Затем поменяем местами точки $A$ и $B$ и применим аксиому A10 еще раз. Это дает существование точки $C_2$ для которой выполняется условие $(B \blacktriangleright A \blacktriangleleft C_2)$.

Точки $C_1$ и $C_2$ лежат во внешности отрезка $[AB]$, однако, их совпадение исключается. Действительно, $C = C_1 = C_2$, если учесть аксиому A9, означало бы, что выполнены сразу два условия $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$ и $(C \blacktriangleright A \blacktriangleleft B)$. Такая возможность исключается аксиомой A11. $\square$

Аксиома A12. *Пусть $A$, $B$ и $C$ — три точки плоскости $\alpha$, не лежащие на одной прямой, и пусть прямая $a$, лежащая в той же* *плоскости $\alpha$, не проходит ни через одну из этих точек. Тогда, если прямая $a$ пересекает отрезок $[AB]$ во внутренней точке, то она проходит через внутренюю точку хотя бы одного из отрезков $[AC]$ либо $[BC]$.*

Аксиома A12, известна как аксиома Паша. Она играет важную роль во всех дальнейших построениях этого параграфа.

Теорема 2.3. *Внутренность любого отрезка $[AB]$ непуста.*

Док-во. Пользуясь леммой 1.2, найдем точку $C$, не лежащую на прямой $AB$. Затем применим аксиому A10 к точкам $A$ и $C$. Она дает существование точки $D$, лежащей на прямой $AC$ и такой, что $C$ лежит внутри отрезка $[AD]$. Теперь рассмотрим прямую $DB$ и применим к отрезку $[DB]$ теорему 2.1. В результате этого найдем точку $E$ на прямой $DB$, лежащую вне отрезка $[DB]$.

Прямая $CE$ пересекает прямую $AD$ в единственной точке $C$, которая является внутренней точкой отрезка $[AD]$. Прямую $DB$ она пересекает в точке $E$, которая не совпадает с $B$. Следовательно прямая $CE$ не содержит ни одну из точек $A$, $D$ и $B$. Обозначим через $a$ прямую $CE$ и применим аксиому Паша A12 к точкам $A$, $D$ и $B$. Согласно этой аксиоме прямая $CE$ должна пересечь отрезок $[AB]$ либо отрезок $[DB]$ во внутренней точке. Пересечь отрезок $[DB]$ она не может. Действительно, прямая $CE$ пересекает прямую $DB$ в единственной точке $E$, которая по построению является внешней точкой отрезка $[DB]$. Остается отрезок $[AB]$. Прямая $CE$ пересекает его в некоторой внутренней точке $F$. Следовательно, внутренность отрезка $[AB]$ непуста. Теорема 2.3 доказана. $\square$

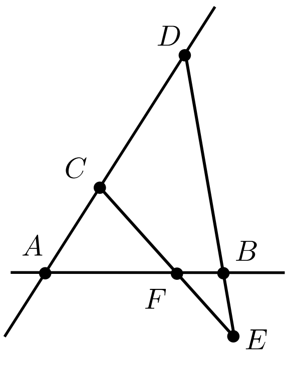



*Рис. 2.1*

Теорема 2.4. *Среди любых трех точек $A$, $B$ и $C$, лежащих на одной прямой, ровно одна из них лежит между двумя другими.*

Док-во. Пусть $A$, $B$ и $C$ — три произвольные точки, лежащие на одной прямой. Предположим, что точка $A$ не лежит между $B$ и $C$, и предположим, что $C$ не лежит между $A$ и $B$. В этих предположениях докажем, что $B$ лежит между $A$ и $C$. Сначала применим лемму 1.2 и найдем точку $D$, не лежащую на прямой $AC$ (см. Рис. 2.2). Затем применим аксиому A10 к точкам $A$ и $D$ и найдем точку $E$ на прямой $AD$, такую, что $D$ станет внутренней точкой отрезка $[AE]$. Проведем прямые $DC$ и $EC$, а также прямую $EB$. В пересечении прямых $DC$ и $EB$ получим точку $F$. Проведем прямую $AF$. В пересечении прямых $AF$ и $EC$ получим точку $G$.

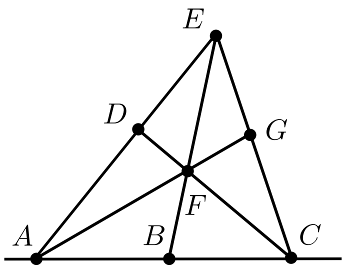



*Рис. 2.2*

Рассмотрим треугольник $ABE$. Прямая $DC$ пересекает сторону $[AE]$ этого треугольника во внутренней точке $D$. Согласно аксиоме Паша A12 эта прямая должна пересечь один из отрезков $[AB]$ либо $[EB]$ во внутренней точке. Отрезок $[AB]$ исключается, ибо точкой пресечения прямых $DC$ и $AB$ является точка $C$. А она, согласно предположению, сделанному в начале доказательства теоремы, не лежит на отрезке $[AB]$ между точками $A$ и $B$. Вывод: точка $F$, полученная как пересечение прямой $DC$ и прямой $EB$, является внутренней точкой для отрезка $[EB]$.

Далее рассмотрим треугольник $EBC$. Прямая $AF$ пересекает его сторону $[EB]$ во внутренней точке $F$. Согласно аксиоме A12 она должна пересечь один из отрезков $[BC]$ либо $[EC]$ во внутренней точке. Отрезок $[BC]$ исключается, поскольку точкой пересечения прямых $AF$ и $BC$ является точка $A$, а она, согласно предположению, сделанному в начале доказательства теоремы, не лежит между точками $B$ и $C$. Остается отрезок $[EC]$, который, следовательно, пересекается с прямой $AF$ во внутренней точке $G$.

На следующем шаге рассмотрим треугольник $EDC$ и прямую $AG$, которая пересекает его сторону $EC$ во внутренней точке $G$. Применив в этой ситуации аксиому Паша A12, получим, что прямая $AG$ пересекает один из отрезков $[DC]$ либо $[DE]$ во внутренней точке. Но отрезок $[DE]$ исключается. Действительно, прямая $AG$ пересекает прямую $DE$ в точке $A$, а точка $E$ выбрана так, что выполняется условие $(A \blacktriangleright D \blacktriangleleft E)$. Согласно аксиоме A11 это условие исключает выполнение условия $(E \blacktriangleright A \blacktriangleleft D)$, то есть точка $A$ не может быть внутренней точкой отрезка $[DE]$. Вывод: точка $F$ является внутренней точкой отрезка $[DC]$.

На последнем шаге рассмотрим треугольник $ADC$ и прямую $EB$, которая пересекает строну $[DC]$ во внутренней точке $F$. Применим в этой ситуации аксиому Паша A12. Из нее выводим, что прямая $EB$ должна пересечь один из отрезков $[AD]$ либо $[AC]$ во внутренней точке. Отрезок $[AD]$ исключается. Действительно, прямая $EB$ пересекает прямую $AD$ в точке $E$. Условие $(A \blacktriangleright D \blacktriangleleft E)$ для точки $E$ исключает выполнение условия $(D \blacktriangleright E \blacktriangleleft A)$ и, следовательно, точка $E$ не лежит внутри отрезка $[AD]$. Остается отрезок $[AC]$. Точка $B$, лежащая в пересечении прямых $EB$ и $AC$, обязана быть внутренней точкой отрезка $[AC]$. Теорема 2.4 доказана. □

Доказанная теорема 2.4 усиливает аксиому A11. Теперь для любых трех точек $A$, $B$ и $C$, лежащих на одной прямой, одно из условий (2.3) непременно выполняется, исключая при этом выполнение двух других. Аксиому Паша A12 тоже можно усилить.

Теорема 2.5. *Пусть $A$, $B$ и $C$ — три точки плоскости $\alpha$, не лежащие на одной прямой, и пусть прямая $a$, лежащая в той же* *плоскости $\alpha$, не проходит ни через одну из этих точек. Тогда, если прямая $a$ пересекает отрезок $[AB]$ во внутренней точке, то она проходит через внутренюю точку ровно одного из двух отрезков $[AC]$ либо $[BC]$.*

Док-во. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда прямая $a$ пересекается со всеми тремя отрезками $[AB]$, $[BC]$ и $[CA]$ в их внутренних точках. Обозначим эти точки через $P$, $Q$ и $R$. Точки $P$, $Q$ и $R$ лежат на трех различных прямых $AB$, $BC$ и $CA$, пересекающихся друг с другом в точках $A$, $B$ и $C$. По условию теоремы ни одна из точек $A$, $B$ и $C$ не лежит на прямой $a$, следовательно, среди точек $P$, $Q$ и $R$ не может быть совпадающих.

Докажем, что точка $R$ не лежит между $P$ и $Q$. Если допустить, что точка $R$ лежит между $P$ и $Q$, то к прямой $AR$ и треугольнику $PQB$ применима аксиома Паша A12. Тогда прямая $AR$ должна пересечь один из отрезков $[PB]$ либо $[QB]$ во внутренней точке. Но прямая $AR$ пересекает прямую $PB$ в точке $A$, а прямую $QB$ — в точке $C$. Если точка $A$ лежит внутри отрезка $[PB]$, то это противоречит тому, что $P$ лежит между $A$ и $B$. Если же $C$ лежит внутри отрезка $[QB]$, то тогда $Q$ не может лежать между $B$ и $C$.

Полученное выше противоречие доказывает, что $R$ не может лежать между $P$ и $Q$. Аналогичным способом доказывается, что точка $Q$ не лежит между $R$ и $P$, а точка $P$ не лежит между $Q$ и $R$. То есть ни одна из точек $P$, $Q$ и $R$ прямой $a$ не лежит между двумя другими. Это противоречит доказанной ранее теореме 2.4. Поэтому исходное допущение о том, что прямая $a$ пересекает оба отрезка $[AC]$ и $[BC]$ во внутренних точках, неверно. Теорема 2.5 доказана. □

## § 3. Отрезки на прямой.

Лемма 3.1. *Пусть точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, а точка $C$ лежит между $B$ и $D$. Тогда обе точки точки $B$ и $C$ лежат между $A$ и $D$.*

Док-во. Из $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$ вытекает, что точка $A$ лежит на прямой $BC$, а из $(B \blacktriangleright C \blacktriangleleft D)$ вытекает, что $D$ также лежит на прямой $BC$. Тем самым, в предположениях леммы 3.1 все четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на одной прямой.

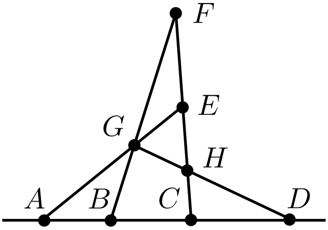



*Рис. 3.1*

Пользуясь леммой 1.2, найдем точку $E$, не лежащую на прямой $AD$. Затем применим аксиому A10 к точкам $C$ и $E$. В результате на прямой $CE$ найдем точку $F$, такую, что $E$ лежит внутри отрезка $[CF]$. Проведем прямые $AE$ и $FB$, после чего рассмотрим треугольник $FBC$. Прямая $AE$ пересекает прямую $FC$ в точке $E$, которая является внутренней для отрезка $[FC]$. Пересечение прямой $AE$ с прямой $BC$ совпадает с точкой $A$, которая лежит вне отрезка $[BC]$. Поэтому согласно аксиоме Паша A12 прямая $AE$ должна пересечь сторону $[FB]$ треугольника $FBC$ в некоторой внутренней точке $G$.

Далее рассмотрим треугольник $AEC$. Прямая $FB$ пересекает прямую $AC$ в точке $B$, лежащей внутри отрезка $[AC]$. Та же прямая $FB$ пересекает прямую $EC$ в точке $F$, лежащей вне отрезка $[EC]$. Следовательно, согласно аксиоме Паша, точка $G$, полученная в результате пересечения прямых $FB$ и $AE$, должна быть внутренней точкой отрезка $[AE]$.

На следующем шаге вновь рассмотрим треугольник $FBC$ и проведем прямую $GD$. Она пересекает сторону $[FB]$ во внутренней точке $G$ и не имеет общих точек со стороной $[BC]$, поскольку точка $D$ лежит вне отрезка $[BC]$. Отсюда в силу аксиомы Паша заключаем, что прямая $GD$ пересекает отрезок $[FC]$ в некоторой внутренней точке $H$.

Далее рассмотрим треугольник $GBD$ и прямую $FC$. Используем то, что $C$ лежит внутри отрезка $[BD]$, и то, что $F \notin [GB]$. Тогда из аксиомы Паша выводим, что $H$ является внутренней точкой для отрезка $[GD]$.

На последнем шаге рассмотрим треугольник $AGD$ и прямую $FC$. Прямая $FC$ пересекает сторону $[GD]$ этого треугольника во внутренней точке $H$ и не имеет общих точек со стороной $[AG]$. Последнее вытекает из того, что $E$ лежит вне отрезка $[AG]$. Теперь из аксиомы Паша получаем, что точка $C$ является внутренней точкой отрезка $[AD]$. Это одно из утверждений леммы, которое требовалось доказать.

Второе утверждение не требует специального доказательства. Для того, чтобы доказать, что точка $B$ лежит внутри отрезка $[AD]$, достаточно поменять обозначения точек $A$ с $D$ и $B$ с $C$. После этого остается воспользоваться уже доказанным утверждением и вернуться к прежним обозначениям. □

Лемма 3.2. *Если точка $C$ лежит внутри отрезка $[AD]$ и если точка $B$ лежит внутри отрезка $[AC]$, то $B$ лежит внутри отрезка $[AD]$, а $C$ — внутри отрезка $[BD]$.*

Док-во. Нетрудно видеть, что если $C$ лежит внутри отрезка $[AD]$, а точка $B$ лежит внутри отрезка $[AC]$, то все четыре точки лежат на одной прямой $AD$. Пользуясь леммой 1.2, выберем точку $E$, не лежащую на прямой $AD$. Затем применим аксиому A10 и найдем точку $F$ на прямой $BE$, такую, что точка $E$ лежит между $F$ и $B$. Проведем прямую $FC$ и рассмотрим треугольник $ABE$. Прямая $FC$ не имеет общих точек со сторонами $[AB]$ и $[BE]$ этого треугольника. Действительно, пересечение прямых $AB$ и $FC$ — это точка $C$, она лежит вне отрезка $[AB]$. Точка $F$ есть пересечение прямых $BE$ и $FC$, она лежит вне отрезка $[BE]$.

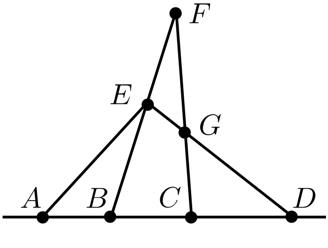


*Рис. 3.2*

Если бы прямая $FC$ пересекала отрезок $[AE]$ во внутренней точке, то в силу аксиомы Паша A12 она должна была бы пересечь и одну из сторон $[AB]$ либо $[BE]$ треугольника $ABE$. Но это не так, поэтому прямая $FC$ на рисунке 3.2 не имеет общих точек с отрезком $[AE]$.

Теперь проведем прямую $DE$, которая в пересечении с прямой $FC$ даст точку $G$. Рассмотрим треугольник $AED$. Прямая $FC$ пересекает сторону $[AD]$ этого треугольника во внутренней точке $C$, но она не имеет общих точек со стороной $[AE]$. Применив аксиому Паша, получим, что $G$ есть внутренняя точка отрезка $[ED]$.

На следующем шаге рассмотрим треугольник $BED$. Прямая $FC$ пересекает сторону $[ED]$ во внутренней точке $G$. Пересечение прямой $FC$ с прямой $BE$ — это точка $F$. Она находится вне отрезка $[BE]$. Поэтому в силу аксиомы Паша A12 точка $C$, как пересечение прямых $FC$ и $BD$, обязана быть внутренней точкой отрезка $[BD]$. Этим мы доказали первое утверждение леммы 3.2 о том, что $C$ лежит между $B$ и $D$.

Заметим, что теперь применима доказанная ранее лемма 3.1. Действительно, точка $B$ лежит между $A$ и $C$, а точка $C$ лежит между $B$ и $D$. Из леммы 3.1 выводим, что $B$ лежит внутри отрезка $[AD]$. Этим доказано второе утверждение леммы 3.2. □

Теорема 3.1. *Если точка $B$ лежит между $A$ и $C$, то отрезки $[AB]$ и $[BC]$ являются подмножествами отрезка $[AC]$.*

Док-во. Докажем утверждение теоремы относительно отрезка $[AB]$. Вспомним, что отрезок состоит из концевых точек и всех точек, лежащих между концами. Для точки $A$ имеем $A \in [AC]$. Точка $B$ лежит между $A$ и $C$, поэтому $B$ есть внутренняя точка отрезка $[AC]$, т. е. $B \in [AC]$.

Пусть $X$ — произвольная внутренняя точка отрезка $[AB]$. Тогда $X$ лежит между $A$ и $B$. А точка $B$ лежит между $A$ и $C$. В этой ситуации применима лемма 3.2. Она дает $X \in [AC]$. Таким образом, $[AB] \subset [AC]$.

Для доказательства второго утверждения $[BC] \subset [AC]$ достаточно поменять обозначения точек $A$ и $C$ и применить уже доказанное первое утверждение $[AB] \subset [AC]$, после чего надо вернуться к прежним обозначениям. $\square$

Теорема 3.2. *Если точка $B$ лежит между $A$ и $C$, то отрезок $[AC]$ есть объединение отрезков $[AB]$ и $[BC]$.*

Док-во. Согласно предыдущей теореме отрезки $[AB]$ и $[BC]$ являются подмножествами отрезка $[AC]$. Поэтому

$$[AB] \cup [BC] \subset [AC]. \tag{3.1}$$

Докажем противоположное включение $[AC] \subset [AB] \cup [BC]$. Концевые точки отрезка $[AC]$ и точка $B$ принадлежат множеству $[AB] \cup [BC]$. Поэтому рассмотрим некоторую произвольную внутреннюю точку отрезка $[AC]$, отличную от $B$. Обозначим ее $X$.

Если $X \notin [AB]$, то в силу теоремы 2.4 выполнено ровно одно из следующих двух условий: $A \in [BX]$ либо $B \in [AX]$. Первое из этих условий в связке с $X \in [AC]$ позволяет применить лемму 3.1. Из этой леммы выводим $A \in [BC]$ и $X \in [BC]$. Но $A \in [BC]$ противоречит тому, что $B$ — внутренняя точка отрезка $[AC]$. Следовательно, остается условие $B \in [AX]$. В связке с $X \in [AC]$ оно позволяет применить лемму 3.2. Из леммы 3.2 выводим $B \in [AC]$ и $X \in [BC]$.

Таким образом, для произвольной внутренней точки $X$ отрезка $[AC]$, отличной от $B$, мы показали, что из $X \notin [AB]$ вытекает $X \in [BC]$. Это доказывает требуемое включение $[AC] \subset [AB] \cup [BC]$, которое вместе с (3.1) дает равенство $[AB] \cup [BC] = [AC]$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.3. *Если точка $B$ лежит между $A$ и $C$, то пересечение отрезков $[AB]$ и $[BC]$ состоит из одной точки $B$.*

Док-во. Точка $B$ является концевой точкой каждого из отрезков $[AB]$ и $[BC]$. Поэтому она принадлежит пересечению $[AB] \cap [BC]$. Концевые точки $A$ и $C$ не принадлежат пересечению $[AB] \cap [BC]$, поскольку $A \notin [BC]$ и $C \notin [AB]$. Значит, всякая точка $X$ из пересечения $[AB] \cap [BC]$, отличная от $B$, должна быть внутренней точкой отрезков $[AB]$ и $[BC]$.

Пусть $X$ — внутренняя точка отрезка $[AB]$. Тогда из условий $B \in [AC]$ и $X \in [AB]$, применяя лемму 3.2, выводим $X \in [AC]$ и $B \in [XC]$. Условие $B \in [XC]$ в силу теоремы 2.4 исключает выполнение условия $X \in [BC]$, то есть отрезок $[AB]$ не может иметь общих внутренних точек с отрезком $[BC]$. $\square$

## § 4. Векторы на прямой. Задание направлений.

Рассмотрим множество из $n$ точек на некоторой прямой $a$. Пронумеруем эти точки, обозначив $A_1, \ldots, A_n$. Назовем $A_1, \ldots, A_n$ *монотонной последовательностью точек* на прямой, если $n \geqslant 3$ и если точка $A_i$ лежит между точками $A_{i-1}$ и $A_{i+1}$ для всех $i = 2, \ldots, n-1$. Точки монотонной последовательности $A_1, \ldots, A_n$ задают семейство из $n-1$ отрезка:

$$[A_1A_2],\ [A_2A_3],\ \ldots,\ [A_{n-1}A_n]. \tag{4.1}$$

Соседние отрезки в (4.1) имеют пересечение, состоящее из одной точки: $[A_iA_{i+1}] \cap [A_{i+1}A_{i+2}] = \{A_{i+1}\}$. Это вытекает из теоремы 3.3. Применение теоремы 3.2 дает

$$[A_iA_{i+1}] \cup [A_{i+1}A_{i+2}] = [A_iA_{i+2}].$$

Применив эту теорему несколько раз подряд, получим

$$[A_iA_{i+m}] = \bigcup_{q=1}^{m} [A_{i+q-1}A_{i+q}]. \tag{4.2}$$

Из (4.2) можно сделать вывод: $A_i \in [A_{i-q}A_{i+k}]$. Другими словами, точка $A_i$ лежит между точками $A_{i-q}$ и $A_{i+k}$. Кроме того, имеет место соотношение

$$[A_iA_{i+1}] \cap [A_jA_{j+1}] = \varnothing \quad \text{для} \quad j \geqslant i+2. \tag{4.3}$$

Для доказательства (4.3) воспользуемся тем, что при $j \geqslant i+2$ точка $A_j$ лежит между точками $A_{i+1}$ и $A_{j+1}$. Поэтому из теоремы 3.1 выводим $[A_j A_{j+1}] \subset [A_{i+1} A_{j+1}]$. Отсюда, применив теорему 3.3, получаем

$$[A_i A_{i+1}] \cap [A_j A_{j+1}] \subset [A_i A_{i+1}] \cap [A_{i+1} A_{j+1}] = \{A_{i+1}\}.$$

Но точка $A_{i+1}$ не принадлежит отрезку $[A_j A_{j+1}]$. Поэтому пересечение отрезков $[A_i A_{i+1}]$ и $[A_j A_{j+1}]$ есть пустое множество в полном соответствии с формулой (4.3).

Теорема 4.1. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — монотонная последовательность точек на прямой и пусть $B$ — некоторая точка этой прямой, не совпадающая с $A_1, \ldots, A_n$. Тогда точку $B$ можно добавить к точкам $A_1, \ldots, A_n$ и пронумеровать полученное множество точек так, что получится монотонная последовательность $A_1, \ldots, A_{n+1}$.*

Док-во. Рассмотрим три точки $A_1$, $A_n$ и $B$. Согласно теореме 2.4 выполнено ровно одно из следующих условий:

$$(A_1 \blacktriangleright A_n \blacktriangleleft B), \quad (A_1 \blacktriangleright B \blacktriangleleft A_n), \quad (B \blacktriangleright A_1 \blacktriangleleft A_n). \tag{4.4}$$

Если выполнено первое из этих условий, то просто обозначим $B = A_{n+1}$ и сразу же получим искомую монотонную последовательность точек $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Если выполнено второе условие (4.4), то точка $B$ лежит внутри отрезка $[A_1 A_n]$ и не совпадает с точками $A_1, \ldots, A_n$. Но из соотношения (4.2) имеем

$$[A_1 A_n] = \bigcup_{i=1}^{n-1} [A_i A_{i+1}], \tag{4.5}$$

причем отрезки в правой части этого равенства пересекаются лишь по своим концевым точкам. Следовательно, точка $B$ является внутренней точкой ровно одного из отрезков в правой части (4.5). Пусть $B \in [A_q A_{q+1}]$. Сдвинем на единицу нумерацию точек $A_{q+1}, \ldots, A_n$:

$$A_{q+1} \to A_{q+2}, \ \ldots, \ A_n \to A_{n+1}.$$

После этого обозначим $B = A_{q+1}$ и получим требуемую монотонную последовательность $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Если выполнено третье условие (4.4), то приходится сдвигать нумерацию во всей последовательности $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \to A_2, \ \ldots, \ A_n \to A_{n+1}.$$

После этого, обозначив $B = A_1$, получаем искомую монотонную последовательность $A_1, \ldots, A_{n+1}$, включающую точку $B$ и исходные точки $A_1, \ldots, A_n$. $\square$

Теорема 4.2. *Всякое множество из $n$ точек, где $n \geqslant 3$, лежащих на одной прямой, можно пронумеровать так, что получится монотонная последовательность точек $A_1, \ldots, A_n$.*

Док-во. Выберем какие-либо 3 точки из заданного множества из $n$ точек на прямой. Согласно теореме 2.4 ровно одна из выбранных точек лежит между двумя другими. Обозначим ее $A_2$, а две другие точки обозначим $A_1$ и $A_3$. В результате получится монотонная последовательность из трех точек $A_1, A_2, A_3$. Дальше остается лишь добавлять в нее новые точки из заданного множества, применяя теорему 4.1. $\square$

Для всякого множества из $n$ точек на прямой, где $n \geqslant 3$, существует ровно два способа нумерации, которые превращают это множество в монотонную последовательность точек. Если одна такая нумерация задана $A_1, \ldots, A_n$, то вторая нумерация $B_1, \ldots, B_n$ получается из первой следующим образом:

$$B_1 = A_n, \ B_2 = A_{n-1}, \ \ldots, \ B_n = A_1. \tag{4.6}$$

Определение 4.1. Отрезок $[AB]$ прямой линии называется *направленным отрезком* или *вектором*, если одна из его концевых точек выделена по отношению к другой.

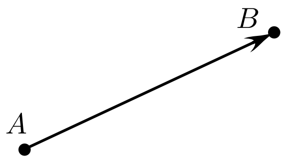


*Рис. 4.1*

Выделенную точку вектора на рисунке обозначают стрелкой. Эта точка называется *концом вектора.* Вторая концевая точка вектора называется *началом вектора.* В записи для обозначения векторов также используется стрелка: $\overrightarrow{AB}$. Заметим, что $[AB]$ и $[BA]$ — это лишь два обозначения для одного и того же отрезка. Однако, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ — это два разных вектора.

Векторы на прямой задают направление. При этом важно иметь возможность сравнивать два направления, заданные двумя векторами.

Определение 4.2. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если существует монотонная последовательность точек $A_1, \ldots, A_n$, включающая точки $A = A_i$, $B = A_k$, $C = A_j$ и $D = A_q$, где выполнено соотношение $\operatorname{sign}(k - i) = \operatorname{sign}(q - j)$.

Заметим, что добавление новых точек в монотонную последовательность $A_1, \ldots, A_n$ в соответствии с теоремой 4.1 не меняет знаков разностей $\operatorname{sign}(k - i)$ и $\operatorname{sign}(q - j)$. Перенумерация точек (4.6) меняет эти знаки на противоположные:

$$\operatorname{sign}(k - i) \to -\operatorname{sign}(k - i), \qquad \operatorname{sign}(q - j) \to -\operatorname{sign}(q - j).$$

Таким образом, мы видим, что выполнение или невыполнение равенства $\operatorname{sign}(k - i) = \operatorname{sign}(q - j)$ не зависит от выбора монотонной последовательности точек, включающей концевые точки векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Поэтому для проверки сонаправленности $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ достаточно ввести нумерацию на множестве концевых точек этих векторов, пользуясь теоремой 4.2.

Отношение сонаправленности является бинарным отношением на множестве векторов, лежащих на одной прямой. Это отношение обладает следующими свойствами:

(1) $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{AB}$ для всякого вектора $\overrightarrow{AB}$;
(2) из $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ вытекает $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{AB}$;
(3) из $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и из $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{EF}$ вытекает $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{EF}$;
(4) если вектор $\overrightarrow{AB}$ не сонаправлен с $\overrightarrow{CD}$, а вектор $\overrightarrow{CD}$ не сонаправлен с $\overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{EF}$.

Свойства (1)-(4) легко доказываются, если рассмотреть некоторую монотонную последовательность точек $A_1, \ldots, A_n$, включающую в себя точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и $F$. Первые три из этих свойств показывают, что отношение сонаправленности рефлексивно, симметрично, и транзитивно. Четвертое свойство показывает, что если профакторизовать вектора по этому отношению, то мы получим всего два класса эквивалентности, каждый из которых соответствует одному из двух возможных направлений на прямой.

Пусть на некоторой прямой $a$ зафиксирован некоторый вектор $\overrightarrow{MN}$. Направление, заданное этим вектором, назовем *положительным.* Тогда противоположный вектор $\overrightarrow{NM}$ задает *отрицательное* направление. В этой ситуации для всяких двух точек $X$ и $Y$ на прямой $a$ скажем, что точка $X$ *предшествует* точке $Y$, если вектор $\overrightarrow{XY}$ имеет положительное направление, т. е. если $\overrightarrow{XY} \upuparrows \overrightarrow{MN}$. Отношение предшествования обозначим так: $X \prec Y$. Оно обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

(1) из $A \prec B$ вытекает $A \neq B$;
(2) условие $A \prec B$ исключает $B \prec A$;
(3) из $A \prec B$ и $B \prec C$ вытекает $A \prec C$;
(4) для любых двух точек $A$ и $B$ выполнено ровно одно из условий $A \prec B$ или $B \prec A$.

Свойства (1)-(4) показывают, что отношение предшествования превращает всякую прямую с выделенным вектором $\overrightarrow{MN}$ в линейно упорядоченное множество.

Теорема 4.3. *На прямой с выделенным направлением точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий $A \prec B \prec C$ или $C \prec B \prec A$.*

Упражнение 4.1. *Докажите, что единственный способ перенумерации точек некоторой монотонной последовательности $A_1, \ldots, A_n$, сохраняющий свойство монотонности, задается соотношением* (4.6).

Упражнение 4.2. *Проверьте свойства* (1)–(4) *для отношения сонаправленности векторов.*

Упражнение 4.3. *Проверьте свойства* (1)–(4) *для отношения предшествования на прямой с выделенным направлением.*

Упражнение 4.4. *Докажите теорему 4.3.*

## § 5. Разбиение прямой и плоскости.

Рассмотрим некоторую точку $O$ на прямой $a$. Согласно аксиоме A1 на прямой $a$ найдется еще одна точка. Обозначим ее через $E$. Вектор $\overrightarrow{OE}$ выделяет на прямой одно из двух возможных направлений и задает отношение предшествования. Рассмотрим два неограниченных интервала

$$\begin{aligned}(O, +\infty) &= \{X \in a : \quad O \prec X\},\\ (-\infty, O) &= \{X \in a : \quad X \prec O\}.\end{aligned}$$

Используя свойства (1)–(4) бинарного отношения предшествования, можно показать, что интервалы $(O, +\infty)$ и $(-\infty, O)$ не пересекаются, а вся прямая $a$ разбивается на три множества:

$$a = (-\infty, O) \cup \{O\} \cup (O, +\infty). \tag{5.1}$$

Соединив точку $O$ с каждым из неограниченных интервалов $(-\infty, O)$ и $(O, +\infty)$, получим два множества, которые называются *полупрямыми* или *лучами*:

$$[O, -\infty) = (-\infty, O) \cup \{O\}, \qquad [O, +\infty) = \{O\} \cup (O, +\infty).$$

Таким образом, каждая точка $O$ на прямой $a$ определяет разбиение этой прямой на два луча, имеющих единственную общую точку — точку $O$.

Теперь рассмотрим прямую $a$, лежащую в плоскости $\alpha$. К плоскости $\alpha$ применим результат теоремы 1.6, которая утверждает, что в любой плоскости можно найти три точки, не лежащие на одной прямой. Значит, множество $\alpha \setminus a$ непусто. Зададим на множестве $\alpha \setminus a$ отношение эквивалентности, полагая $A \sim B$, если $A = B$, либо если отрезок $[AB]$ не имеет общих точек с прямой $a$. Свойство рефлексивности и симметричности для такого бинарного отношения очевидны. Остается проверить свойство транзитивности.

Пусть $A \sim B$ и $B \sim C$. Если при этом $A = B$ или $B = C$, то $A \sim C$ есть тривиальное следствие одного из соотношений $A \sim B$ либо $B \sim C$. Совпадение $A = C$ само влечет $A \sim C$. Поэтому можно считать, что $A$, $B$ и $C$ — три различные точки. Рассмотрим два случая:

(1) когда точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой;
(2) когда точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой.

В первом случае, если допустить, что точки $A$ и $C$ не эквивалентны, то прямые $AC$ и $a$ пересекаются в некоторой внутренней точке $O$ отрезка $[AC]$. Зададим положительное направление на прямой $AC$ вектором $\overrightarrow{OA}$. Тогда $C \prec O \prec A$. Точка $B$ не лежит на прямой $a$, поэтому $B \neq O$. Следовательно, $B$ принадлежит одному из интервалов $(-\infty, O)$ или $(O, +\infty)$. Если $B \in (-\infty, O)$, то $B \prec O \prec A$, что противоречит условию $A \sim B$. Если $B \in (O, +\infty)$, то $C \prec O \prec B$, что противоречит условию $B \sim C$. В обоих случаях допущение о неэквивалентности $A$

и $C$ приводит к противоречию, поэтому выполнено требуемое условие $A \sim C$.

Во втором случае допущение о неэквивалентности $A$ и $C$ приводит к тому, что прямая $a$, не проходящая ни через одну из точек $A$, $B$ и $C$, пересекает отрезок $[AC]$ в некоторой внутренней точке $O$. Тогда в силу аксиомы Паша A12 она должна пересечь один из отрезков $[AB]$ или $[BC]$ во внутренней точке. Это противоречит одновременному выполнению условий $A \sim B$ и $B \sim C$. Полученное противоречие доказывает $A \sim$ C.

Введенное отношение эквивалентности определяет разбиение множества $\alpha \setminus a$ на классы. Оказывается, число таких классов равно двум. Принимая в рассчет аксиому A1, выберем точку $O$, лежащую на прямой $a$. Затем выберем и фиксируем точку $A$, лежащую в плоскости $\alpha$, но не лежащую на прямой $a$. Проведем прямую $AO$ и применим к точкам $A$ и $O$ на этой прямой аксиому A10. Она позволяет найти точку $B$ на прямой $AO$, такую, что $O$ лежит внутри отрезка $[AB]$.

Точки А и $B$ принадлежат множеству $\alpha \setminus a$. Они не эквивалентны, поскольку отрезок $[AB]$ пересекает прямую $a$ в точке $O$. Значит, классы эквивалентности $\mathrm{Cl}(A)$ и $\mathrm{Cl}(B)$ различны. Докажем, что произвольная точка $X$ множества $\alpha \setminus a$ принадлежит одному из этих классов. Рассмотрим два случая:

(1) когда точка $X$ лежит на прямой $AO$;
(2) когда точка $X$ не принадлежит прямой $AO$.

Естественно, что мы можем считать точку $X$, отличной от $A$ и от $B$. В первом случае вектор $\overrightarrow{OA}$ выделяет одно из двух направлений на прямой $AO$ и задает отношение предшествования. В силу разложения (5.1) точка $X$ попадает в один из неограниченных интервалов $(-\infty, O)$ либо $(O, +\infty)$.

Если $X \in (-\infty, O)$, то $X \prec O$ и $B \prec O$. Отсюда, применяя теорему 4.3 к точкам $X$, $B$ и $O$, заключаем, что точка $O$ не может лежать внутри отрезка $[BX]$. Следовательно $X \in \mathrm{Cl}(B)$.

Если $X \in (O, +\infty)$, то $O \prec X$ и $O \prec A$. Отсюда, вновь применяя теорему 4.3, получим $X \in \mathrm{Cl}(A)$.

Во втором случае, когда точка $X$ не лежит на прямой $OA$, мы можем рассмотреть треугольник $ABX$, лежащий в плоскости $\alpha$. Прямая $a$ лежит в той же плоскости и не проходит через точки $A$, $B$ и $X$. При этом она пересекает сторону $[AB]$ во внутренней точке $O$. Применим теорему 2.5, которая усиливает аксиому Паша. Согласно этой теореме прямая $a$ пересекает ровно одну из оставшихся двух сторон треугольника $ABX$: сторону $[AX]$ либо сторону $[BX]$. Если $a$ пересекает $[AX]$, то $a$ не пересекает $[BX]$ и $X \in \mathrm{Cl}(B)$. Если же $a$ пересекает $[BX]$, то $a$ не пересекает $[AX]$ и потому $X \in \mathrm{Cl}(A)$.

Обозначим $a_+ = \mathrm{Cl}(A)$ и $a_- = \mathrm{Cl}(B)$. Приведенные выше рассуждения показывают, что прямая $a$, лежащая в плоскости $\alpha$, задает разбиение этой плоскости на три множества:

$$\alpha = a_- \cup a \cup a_+. \tag{5.2}$$

Разбиение (5.2) аналогично разбиению (5.1). Множества $a_-$ и $a_+$ называются открытыми полуплоскостями. Развивая аналогию с (5.1), определим замкнутые полуплоскости:

$$\overline{a_-} = a_- \cup a, \qquad \overline{a_+} = a_+ \cup a.$$

Рассмотрим две не совпадающие прямые $a$ и $b$, пересекающиеся в точке $O$. Согласно теореме 1.5 такие прямые однозначно фиксируют некоторую плоскость $\alpha$, которая содержит обе прямые $a$ и $b$. Каждая из прямых $a$ и $b$ определяет разбиение плоскости $\alpha$ на две полуплоскости. Пересечение двух замкнутых полуплоскостей называется *углом*. Выберем на прямой $a$ точку $A$, отличную от $O$. Аналогичным образом на прямой $b$ выберем точку $B$, отличную от $O$. Точка $B$ не лежит на прямой $a$, следовательно, она попадает только в одну из замкнутых полуплоскостей — в

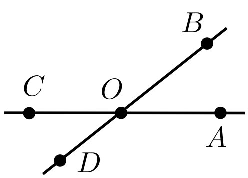



*Рис. 5.1*

$\overline{a_+}$ либо в $\overline{a_-}$. Пусть для определенности через $\overline{a_+}$ обозначена полуплоскость, содержащая точку $B$, а через $\overline{b_+}$ обозначена полуплоскость, содержащая точку $A$. Угол, получающийся как пересечение замкнутых полуплоскостей $\overline{a_+}$ и $\overline{b_+}$, принято обозначать следующим образом:

$$\angle AOB = \overline{a_+} \cap \overline{b_+}. \tag{5.3}$$

Используя аксиому A10, выберем на прямой $a$ точку $C$ так, чтобы точка $O$ лежала между $A$ и $C$. Аналогичным образом выберем точку $D$ на прямой $b$. Прямые $a$ и $b$ в плоскости $\alpha$ задают сразу четыре угла:

$$\begin{aligned} &\angle AOB = \overline{a_+} \cap \overline{b_+}, &\qquad &\angle BOC = \overline{a_+} \cap \overline{b_-},\\ &\angle COD = \overline{a_-} \cap \overline{b_-}, &\qquad &\angle DOA = \overline{a_-} \cap \overline{b_+}. \end{aligned}$$

Точки $A$ и $B$, выделяющие полуплоскости $\overline{a_+}$ и $\overline{b_+}$, играют одинаковую роль в задании угла $\angle AOB$. Поэтому $\angle AOB$ и $\angle BOA$ — это два разных обозначения для одного угла.

Рассмотрим угол $\angle AOB$ из (5.3). Пересечение открытых полуплоскостей $a_+ \cap b_+$ называется *внутренностью* угла $\angle AOB$. Точка $O$ определяет разделение прямых $a$ и $b$ на четыре замкнутые полупрямые (четыре луча). Обозначим их так:

$$[OA\rangle, \qquad [OB\rangle, \qquad [OC\rangle, \qquad [OD\rangle.$$

Прежние обозначения $[O, +\infty)$ и $[O, -\infty)$ для лучей удобны только при рассмотрении лучей, лежащих на одной фиксированной прямой.

Теорема 5.1. *Всякий угол $\angle AOB$ есть объединение своей внутренности и двух лучей $[OA\rangle$ и $[OB\rangle$.*

Лучи $[OA\rangle$ и $[OB\rangle$ называются *сторонами* угла $\angle AOB$, а точка $O$ называется его *вершиной*. Углы $\angle AOB$ и $\angle COB$ на рисунке 5.1 имеют общую вершину $O$ и общую сторону $[OB\rangle$, причем две другие стороны этих углов $[OA\rangle$ и $[OC\rangle$ лежат на одной прямой $a$, пересекаясь в единственной точке $O$. Такие углы называются *смежными.*

Объединение двух смежных углов есть полуплоскость. Действительно, рассмотрим объединение углов $\angle AOB$ и $\angle COB$:

$$\begin{aligned}\angle AOB \cup \angle COB = (\overline{a_+} \cap \overline{b_+}) \cup (\overline{a_+} \cap \overline{b_-}) = \\ = \overline{a_+} \cap (\overline{b_+} \cup \overline{b_-}) = \overline{a_+} \cap \alpha = \overline{a_+}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Замкнутую полуплоскость $\overline{a_+}$ с выделенной точкой $O$ на прямой $a$ можно трактовать как угол. Такой угол называют *развернутым* углом. Следует с осторожностью использовать обозначение $\angle AOC$ для развернутого угла, поскольку это обозначение годится как для $\overline{a_+}$, так и для $\overline{a_-}$.

Рассмотрим углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ на рисунке 5.1. Стороны $[OC\rangle$ и $[OD\rangle$ второго угла дополняют стороны $[OA\rangle$ и $[OB\rangle$ первого угла до прямых $a$ и $b$. Такие углы называются *вертикальными* углами.

Теорема 5.2. *Любые три точки $A$, $B$ и $O$, не лежащие на одной прямой, определяют ровно один угол $\angle AOB$ с вершиной в точке $O$.*

Рассмотрим три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Обозначим через $a$ прямую $BC$, через $b$ — прямую $AC$ и через $c$ — прямую $AB$. Прямые $a$, $b$ и $c$ лежат в плоскости $\alpha$, определяемой точками $A$, $B$ и $C$ по аксиоме A4. Обозначим через $a_+$ полуплоскость в $\alpha$, определяемую прямой $a$ и содержащую в себе точку $A$. Аналогичным образом, пусть $B \in b_+$ и $C \in c_+$. *Треугольником $ABC$* назовем множество точек плоскости $\alpha$, полученное как пересечение трех замкнутых полуплоскостей $\overline{a_+}$, $\overline{b_+}$ и $\overline{c_+}$. Ранее под треугольником $ABC$ мы могли понимать только совокупность из трех отрезков $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$, соединяющих три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Теперь треугольник $ABC$ оснащается внутренностью. *Внутренностью* треугольника $ABC$ называется пересечение открытых полуплоскостей $a_+ \cap b_+ \cap c_+$.

Теорема 5.3. *Треугольник $ABC$ есть объединение своей внутренности и трех сторон $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$.*

Упражнение 5.1. *Докажите теоремы 5.1, 5.2 и 5.3, доказав предварительно следующую лемму.*

Лемма 5.1. *Для любых точек $A$ и $B$ пересечение лучей $[AB\rangle$ и $[BA\rangle$ есть отрезок $[AB]$.*

Упражнение 5.2. *Проверьте вычисления (5.4), пользуясь теоретико-множественными соображениями.*

Упражнение 5.3. *Пусть $A$, $B$ и $C$ — три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что внутренность треугольника $ABC$ непуста.*

## § 6. Разбиение пространства.

Пусть $\alpha$ — некоторая плоскость. Согласно лемме 1.1 существует точка, не лежащая в плоскости $\alpha$. Поэтому множество $\mathbb{E} \setminus \alpha$ непусто. Зададим на этом множестве отношение эквивалентности, полагая $A \sim B$, если $A = B$, либо если отрезок $[AB]$ не пересекается с плоскостью $\alpha$. Свойства рефлексивности и симметричности для такого бинарного отношения очевидны.

Проверим транзитивность определенного выше бинарного отношения. Пусть $A \sim B$ и $B \sim C$. Если при этом $A = B$ или $B = C$, то $A \sim C$ есть тривиальное следствие одного из соотношений $A \sim B$ либо $B \sim C$. Совпадение $A = C$ само влечет $A \sim C$. Поэтому можно считать, что $A$, $B$ и $C$ — три различные точки. Разберем два случая:

(1) когда точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой;
(2) когда точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой.

В первом случае, если допустить, что точки $A$ и $C$ не эквивалентны, то прямая $AC$ пересекает плоскость $\alpha$ в некоторой точке $O$, лежащей внутри отрезка $[AC]$. Согласно теореме 1.4 точка $O$ — это единственная общая точка прямой $AC$ и плоскости $\alpha$. Зададим положительное направление на прямой $AC$ вектором $\overrightarrow{OA}$. Тогда $C \prec O \prec A$. Точка $B$ не лежит в плоскости $\alpha$, поэтому $B \neq O$. Следовательно, $B$ принадлежит одному из интервалов $(-\infty, O)$ или $(O, +\infty)$, определяемых разбиением (5.1). Если $B \in (-\infty, O)$, то $B \prec O \prec A$, что противоречит условию $A \sim B$. Если $B \in (O, +\infty)$, то $C \prec O \prec B$, что противоречит условию $B \sim C$. Таким образом, допущение о неэквивалентности $A$ и $C$ приводит к противоречию, поэтому выполнено требуемое условие $A \sim C$.

Во втором случае через точки $A$, $B$ и $C$ можно провести плоскость $\beta$, что вытекает из аксиомы A4. Здесь допущение о неэквивалентности $A$ и $C$ означает, что прямая $AC$ пересекает плоскость $\alpha$ в некоторой внутренней точке $O$ отрезка $[AC]$. Но $[AC] \subset \beta$, поэтому не совпадающие плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют общую точку $O$. Применим теорему 1.2 и обозначим через $a$ прямую, которая получается как пересечение $\alpha \cap \beta$. Прямая $a$ лежит в плоскости $\beta$, не проходит ни через одну из точек $A$, $B$ и $C$ и пересекает отрезок $[AC]$ во внутренней точке $O$. Тогда в силу аксиомы Паша A12 она должна пересечь один из отрезков $[AB]$ или $[BC]$ во внутренней точке. Это противоречит одновременному выполнению условий $A \sim B$ и $B \sim C$. Полученное противоречие доказывает $A \sim$ C.

Введенное выше отношение эквивалентности разбивает множество $\mathbb{E} \setminus \alpha$ на классы. Здесь, как и в случае разбиения плоскости, число классов эквивалентности оказывается равно двум. Они обозначаются $\alpha_+$ и $\alpha_-$ и называются *открытыми полупространствами.* Таким образом, всякая плоскость $\alpha$ задает разбиение пространства

$$\mathbb{E} = \alpha_- \cup \alpha \cup \alpha_+ \tag{6.1}$$

аналогичное разбиениям (5.1) и (5.2) для прямой и плоскости.

Исходя из (6.1) определяются замкнутые полупространства

$$\overline{\alpha_-} = \alpha_- \cup \alpha, \qquad\qquad \overline{\alpha_+} = \alpha_+ \cup \alpha.$$

Лемма 6.1. *Если $A$, $B$, $C$ и $D$ — четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то никакие три из них не могут лежать на одной прямой.*

Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ — некоторые четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Существование хотя бы одной такой четверки точек гарантируется аксиомой A8. В силу леммы 6.1 и аксиомы A4 каждые три из этих четырех точек определяют плоскость. Всего получается четыре различные плоскости. Обозначим эти плоскости так:

$$\alpha = BCD, \qquad \beta = ACD, \qquad \gamma = ABD, \qquad \delta = ABC.$$

Каждая из четырех плоскостей $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ задает два полупространства. Выберем обозначения этих полупространств так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$A \in \alpha_+, \qquad B \in \beta_+, \qquad C \in \gamma_+, \qquad D \in \delta_+.$$

Пересечение замкнутых полупространств $\overline{\alpha_+}$, $\overline{\beta_+}$, $\overline{\gamma_+}$ и $\overline{\delta_+}$ называется *тетраэдром*. Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ называются *вершинами* тетраэдра $ABCD$, отрезки $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$ и $[DC]$ называются его *ребрами*, а треугольники $ABC$, $ABD$, $ACD$ и $BCD$ называются *гранями* тетраэдра $ABCD$. Пересечение открытых полупространств $\alpha_+$, $\beta_+$, $\gamma_+$ и $\delta_+$ называется *внутренностью* тетраэдра $ABCD$.

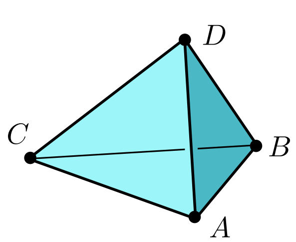



*Рис. 6.1*

Тетраэдр называют *трехмерным симплексом*. *Двумерный симплекс —*

это треугольник, *одномерный симплекс* — это отрезок, а *нульмерный симплекс* — это точка. Такая терминология популярна в алгебраической топологии (см. [4]).

Упражнение 6.1. *Докажите, что число классов, на которое разбивается множество $\mathbb{E} \setminus \alpha$ введенным выше отношением эквивалентности, действительно равно двум.*

Упражнение 6.2. *Докажите лемму 6.1. Для этого воспользуйтесь аксиомами связи и результатами § 1.*

Лемма 6.2. *Пусть $\angle AOB$ — угол, образованный тремя точками $A$, $O$ и $B$, не лежащими на одной прямой. Тогда луч, исходящий из точки $O$, лежит внутри угла $\angle AOB$ в том и только в том случае, когда он пересекает отрезок $[AB]$.*

Упражнение 6.3. *Докажите лемму 6.2. Для этого дополните луч $[OA\rangle$ до целой прямой и, выбрав точку $C$ на прямой $OA$, не принадлежащую лучу $[OA\rangle$, постройте треугольник $ABC$.*

Упражнение 6.4. *Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Покажите, что внутренность тетраэдра $ABCD$ непуста.*

Упражнение 6.5. *Покажите, что любой тетраэдр $ABCD$ есть объединение своей внутренности и четырех треугольников $ABC$, $ABD$, $ACD$ и $BCD$.*

ГЛАВА III

# АКСИОМЫ КОНГРУЭНТНОСТИ.

## § 1. Бинарные отношения конгруэнтности.

Аксиомы конгруэнтности составляют третью группу аксиом Евклида. При формулировке этих аксиом считается, что на множестве отрезков введено бинарное отношение, называемое *конгруэнтностью.* Аналогичное бинарное отношение считается заданным и на множестве углов. Его также называют *конгруэнтностью*, хотя, разумеется, конгруэнтность отрезков и конгруэнтность углов — это два разных бинарных отношения. Для обозначения конгруэнтности отрезков и конгруэнтности углов принято использовать один и тот же знак $\cong$.

Отрезок задается двумя точками, а угол можно задавать тремя точками. Поэтому конгруэнтность отрезков можно трактовать как четверное (тетрарное) отношение на множестве точек. А конгруэнтность углов можно трактовать как шестерное (гексарное) отношение на множестве точек. Такая трактовка была бы более последовательной с формальной точки зрения, но она менее наглядна и потому менее удобна.

## § 2. Конгруэнтность отрезков.

Аксиома A13. *Всякий отрезок $[AB]$ конгруэнтен самому себе, причем для всякого луча с началом в произвольной точке $C$ существует единственная точка $D$ на этом луче, такая, что выполнено условие $[AB] \cong [CD]$.*

Аксиома A14. *Бинарное отношение конгруэнтности отрезков транзитивно, то есть из двух соотношений* $[AB] \cong [CD]$ *и* $[CD] \cong [EF]$ *вытекает* $[AB] \cong [EF]$.

Свойство рефлексивности отношения конгруэнтности отрезков сформулировано в аксиоме A13 явно, а транзитивность этого отношения составляет содержание аксиомы A14. Докажем его симметричность.

Лемма 2.1. *Отношение конгруэнтности отрезков симметрично, то есть из* $[AB] \cong [CD]$ *вытекает* $[CD] \cong [AB]$.

Док-во. Пусть $[AB] \cong [CD]$. Применим аксиому A13 к отрезку $[CD]$ и лучу $[AB\rangle$ с началом в точке $A$. Из нее извлекаем существование точки $E$ на луче $[AB\rangle$ такой, что $[CD] \cong [AE]$. Из условий $[AB] \cong [CD]$ и $[CD] \cong [AE]$ в силу аксиомы A14 выводим $[AB] \cong [AE]$.

Теперь применим аксиому A13 к отрезку $[AB]$ и лучу $[AB\rangle$. Она утверждает, что точка $E$ на луче $[AB\rangle$, для которой выполняется условие $[AB] \cong [AE]$, единственна. Но $[AB] \cong [AB]$. Поэтому точка $E$ совпадает с $B$. Отсюда $[CD] \cong [\mathrm{AB}]$, что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, в силу аксиом A13 и A14 и в силу доказанной леммы 2.1 отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности на множестве отрезков.

Аксиома A15. *Пусть точка* $B$ *лежит между точками* $A$ *и* $C$ *на прямой* $AC$, *а точка* $L$ *лежит между точками* $K$ *и* $M$ *на прямой* $KM$. *Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *из* $[AB] \cong [KL]$ *и* $[BC] \cong [LM]$ *вытекает* $[AC] \cong [KM]$;
(2) *из* $[AB] \cong [KL]$ *и* $[AC] \cong [KM]$ *вытекает* $[BC] \cong [LM]$.

Заметим, что утверждения (1) и (2) в предположениях аксиомы A15 можно дополнить еще одним:

(3) $[AC] \cong [KM]$ and $[BC] \cong [LM]$ imply $[AB] \cong [KL]$.

Утверждение (3) получается перефразированием второго утверждения, если поменять обозначения точек $A$ с $C$ и $K$ с $M$.

В условиях аксиомы A15 точка $B$ разбивает отрезок $[AC]$ на два отрезка $[AB]$ и $[BC]$, пересечение которых состоит из единственной точки $B$, а объединение совпадает с отрезком $[AC]$ (см. теоремы 3.2 и 3.3 из второй главы). В этой ситуации говорят, что отрезок $[AC]$ *составлен* или *сложен* из отрезков $[AB]$ и $[BC]$. Поэтому первое утверждение аксиомы A15 можно кратко сформулировать так: отрезок, сложенный из отрезков, конгруэнтных $[AB]$ и $[BC]$, конгруэнтен их *сумме* $[AC]$. Если назвать $[BC]$ *разностью* отрезков $[AC]$ и $[AB]$, то второе утверждение аксиомы A15 можно сформулировать так: разность отрезков, конгруэнтных $[AC]$ и $[AB]$, конгруэнтна их разности $[BC]$.

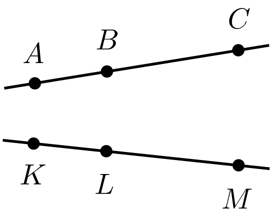



*Рис. 2.1*

Теорема 2.1. *Пусть отрезок $[KM]$ конгруэнтен отрезку $[AC]$ и пусть $B$ — произвольная точка прямой $AC$, отличная от $A$ и $C$. Тогда на прямой $KM$ существует единственная точка $L$, такая, что $[KL] \cong [AB]$ и $[LM] \cong [BC]$.*

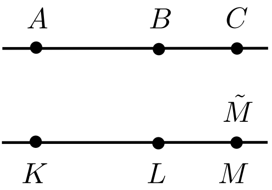



*Рис. 2.2*

Док-во. Рассмотрим три возможных расположения точки $B$ относительно точек $A$ и $C$:

$$\begin{gathered}(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C),\\ (C \blacktriangleright A \blacktriangleleft B),\\ (B \blacktriangleright C \blacktriangleleft A).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Согласно теореме 2.4 из второй главы ровно одно из условий (2.1) непременно выполняется. Если это первое условие, то применим аксиому A13 к отрезку $[AB]$ и лучу $[KM\rangle$. Это определяет единственную точку $L$ на луче $[KM\rangle$, для которой

$[KL] \cong [AB]$ (см. рисунок 2.2). Далее рассмотрим луч, исходящий из точки $L$ и противоположный лучу $[LK\rangle$. На этом луче найдем точку $\tilde{M}$, для которой $[L\tilde{M}] \cong [BC]$. Тогда

$$(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C), \qquad (K \blacktriangleright L \blacktriangleleft \tilde{M}). \tag{2.2}$$

В силу (2.2) к точкам $A$, $B$, $C$, $K$, $L$ и $\tilde{M}$ применим пункт (1) аксиомы A15. Его применение дает $[K\tilde{M}] \cong [AC]$. Но по условию теоремы $[KM] \cong [AC]$, причем обе точки $M$ и $\tilde{M}$ лежат на одном луче $[KL\rangle$, исходящем из точки $K$. Отсюда в силу аксиомы A13 выводим совпадение точек $M = \tilde{M}$. Тогда

$$[KL] \cong [AB], \qquad [LM] \cong [BC]. \tag{2.3}$$

Значит, точка $L$ и есть искомая точка на прямой $KM$. Докажем ее единственность. Второе условие в (2.3) допускает существование ровно двух точек $L$ и $\tilde{L}$, удовлетворяющих этому условию. Первая из них лежит на луче $[MK\rangle$ — это точка $L$. Вторая точка $\tilde{L}$ лежит на противоположном луче, исходящем из точки $M$. Если допустить, что точка $L$ определяется условиями (2.3) неоднозначно, то точка $\tilde{L}$ также удовлетворяет сразу двум условиям (2.3). На луче, исходящем из точки $\tilde{L}$ в направлении, противоположном лучу $[\tilde{L}K\rangle$, выберем точку $\tilde{M}$, такую, что $[\tilde{L}\tilde{M}] \cong [BC]$. Из условий $[K\tilde{L}] \cong [AB]$ и $[\tilde{L}\tilde{M}] \cong [BC]$ в силу пункта (1) аксиомы A15 выводим $[K\tilde{M}] \cong [AC]$. Но точка $M$ по условию теоремы удовлетворяет точно такому же условию $[KM] \cong [AC]$. Это противоречит аксиоме A13. Совпадение $M = \tilde{M}$ исключается, ибо $M$ и $\tilde{M}$ по построению лежат по разные стороны от точки $\tilde{L}$. Полученное противоречие доказывает единственность точки $L$ в случае выполнения первого из трех условий (2.1).

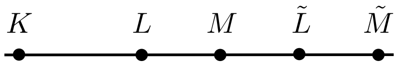



*Рис. 2.3*

Теперь рассмотрим второй вариант расположения точек $A$, $B$ и $C$ в (2.1). Применим аксиому A13 к лучу с началом в точке $K$, который противоположен лучу $[KM\rangle$. Это определяет точку $L$ на прямой $KM$, такую, что для нее $[KL] \cong [AB]$. Соединим это с $[KM] \cong [AC]$ и применим пункт (1) аксиомы A15. В результате получим $[LM] \cong [BC]$. Таким образом, $L$ есть искомая точка на прямой $KM$. Остается доказать единственность такой точки.

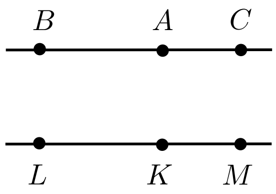



*Рис. 2.4*

Допустим, что она не единственна. Условие $[LM] \cong [BC]$ допускает существование ровно двух таких точек. Одна из них — это уже построенная точка $L$. Вторая — это точка $\tilde{L}$, лежащая на луче, выходящем из точки $M$ и противоположном лучу $[MK\rangle$. Пользуясь аксиомой A13 отметим на луче $[KL\rangle$ точку $\tilde{M}$, такую, что $[K\tilde{M}] \cong [AC]$. Затем применим к отрезкам $[\tilde{L}K]$ и $[K\tilde{M}]$ пункт (1) аксиомы A15. Для точки $\tilde{M}$ это дает $[\tilde{L}\tilde{M}] \cong [BC]$. Тогда для двух точек $M$ и $\tilde{M}$ на луче $[\tilde{L}K\rangle$ имеем $[\tilde{L}\tilde{M}] \cong [BC]$ и $[\tilde{L}M] \cong [BC]$, что противоречит аксиоме A13. Полученное противоречие доказывает единственность точки $L$ для второго варианта расположения точек в (2.1).

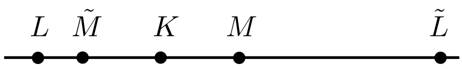



*Рис. 2.5*

Третий вариант расположения точек $A$, $B$ и $C$ в (2.1) сводится ко второму путем одновременной перестановки точек $A$ с $C$ и $K$ с $M$. Отдельного рассмотрения он не требует. □

Пусть отрезок $[AC]$ на прямой $a$ конгруэнтен отрезку $[KM]$ на прямой $b$. Доказанная теорема 2.1 позволяет задать отображение $f : a \to b$, полагая $f(A) = K$, $f(C) = M$, и определяя $f(X)$ условиями $[AX] \cong [Kf(X)]$ и $[CX] \cong [Mf(X)]$ для всех остальных точек $X \in a$.

Аналогичным образом строится отображение $h\colon b \to a$. Для него $h(K) = A$, $h(M) = C$ и, кроме того, выполнены условия $[KZ] \cong [Ah(Z)]$ и $[MZ] \cong [Ch(Z)]$, задающие $h(Z)$ для всех остальных точек $Z \in b$. В силу утверждения о единственности точки $L$ в теореме 2.1 отображения $f$ и $h$ оказываются обратными друг для друга. В частности, это означает, что оба они взаимно однозначны.

Заметим, что, прослеживая ход доказательства теоремы 2.1, можно установить следующий факт, характеризующий $f$:

$$\begin{aligned}
&(A \blacktriangleright X \blacktriangleleft C) \ \text{ влечет } \ (K \blacktriangleright f(X) \blacktriangleleft M),\\
&(C \blacktriangleright A \blacktriangleleft X) \ \text{ влечет } \ (M \blacktriangleright K \blacktriangleleft f(X)),\\
&(X \blacktriangleright C \blacktriangleleft A) \ \text{ влечет } \ (f(X) \blacktriangleright M \blacktriangleleft K).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Другими словами, взаимное расположение точек $K$, $M$ и $f(X)$ на прямой $b$ дублирует взаимное расположение исходных точек $A$, $C$ и $X$ на прямой $a$.

Теорема 2.2. *Пусть отрезок $[KM]$ прямой $b$ конгруэнтен отрезку $[AC]$ прямой $a$. Рассмотрим отображение $f : a \to b$, которое задается соотношениями $f(A) = K$, $f(C) = M$ и условиями $[AX] \cong [Kf(X)]$ и $[CX] \cong [Mf(X)]$ для точек $X$, отличных от $A$ и $C$. Тогда, если на прямых $a$ и $b$ задать выделенные направления векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{KM}$, то для любых двух точек $X$ и $Y$ на прямой $a$ получим:*

(1) *$X \prec Y$ влечет $f(X) \prec f(Y)$;*
(2) *отрезок $[XY]$ конгруэнтен отрезку $[f(X)f(Y)]$.*

Док-во. Рассмотрим различные варианты взаимного расположения точек $X$, $Y$, $A$ и $C$ на прямой $a$. Если точка $X$ либо точка $Y$ совпадает с одной из точек $A$ и $C$, в этом случае утверждение теоремы вытекает из (2.4) и из самого способа задания отображения $f$. Поэтому сразу же можем считать, что $X$, $Y$, $A$ и $C$ — это четыре различные точки на прямой $a$.

Точки $A$ и $C$ разбивают прямую $a$ на три фрагмента: луч $(-\infty, A]$, отрезок $[AC]$ и луч $[C, +\infty)$. Если точки $X$ и $Y$ попадают в разные фрагменты этого разбиения, то в интервал $(XY)$ попадает, по крайней мере, одна из точек $A$ и $C$. Поэтому утверждение (1) из теоремы может быть выведено из (2.4). Второе утверждение теоремы затем получается в результате применения пункта (1) из аксиомы A15.

Далее рассмотрим случай, когда точки $X$ и $Y$ лежат на отрезке $[AC]$. Тогда из $X \prec Y$ вытекает $A \prec X \prec Y \prec C$.

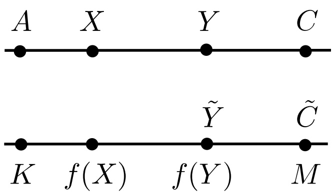



*Рис. 2.6*

Пользуясь аксиомой A13 на луче $[f(X)M\rangle$ выберем точку $\tilde{Y}$, такую, что $[f(X)\tilde{Y}] \cong [XY]$. Затем, пользуясь той же аксиомой A13, отложим отрезок $[\tilde{Y}\tilde{C}] \cong [YC]$ на луче, исходящем из точки $\tilde{Y}$ и противоположном лучу $[\tilde{Y}K\rangle$. Применяя первый пункт аксиомы A15 к отрезкам $[Kf(X)]$ и $[f(X)\tilde{Y}]$, выводим $[K\tilde{Y}] \cong [AY]$. Затем применим этот же пункт аксиомы A15 к отрезкам $[K\tilde{Y}]$ и $[\tilde{Y}\tilde{C}]$, что дает $[K\tilde{C}] \cong [AC]$. Отсюда вытекает совпадение $\tilde{C} = M$, которое приводит к соотношению $[\tilde{Y}M] \cong [YC]$. А уже из этого соотношения вытекает совпадение точек $\tilde{Y} = f(Y)$.

Совпадения $\tilde{C} = M$ и $\tilde{Y} = f(Y)$ в силу проделанных построений дают $K \prec f(X) \prec f(Y) \prec M$, что доказывает первое утверждение теоремы $f(X) \prec f(Y)$. Второе утверждение теоремы $[f(X)f(Y)] \cong [XY]$ вытекает из $[f(X)\tilde{Y}] \cong [XY]$ и из совпадения точек $\tilde{Y} = f(Y)$.

Теперь рассмотрим случай, когда точки $X$ и $Y$ лежат на луче $[C, +\infty)$. Здесь из $X \prec Y$ получаем $A \prec C \prec X \prec Y$. Применим аксиому A13 к лучу, исходящему из точки $f(X)$ в направлении, противоположном лучу $[f(X)M]$. Отметим на нем точку $\tilde{Y}$, такую, что $[f(X)\tilde{Y}] \cong [XY]$. Затем применим пункт первый аксиомы A15 к отрезкам $[Mf(X)]$ и $[f(X)\tilde{Y}]$. Это

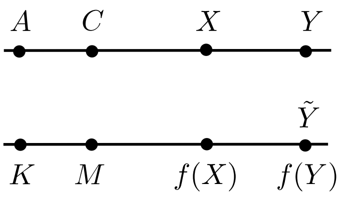



*Рис. 2.7*

дает $[M\tilde{Y}] \cong [CY]$, что, в свою очередь, приводит к совпадению точек $\tilde{Y}$ и $f(Y)$. Теперь соотношения $f(X) \prec f(Y)$ и $[f(X)f(Y)] \cong [XY]$ оказываются выполненными по построению точки $\tilde{Y}$.

Последний случай, когда точки $X$ и $Y$ попадают на луч $(-\infty, A]$ отдельного рассмотрения не требует. Он сводится ко второму, если одновременно поменять точки $A$ с $C$ и $K$ с $M$, а также сменить на противоположные выделенные направления на прямых $a$ и $b$. $\square$

## § 3. Конгруэнтное перенесение прямых.

Определение 3.1. Отображение $f : a \to b$ называется *конгруэнтным перенесением* прямой $a$ в прямую $b$, если для любых двух точек $X$ и $Y$ на прямой $a$ выполнено условие конгруэнтности отрезков $[f(X)f(Y)] \cong [XY]$.

Пусть $f$ и $h$ — два конгруэнтных перенесения прямой $a$ в прямую $b$. Если в каких-либо двух точках $A$ и $B$ на прямой $a$ эти отображения совпадают

$$f(A) = h(A), \qquad\qquad f(B) = h(B),$$

то они совпадают во всех точках $X \in a$, то есть $f = h$. Этот факт легко выводится из теоремы 2.1. Эта же теорема вместе с теоремой 2.2 показывают, что отображения конгруэнтного перенесения прямых существуют. Действительно, для задания такого отображения $f : a \to b$ достаточно выбрать две точки $A$ и $B$ на прямой $a$ и построить на второй прямой отрезок $[KM]$, конгруэнтный отрезку $[AB]$.

Пусть на прямой $a$ отмечена точка $O$ и выделено одно из двух возможных направлений. Это определяет разбиение прямой $a$ на два луча $[O, -\infty)$ и $[O, +\infty)$. Пусть на прямой $b$ также отмечена некоторая точка $Q$ и выделено направление, задающее ее разбиение на два луча $[Q, -\infty)$ и $[Q, +\infty)$. Выберем на луче $[O, +\infty)$ точку $E_+$ и, используя аксиому A13, построим на прямой $b$ отрезки $[QF_+]$ и $[QF_-]$, конгруэнтные отрезку $[OE_+]$. Отрезок $[QF_+]$ лежит на луче $[Q, +\infty)$, а отрезок $[QF_-]$ лежит на противоположном луче $[Q, -\infty)$. Наличие двух отрезков, конгруэнтных $[OE_+]$, определяет два отображения конгруэнтного переноса прямой $a$ на прямую $b$:

$$\begin{aligned} f^+(O) &= Q, & f^+(E_+) &= F_+, \\ f^-(O) &= Q, & f^-(E_+) &= F_-. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Для любой точки $O$ на прямой $a$ с выделенным направлением и для любой точки $Q$ на прямой $b$ с выделенным направлением существует ровно два отображения $f\colon a \to b$, осуществляющих конгруэнтный перенос прямой $a$ в прямую $b$. Первое из этих отображений $f^+_{OQ}$ сохраняет отношение предшествования, то есть из $X \prec Y$ вытекает $f^+_{OQ}(X) \prec f^+_{OQ}(Y)$. Второе отображение меняет отношение предшествования на противоположное, то есть из $X \prec Y$ вытекает $f^-_{OQ}(Y) \prec f^-_{OQ}(X)$.*

Упражнение 3.1. *Докажите теорему 3.1, показав, что отображения $f^+_{OQ}$ и $f^-_{OQ}$ не зависят от конкретного выбора точки $E_+ \in [O, +\infty)$ в определяющих формулах (3.1). Покажите также, что эти отображения останутся прежними при одновременной замене выделенных направлений на прямых $a$ и $b$ на противоположные.*

Пусть прямая $b$ совпадает с прямой $a$. Выберем на ней две точки $O$ и $Q$ и фиксируем одно из двух возможных направлений. В этом случае отображение $f^+_{OQ}$ называется *конгруэнтным переносом на вектор $\overrightarrow{OQ}$* и обозначается $f^+_{OQ} = p_{OQ}$. Случай совпадения $O = Q$ выделен особо. В этом случае точки $O$ и $Q$ не задают вектора (понимаемого как направленный отрезок), а отображение конгруэнтного переноса $p_{OO}$ оказывается тождественным: $p_{OO} = \mathrm{id}$. Отображение $f^-_{OQ}$ отлично от тождественного даже при совпадении точек $O$ и $Q$. При $O = Q$ отображение $f^-_{OO}$ называется *инверсией относительно точки* $O$. Оно обозначается так: $f^-_{OO} = i_O$.

Теорема 3.2. *Отображения конгруэнтного перенесения на вектор и отображения инверсии удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} &p_{BC} \circ p_{AB} = p_{AC}, && p_{AB} \circ i_C = i_C \circ p_{BA}, \\ &i_C \circ i_C = \mathrm{id}, && i_A \circ i_B = p_{BC}, \ \text{ где } \ C = i_A(B). \end{aligned}$$

Теорема 3.3. *Пусть на прямых $a$ и $b$ с выделенными направлениями заданы точки $O, \tilde{O} \in a$ и $Q, \tilde{Q} \in b$. Тогда*

$$f^+_{\tilde{O}\tilde{Q}} \circ = p_{Q\tilde{Q}} \circ f^+_{OQ} \circ p_{\tilde{O}O}, \qquad f^-_{\tilde{O}\tilde{Q}} = p_{Q\tilde{Q}} \circ f^-_{OQ} \circ p_{\tilde{O}O}.$$

**Примечание.** Кружочком в теоремах 3.2 и 3.3 обозначена операция композиции двух отображений: $f \circ h(x) = f(h(x))$ (see § 7 в первой главе).

Упражнение 3.2. *Опираясь на теоремы 2.1, 2.2 и 3.1, докажите свойства отображений конгруэнтного перенесения прямых, сформулированные в теоремах 3.2 и 3.3.*

Областью определения любого из рассмотренных выше отображений конгруэнтного перенесения является некоторая прямая. И у нас пока нет средств расширить эту область определения. Единственным исключением является отображение инверсии $i_O$. Пусть в пространстве выделена некоторая точка $O$. Для всякой точки $X$, отличной от $O$, существует единственная прямая $a = OX$, проходящая через $O$ и $X$. На ней определено отображение инверсии $i_O$. Положим $i(X) = i_O(X)$. Для самой точки $O$ положим $i(O) = O$. Тогда у нас получится отображение $i\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, которое называется *инверсией* или *центральной симметрией* с центром в точке $O$.

## § 4. Скользящие вектора. Сложение векторов на прямой.

Определение 4.1. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, называются *равными*, если они сонаправлены и если отрезок $[AB]$ конгруэнтен отрезку $[CD]$.

Равенство точек, прямых, плоскостей, отрезков и многих других геометрических объектов понимается как простое совпадение. Равенство векторов в силу определения 4.1 имеет совершенно другую природу.

Упражнение 4.1. *Убедитесь в том, что отношение равенства векторов на прямой есть отношение эквивалентности.*

Вектора, понимаемые как направленные отрезки, иногда называют *геометрическими векторами.* Они имеют жестко фиксированное положение в пространстве. В отличие от геометрических векторов, *скользящим вектором* на прямой называют класс эквивалентных друг другу векторов в смысле определения 4.1. Скользящий вектор имеет много представителей, лежащих на заданной прямой. Они называются *геометрическими реализациями* скользящего вектора.

Теорема 4.1. *Для любых четырех точек $A$, $B$, $C$ и $D$, лежащих на одной прямой, из $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ вытекает $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ и, наоборот, из $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ вытекает $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Док-во. Рассмотрим первое утверждение теоремы. Пусть дано, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Выберем направление вектора $\overrightarrow{AB}$ за положительное направление на прямой, где лежат вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$A \prec B, \qquad\qquad C \prec D. \tag{4.1}$$

Из (4.1) выводим полный список всевозможных расположений точек $A$, $B$, $C$ и $D$ друг относительно друга:

$$A \prec B \prec C \prec D, \qquad C \prec D \prec A \prec B, \tag{4.2}$$

$$A \prec C \prec B \prec D, \qquad C \prec A \prec D \prec B, \tag{4.3}$$

$$A \prec C \prec D \prec B, \qquad C \prec A \prec B \prec D. \tag{4.4}$$

Все перечисленные случаи (4.2), (4.3) и (4.4) разбиты на пары. Из каждой пары можно рассмотреть только один случай, поскольку второй получается из первого простой перестановкой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, которая не влияет на справедливость утверждения теоремы.

Покажем, что случай (4.4) невозможен. Он не совместим с условием $[AB] \cong [CD]$, вытекающим из $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Применив аксиому A13, выберем справа от точки $B$ точку $\tilde{D}$, такую, что $[B\tilde{D}] \cong [AC]$. Соединив это с $[CD] \cong [AB]$, из аксиомы A15 выводим конгруэнтность отрезков $[AD] \cong [A\tilde{D}]$. А это противоречит аксиоме A13, ибо точки $D$ и $\tilde{D}$ лежат на одном луче, выходящем из точки $A$. Полученное противоречие исключает из рассмотрения случай (4.4).


*Рис. 4.1*

Заметим, что первое утверждение теоремы для случая (4.3) эквивалентно второму утверждению теоремы для случая (4.2). Поэтому можно рассмотреть лишь случай $A \prec B \prec C \prec D$ и доказать для него оба утверждения теоремы. Сонаправленность векторов $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{BD}$ вытекает из выбранного расположения точек на прямой $A \prec B \prec C \prec D$. Из $[AB] \cong [CD]$ и очевидного соотношения $[BC] \cong [BC]$ в результате применения первого пункта


*Рис. 4.2*

аксиомы A15 выводим $[AC] \cong [BD]$. Обратно, из $[AC] \cong [BD]$ и $[BC] \cong [BC]$ после применения пункта (2) аксиомы A15 получаем $[AB] \cong [CD]$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.2. *Равенство $p_{AB} = p_{CD}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ в смысле определения 4.1.*

Док-во. Пусть $p_{AB}$ и $p_{CD}$ — два отображения конгруэнтного перенесения на прямой $a$ и пусть имеет место совпадение $p_{AB} = p_{CD} = p$. Зададим положительное направление на прямой $a$ вектором $\overrightarrow{AC}$ и, тем самым, определим отношение предшествования для точек прямой $a$. Тогда $A \prec C$. Применим отображение $p$ к точкам $A$ и $C$ и воспользуемся теоремой 2.2:

$$p(A) \prec p(C), \qquad\qquad [p(A)p(C)] \cong [AC].$$

Но $p(A) = p_{AB}(A) = B$ и $p(C) = p_{CD}(C) = D$. Отсюда $A \prec C$ и $B \prec D$, что означает сонаправленность векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Кроме того, $[BD] \cong [AC]$, следовательно, имеет место равенство $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Применив теорему 4.1, выводим требуемое равенство векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Пусть теперь, наоборот, задано равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, из которого в силу теоремы 4.1 выводим $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Значит, $[AC] \cong [BD]$ и из $A \prec C$ вытекает $B \prec D$. Применим отображение $p_{AB}$ к точке $C$ и обозначим $\tilde{D} = p_{AB}(C)$. Тогда по теореме 2.2 получаем $[AC] \cong [B\tilde{D}]$, причем из $A \prec C$ вытекает $B \prec \tilde{D}$. Из $[AC] \cong [B\tilde{D}]$ и $[AC] \cong [BD]$ выводим $[BD] \cong [B\tilde{D}]$, а из $B \prec D$ и $B \prec \tilde{D}$ заключаем, что точки $D$ и $\tilde{D}$ лежат на одном луче, исходящем из точки $B$. Следовательно, $D = \tilde{D}$, что вытекает из аксиомы A13. Теперь $D = p_{AB}(C)$, что и дает совпадение отображений $p_{AB} = p_{CD}$. $\square$

Теорема 4.3. *Любые два отображения конгруэнтного перенесения на прямой перестановочны: $p_{AB} \circ p_{CD} = p_{CD} \circ p_{AB}$.*

Док-во. Выберем некоторую произвольную точку $E$ на прямой $a$, где лежат вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Положим $F = p_{AB}(E)$, $G = p_{CD}(F)$ и $H = p_{CD}(E)$. Тогда

$$p_{AB} = p_{EF}, \qquad\qquad p_{CD} = p_{FG} = p_{EH}. \tag{4.5}$$

К последнему равенству $p_{FG} = p_{EH}$ в (4.5) применим предыдущую теорему 4.2. Она дает $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$. К полученному равенству векторов применим теорему 4.1, которая дает $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Отсюда $p_{EF} = p_{HG}$. Прямым вычислением выводим

$$\begin{aligned} &p_{CD} \circ p_{AB} = p_{FG} \circ p_{EF} = p_{EG},\\ &p_{AB} \circ p_{CD} = p_{HG} \circ p_{EH} = p_{EG}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь в (4.6) мы использовали теорему 3.2. Теперь остается лишь сравнить полученные формулы (4.6), что немедленно дает требуемый результат $p_{AB} \circ p_{CD} = p_{CD} \circ p_{AB}$. $\square$

Одно и то же отображение конгруэнтного перенесения на прямой можно задавать различными парами точек. Однако, теорема 4.2 показывает, что все такие пары точек соответствуют геометрическим векторам, равным в смысле определения 4.1. Поэтому, переходя от геометрических векторов к скользящим векторам, мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством отображений конгруэнтного перенесения и множеством скользящих векторов: $p = p_{\mathbf{a}}$.

Тождественное отображение id также является отображением конгруэнтного перенесения: $\mathrm{id} = p_{AA}$. Но одна точка $A$ не задает направленного отрезка. Специально для описания этой ситуации вводится понятие *нулевого вектора*. Нулевой вектор — это формальный объект, дополняющий множество скользящих векторов на прямой, такой, что $p_{\mathbf{0}} = \mathrm{id}$. Геометрической реализацией нулевого вектора можно считать любое одноточечное множество на прямой, трактуемое как «вырожденный» направленный отрезок $\overrightarrow{AA}$.

Множество отображений конгруэнтного перенесения оснащено естественной операцией композиции. Согласно теореме 3.2 композиция двух конгруэнтных перенесений есть конгруэнтное перенесение. Положим по определению

$$p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{b}} = p_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}. \tag{4.7}$$

Формула (4.7) служит определением операции сложения для скользящих векторов на прямой.

Теорема 4.4. *Операция сложения скользящих векторов обладает следующими свойствами:*

(1) *она коммутативна, то есть* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$*;*
(2) *она ассоциативна, то есть* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$*;*
(3) *существует вектор* $\mathbf{0}$, *такой, что* $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ *для всякого вектора* $\mathbf{a}$*;*
(4) *для всякого вектора* $\mathbf{a}$ *существует противоположный вектор* $\mathbf{a}'$, *такой, что* $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Первое свойство вытекает из теоремы 4.3. Свойство ассоциативности вытекает из формулы (4.7), поскольку свойство ассоциативности имеет место для операции композиции любых отображений. Третье свойство также вытекает из формулы (4.7) и определения нулевого вектора $p_{\mathbf{0}} = \mathrm{id}$. Остается доказать четвертое свойство. Пусть $\overrightarrow{AB}$ — геометрическая реализация для скользящего вектора $\mathbf{a}$. Обозначим через $\mathbf{a}'$ скользящий вектор, геометрической реализацией которого является вектор $\overrightarrow{BA}$. Тогда $p_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'} = p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{a}'} = p_{AB} \circ p_{BA} = p_{BB} = \mathrm{id} = p_{\mathbf{0}}$. Следовательно, $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$.

Сложение — это алгебраическая операция на множестве скользящих векторов. Множества, оснащенные различными алгебраическими операциями изучаются в курсе общей алгебры (см., например, [5]). Напомним определение группы — это множество с одной алгебраической операцией.

Определение 4.2. Множество $G$ называется *группой*, если всяким двум элементам $a$ и $b$ этого множества поставлен в соответствие третий элемент $a \cdot b$, называемый произведением элементов $a$ и $b$, причем выполнены следующие условия:

(1) умножение ассоциативно, то есть $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
(2) существует элемент $e \in G$, такой, что $e \cdot a = a \cdot e = a$ для всякого $a \in G$;
(3) для всякого элемента $a \in G$ существует элемент $a'$, такой, что $a \cdot a' = a' \cdot a = e$.

Элемент $e$ называется *единичным элементом* группы, а элемент $a'$ называется *обратным элементом* для элемента $a$.

Определение 4.3. Группа $G$ называется *коммутативной* (или *абелевой*), если операция умножения в ней коммутативна, то есть $a \cdot b = b \cdot a$.

Сравнение определений 4.2 и 4.3 со свойствами сложения векторов из теоремы 4.4 показывает, что множество скользящих векторов является абелевой группой по сложению. Знак умножения в ней заменен знаком плюс, а роль единичного элемента играет нулевой вектор.

## § 5. Конгруэнтность углов.

Пусть $h$ и $k$ — два луча, исходящие из одной точки и не лежащие на одной прямой. Выберем точку $A$ на луче $h$ и точку $B$ на луче $k$. Пусть точки $A$ и $B$ отличны от точки $O$. Применим к точкам $A$, $B$ и $O$ теорему 5.2 из второй главы и построим угол $\angle AOB$. Ясно, что этот угол не зависит от конкретного выбора точек $A$ и $B$ на лучах $h$ и $k$. Он определятся лишь самими лучами $h$ и $k$. Поэтому такой угол мы будем обозначать $\angle hOk$ или даже $\angle hk$.

Аксиома A16. *Всякий угол $\angle hk$ конгруэнтен самому себе, причем для всякой полуплоскости $a_+$ и всякого луча $m$, лежа-*

*щего на граничной прямой $a$, существует единственный луч $n$, лежащий в полуплоскости $a_+$ и такой, что $\angle hk \cong \angle mn$.*

Аксиома A17. *Пусть точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой и пусть точки $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ также не лежат на одной прямой. Если выполнены условия*

$$[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}], \qquad [AC] \cong [\tilde{A}\tilde{C}], \qquad \angle BAC \cong \angle \tilde{B}\tilde{A}\tilde{C},$$

*то тогда выполняются также еще два условия $\angle ABC \cong \angle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ и $\angle ACB \cong \angle \tilde{A}\tilde{C}\tilde{B}$.*

Аксиома A16 для углов аналогична аксиоме A13 для отрезков. Аксиому же A17 можно сформулировать так: если угол и образующие этот угол стороны одного треугольника конгруэнтны углу и соответствующим сторонам другого треугольника, то оставшиеся два угла в этих треугольниках также конгруэнтны. Определим понятие конгруэнтности треугольников.

Определение 5.1. Один треугольник называются конгруэнтным другому, если между вершинами треугольников имеется соответствие, такое, что углы при вершинах и стороны одного треугольника конгруэнтны соответствующим углам при вершинах и соответствующим сторонам другого треугольника.

Например, треугольник $ABC$ конгруэнтен другому треугольнику $FGH$, если выполнены следующие шесть условий:

$$\begin{array}{ccc} [AB] \cong [FG], & [BC] \cong [GH], & [CA] \cong [HF], \\ \angle ABC \cong \angle FGH, & \angle BCA \cong \angle GHF, & \angle CAB \cong \angle HFG. \end{array}$$

Теорема 5.1. *Если для треугольников $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ выполнены условия $[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}]$, $[AC] \cong [\tilde{A}\tilde{C}]$ и $\angle BAC \cong \angle \tilde{B}\tilde{A}\tilde{C}$, то треугольник $ABC$ конгруэнтен $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.*

Док-во. Конгруэнтность всех соответствующих углов и двух сторон в треугольниках $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ есть простое следствие аксиомы A17. Остается установить конгруэнтность сторон $[BC] \cong [\tilde{B}\tilde{C}]$. Пользуясь аксиомой A13, найдем на луче $[\tilde{B}\tilde{C}\rangle$ точку $C'$, такую, что $[BC] \cong [\tilde{B}C']$, и рассмотрим треугольник $\tilde{A}\tilde{B}C'$. Для него выполнены условия

$$[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}],$$
$$[BC] \cong [\tilde{B}C'],$$
$$\angle ABC \cong \angle\tilde{A}\tilde{B}C',$$

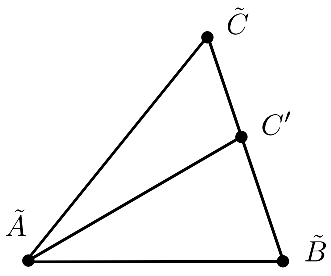



*Рис. 5.1*

которые позволяют применить аксиому A17 к углу $\angle\tilde{A}\tilde{B}C'$ и двум сторонам $[\tilde{A}\tilde{B}]$ и $[\tilde{B}C']$. Она дает $\angle BAC \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}C'$. Но, кроме того, по условию теоремы мы имеем $\angle BAC \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}\tilde{C}$. Поэтому, если допустить, что $\tilde{C} \neq C'$, то мы получим два луча $[\tilde{A}\tilde{C}\rangle$ и $[\tilde{A}C'\rangle$ в одной полуплоскости, ограниченной прямой $\tilde{A}\tilde{B}$, которые образуют с лучом $[\tilde{A}\tilde{B}\rangle$ углы, конгруэнтные углу $\angle BAC$. А это противоречит аксиоме A16, поэтому $\tilde{C} = C'$. И мы получаем требуемое $[BC] \cong [\tilde{B}\tilde{C}]$. Теорема доказана. □

Доказанную теорему 5.1 принято называть признаком конгруэнтности треугольников по двум сторонам и углу между ними. А следующую теорему называют признаком конгруэнтности треугольников по стороне и прилежащим к ней углам.

Теорема 5.2. *Если для треугольников $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ выполнены условия $[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}]$, $\angle ABC \cong \angle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ и $\angle BAC \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}\tilde{C}$, то треугольник $ABC$ конгруэнтен $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.*

Док-во. Применив аксиому A13, на луче $[\tilde{B}\tilde{C}\rangle$ построим точку $C'$, такую, что $[BC] \cong [\tilde{B}C']$. Тогда к треугольникам $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}C'$ применима предыдущая теорема 5.1. То есть треугольник $ABC$ оказывается конгруэнтным треугольнику $\tilde{A}\tilde{B}C'$, откуда $\angle BAC \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}C'$. Но по условию теоремы $\angle BAC \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}\tilde{C}$, и, если допустить, что $C' \neq \tilde{C}$, то в полуплоскости, ограниченной прямой $\tilde{A}\tilde{B}$, мы получим два луча $[\tilde{A}\tilde{C}\rangle$ и $[\tilde{A}C'\rangle$, которые образуют с лучом $[\tilde{A}\tilde{B}\rangle$ углы, конгруэнтные углу $\angle BAC$. Это не допускается аксиомой A16, следовательно, $C' = \tilde{C}$ и треугольник $ABC$ конгруэнтен $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. $\square$

Теорема 5.3. *Пусть $h$, $k$ и $l$ — три луча, исходящие из одной точки $O$ и лежащие в одной плоскости. Пусть далее $h'$, $k'$ и $l'$ — также три луча, исходящие из одной точки $O'$ и лежащие в одной плоскости. Тогда, если луч $l$ лежит внутри угла $\angle hk$ и если луч $l'$ лежит внутри угла $\angle h'k'$, то*

(1) *из $\angle hl \cong \angle h'l'$ и $\angle lk \cong \angle l'k'$ вытекает $\angle hk \cong \angle h'k'$;*
(2) *из $\angle hk \cong \angle h'k'$ и $\angle hl \cong \angle h'l'$ вытекает $\angle lk \cong \angle l'k'$;*
(3) *из $\angle hk \cong \angle h'k'$ и $\angle lk \cong \angle l'k'$ вытекает $\angle hl \cong \angle h'l'$.*

Док-во. Выберем точку $A$ на луче $h$ и точку $C$ на луче $k$. Соединим их отрезком $[AC]$ и применим лемму 6.2 из второй главы к лучу $l$, проходящему внутри угла $\angle AOC$. Обозначим через $B$ точку пересечения отрезка $[AC]$ с лучом $l$. Точка $B$ является внутренней точкой отрезка $[AC]$, поскольку луч $l$ отличен от лучей $h$ и $k$.

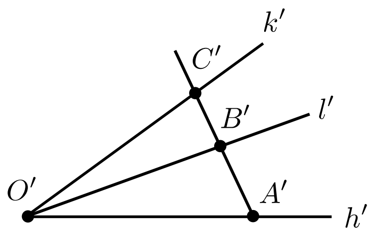


*Рис. 5.2*

Условие $\angle hl \cong \angle h'l'$ является общим в формулировке первого и второго утверждений теоремы. Применим его для следующих построений. Использовав аксиому A13, на луче $h'$ найдем точку $A'$, такую, что $[OA] \cong [O'A']$. Затем тем же способом на луче $l'$ найдем точку $B'$, такую, что $[OB] \cong [O'B']$. В силу условия $\angle hl \cong \angle h'l'$ мы можем применить теорему 5.1, из которой получим, что треугольник $AOB$ конгруэнтен треугольнику $A'O'B'$. Отсюда

$$[AB] \cong [A'B'], \qquad \angle OAB \cong \angle O'A'B'. \tag{5.1}$$

Точка $B'$ разделяет прямую $A'B'$ на два луча, один из которых — луч $[B'A'\rangle$. На противоположном луче выберем точку $C'$, такую, что $[BC] \cong [B'C']$. Применив первый пункт аксиомы A15 к отрезкам $[A'B']$ и $[B'C']$, получим $[AC] \cong [A'C']$. Из этого соотношения и из (5.1) в силу теоремы 5.1 заключаем, что треугольник $AOC$ конгруэнтен треугольнику $A'O'C'$. Следовательно, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &[OC] \cong [O'C'], \\ &\angle ACO \cong \angle A'C'O', \\ &\angle AOC \cong \angle A'O'C'. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Соединим первые два соотношения в (5.2) с $[BC] \cong [B'C']$. Применив в этой ситуации теорему 5.1, заключаем, что треугольник $BOC$ конгруэнтен треугольнику $B'O'C'$. Отсюда

$$\angle BOC \cong \angle B'O'C'. \tag{5.3}$$

Для доказательства первого утверждения теоремы 5.3 рассмотрим углы $\angle l'k'$ и $\angle B'O'C'$. Они лежат в одной полуплоскости, которая ограничена прямой $O'B'$, и имеют общую сторону. Для них из условия теоремы и из соотношения (5.3) имеем

$$\angle lk \cong \angle l'k', \qquad\qquad \angle lk \cong \angle B'O'C'.$$

Теперь применение аксиомы A16 доказывает совпадение лучей $[O'C'\rangle = k'$, в силу чего последнее соотношение (5.2) дает требуемый результат $\angle hk \cong h'k'$.

При доказательстве второго утверждения теоремы 5.3 выведем совпадение лучей $[O'C'\rangle = k'$ из рассмотрения углов $\angle h'k'$ и $\angle A'O'C'$, которые лежат в полуплоскости, ограниченной прямой $O'A'$, и имеют в качестве общей стороны луч $h'$. Действительно, из условия теоремы и из (5.2) для этих углов имеем:

$$\angle hk \cong \angle h'k', \qquad\qquad \angle hk \cong \angle A'O'C'.$$

Применив аксиому A16, находим $[O'C'\rangle = k'$. Теперь в силу совпадения лучей $[O'C'\rangle = k'$ из (5.3) выводим искомый результат для углов: $\angle lk \cong l'k'$.

Третий пункт теоремы 5.3 отдельного рассмотрения не требует. Он сводится ко второму после перестановки лучей $h$ и $k$ в первой тройке и лучей $h'$ и $k'$ во второй тройке. □

Определение 5.2. Треугольник $ABC$ называется *равнобедренным*, если какие-то две стороны в нем конгруэнтны. Например, $[AB] \cong [AC]$. Сторона $[BC]$ в этом случае называется *основанием* равнобедренного треугольника, а конгруэнтные стороны $[AB]$ и $[AC]$ — *боковыми* сторонами равнобедренного треугольника.

Теорема 5.4. *Углы при основании в равнобедренном треугольнике конгруэнтны.*

Док-во. Пусть $ABC$ — равнобедренный треугольник, в котором $[AB]$ и $[AC]$ — боковые стороны. Введем дублирующие обозначения для вершин этого треугольника: $\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = C$ и $\tilde{C} = B$. Тогда из $[AB] \cong [AC]$ и из аксиомы A16 имеем

$$[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}], \qquad [AC] \cong [\tilde{A}\tilde{C}], \qquad \angle BAC \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}\tilde{C}.$$

В этой ситуации применима аксиома A17. Применение этой аксиомы дает $\angle ABC \cong \angle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ и $\angle ACB \cong \angle\tilde{A}\tilde{C}\tilde{B}$. С учетом введенных обозначений это означает $\angle ABC \cong \angle ACB$ и $\angle ACB \cong \angle ABC$. Требуемая конгруэнтность углов при основании треугольника $ABC$ доказана. □

Лемма 5.1. *Пусть $ABC$ и $ADC$ — два треугольника с общей стороной $[AC]$, лежащие в одной плоскости по разные стороны от прямой $AC$. Тогда, если $[AB] \cong [AD]$ и $[CB] \cong [CD]$, то $\angle ABC \cong \angle ADC$ и $\angle ADC \cong \angle ABC$.*

Док-во. Точки $B$ и $D$ лежат по разные стороны от прямой $AC$, следовательно, отрезок $[BD]$ пересекает эту прямую в некоторой внутренней точке $S$. Возможны следующие пять вариантов расположения точки $S$ относительно точек $A$ и $C$:

(1) точка $A$ лежит между $S$ и $C$;
(2) точка $S$ совпадает с точкой $A$;
(3) точка $S$ лежит между $A$ и $C$;
(4) точка $S$ совпадает с точкой $C$;
(5) точка $C$ лежит между $A$ и $S$.

Первые три варианта расположения точек изображены на рисунках 5.3, 5.4 и 5.5. Четвертый вариант сводится ко второму, а пятый — к первому при перестановке точек $A$ и $C$. Поэтому отдельного рассмотрения эти варианты не требуют.

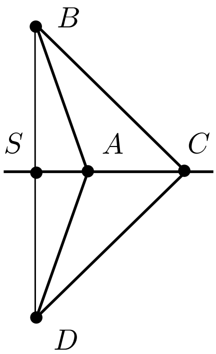



*Рис. 5.3*

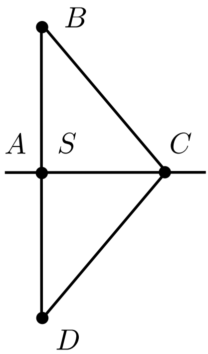



*Рис. 5.4*

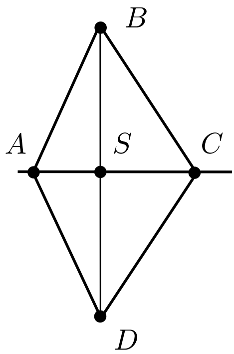



*Рис. 5.5*

Рассмотрим первый случай. Из $[AB] \cong [AD]$ и $[CB] \cong [CD]$ видим, что треугольники $BCD$ и $BAD$ равнобедренные. Поэтому $\angle SBC \cong \angle SDC$ и $\angle SBA \cong \angle SDA$. Луч $[BA\rangle$ лежит внутри угла $\angle SBC$, а луч $[DA\rangle$ — внутри угла $\angle SDC$. Следовательно, мы можем применить второй пункт теоремы 5.3, откуда получаем $\angle ABC \cong \angle ADC$. Второе соотношение $\angle ADC \cong \angle ABC$ выводится аналогично.

Во втором случае требуемые соотношения вытекают из равнобедренности треугольника $BCD$ на рисунке 5.4.

Наконец, рассмотрим третий случай. Здесь из $[AB] \cong [AD]$ и $[CB] \cong [CD]$ также следует равнобедренность треугольников $BCD$ и $BAD$, из чего получаем $\angle SBC \cong \angle SDC$ и $\angle SBA \cong \angle SDA$. Но далее вместо второго пункта работает первый пункт теоремы 5.3. Он дает $\angle ABC \cong \angle ADC$. Второе соотношение $\angle ADC \cong \angle ABC$ выводится аналогично. $\square$

Лемма 5.2. *Для всякого треугольника $ABC$ в плоскости этого треугольника имеется ровно одна точка $D$, отличная от $B$ и не лежащая на прямой $AC$, для которой выполнены условия $[AB] \cong [AD]$ и $[CB] \cong [CD]$.*

Док-во. Сначала докажем существование точки $D$. Обозначим через $h$ луч $[AC\rangle$, лежащий на прямой $AC$. Эта прямая разделяет плоскость $ABC$ на две полуплоскости. Треугольник $ABC$ лежит в одной из них. Применив аксиому A16, в другой полуплоскости проведем из точки $A$ луч $k$, такой, что $\angle CAB \cong hk$. Пользуясь аксиомой A13, на луче $k$ найдем точку $D$ из условия $[AB] \cong [AD]$. Тогда $\angle CAB \cong \angle CAD$ и треугольник $ABC$ оказывается конгруэнтен треугольнику $ADC$ по теореме 5.1. Отсюда $[CB] \cong [CD]$. Тем самым, искомая точка $D$ построена. Точки $B$ и $D$ лежат в разных полуплоскостях вне граничной прямой $AC$, поэтому $D \neq B$.

Докажем единственность точки $D$. Пусть $\tilde{D}$ — вторая точка, удовлетворяющая условиям леммы. По условию леммы точка $\tilde{D}$ не лежит на прямой $AC$, поэтому она лежит в одной из открытых полуплоскостей, определяемых этой прямой.

Рассмотрим ту из полуплоскостей, в которой лежит точка $D$. Из леммы 5.1 получаем $\angle ABC \cong \angle A\tilde{D}C$. Соединив это с $[AB] \cong [A\tilde{D}]$ и $[CB] \cong [C\tilde{D}]$, заключаем, что треугольник $ABC$ конгруэнтен $A\tilde{D}C$. Отсюда

$$\angle CAB \cong \angle CA\tilde{D}, \qquad \angle ACB \cong \angle AC\tilde{D}. \tag{5.4}$$

Аналогичный факт имеет место и для точки $D$:

$$\angle CAB \cong \angle CAD, \qquad \angle ACB \cong \angle ACD. \tag{5.5}$$

Он выводится из $[AB] \cong [AD]$ и $[CB] \cong [CD]$ в результате применения леммы 5.1. Сравнение (5.4) и (5.5) и применение аксиомы A13 доказывает совпадение лучей $[AD\rangle = [A\tilde{D}\rangle$ и $[CD\rangle = [C\tilde{D}\rangle$. Два не совпадающих луча $[AD\rangle$ и $[CD\rangle$ имеют единственную точку пересечения, поэтому $\tilde{D} = D$.

Если допустить, что точка $\tilde{D}$ лежит в той же полуплоскости, что и $B$, то мы получим $\tilde{D} = B$. Вывод этого факта почти дословно повторяет приведенные выше рассуждения с использованием леммы 5.1. Но $\tilde{D} = B$ не допускается условием леммы. Поэтому построенная выше точка $D$ единственна. $\square$

Теорема 5.5. *Если для треугольников $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ выполнены условия $[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}]$, $[AC] \cong [\tilde{A}\tilde{C}]$ и $[BC] \cong [\tilde{B}\tilde{C}]$, то треугольник $ABC$ конгруэнтен $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.*

Док-во. Обозначим через $\tilde{h}$ луч $[\tilde{A}\tilde{C}\rangle$. Прямая $\tilde{A}\tilde{C}$ разделяет плоскость второго треугольника на две полуплоскости. Треугольник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ лежит в одной из них.

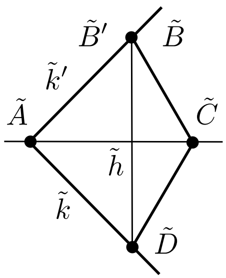



*Рис. 5.6*

Применив аксиому A16 к обеим полуплоскостям, проведем из точки $\tilde{A}$ два луча $\tilde{k}$ и $\tilde{k}'$, такие, что $\angle CAB \cong \angle\tilde{h}\tilde{k}$ и $\angle CAB \cong \angle\tilde{h}\tilde{k}'$. Луч $\tilde{k}'$ выберем лежащим в той же полуплоскости, что и треугольник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Луч $\tilde{k}$ лежит в противоположной полуплоскости. Применим к лучам $\tilde{k}$ и $\tilde{k}'$ аксиому A13 и построим точки $\tilde{D}$ и $\tilde{B}'$ из условий $[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{D}]$ и $[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}']$. По построению треугольник $ABC$ оказывается конгруэнтен треугольникам $\tilde{A}\tilde{B}'\tilde{C}$ и $\tilde{A}\tilde{D}\tilde{C}$. Это вытекает из теоремы 5.1, если учесть, что $[AC] \cong [\tilde{A}\tilde{C}]$. Отсюда для точек $\tilde{D}$ и $\tilde{B}'$ получаем

$$
\begin{aligned}
&[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}'], &\qquad &[CB] \cong [\tilde{C}\tilde{B}'],\\
&[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{D}], &\qquad &[CB] \cong [\tilde{C}\tilde{D}].
\end{aligned}
$$

По условию теоремы точно такие же соотношения выполнены для точки $\tilde{B}$, лежащей в той же полуплоскости, что и $\tilde{B}'$:

$$[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}], \qquad\qquad [CB] \cong [\tilde{C}\tilde{B}].$$

Лемма 5.2 дает совпадение $\tilde{B} = \tilde{B}'$. Следовательно, треугольник $ABC$ конгруэнтен треугольнику $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. $\square$

Доказанная теорема 5.5 известна как признак конгруэнтности треугольников по трем сторонам.

Теорема 5.6. *Бинарное отношение конгруэнтности углов рефлексивно, симметрично и транзитивно, и потому является отношением эквивалентности.*

Упражнение 5.1. *Свойство рефлексивности для отношения конгруэнтности углов включено в формулировку аксиомы A16. Докажите симметричность и транзитивность этого бинарного отношения при помощи теоремы 5.5.*

## § 6. Прямой угол и перпендикулярность.

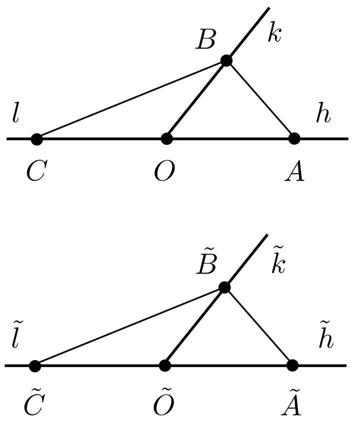



*Рис. 6.1*

Теорема 6.1. *Из конгруэнтности двух углов вытекает конгруэнтность соответствующих им смежных углов.*

Док-во. Пусть угол $\angle hk$ с вершиной в точке $O$ конгруэнтен углу $\angle\tilde{h}\tilde{k}$ с вершиной в точке $\tilde{O}$. Дополним луч $h$ лучом $l$ до целой прямой. Аналогичным образом дополним луч $\tilde{h}$ лучом $\tilde{l}$ до целой прямой. В результате этого получится два угла $\angle kl$ и $\angle\tilde{k}\tilde{l}$, конгруэнтность которых надо доказать. Выберем на лучах $h$, $k$ и $l$ точки $A$, $B$ и $C$ соответственно. После этого, применив аксиому A13, на лучах $\tilde{h}$, $\tilde{k}$ и $\tilde{l}$ отметим точки $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ так, чтобы выполнялись условия

$$[OA] \cong [\tilde{O}\tilde{A}], \qquad [OB] \cong [\tilde{O}\tilde{B}], \qquad [OC] \cong [\tilde{O}\tilde{C}]. \tag{6.1}$$

Из первых двух условий, дополненных условием $\angle hk \cong \angle\tilde{h}\tilde{k}$, вытекает конгруэнтность треугольников $AOB$ и $\tilde{A}\tilde{O}\tilde{B}$. Из этого извлекаем $[AB] \cong [\tilde{A}\tilde{B}]$ и $\angle BAO \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}\tilde{O}$. Кроме того, из первого и последнего условий (6.1) в силу аксиомы A15 вытекает $[AC] \cong [\tilde{A}\tilde{C}]$. Соединив полученные три условия, из теоремы 5.1 выводим конгруэнтность треугольников $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, что дает $[BC] \cong [\tilde{B}\tilde{C}]$. Теперь к треугольникам $BOC$ и $\tilde{B}\tilde{O}\tilde{C}$ применима теорема 5.5. Из нее вытекает конгруэнтность этих треугольников, что, в свою очередь, дает требуемое соотношение $\angle BOC \cong \angle\tilde{B}\tilde{O}\tilde{C}$. Теорема доказана. □

Теорема 6.2. *Вертикальные углы конгруэнтны.*

Доказательство этой теоремы очевидно. Вертикальные углы имеет общий смежный угол (см. Рис. 5.1 во второй главе). Поэтому в силу предыдущей теоремы эти углы конгруэнтны.

Определение 6.1. Угол называется *прямым*, если он конгруэнтен смежному с ним углу.

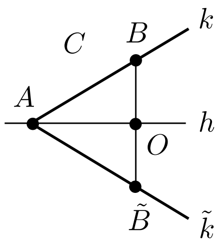



*Рис. 6.2*

Лемма 6.1. *Прямые углы существуют.*

Док-во. Пусть $\angle hk$ — произвольный угол, образованный лучами $h$ и $k$, выходящими из точки $A$. Если он прямой, то проблем нет — лемма доказана. Пусть он не прямой. Дополним луч $h$ до целой прямой, разделяющей плоскость угла на две полуплоскости. Угол $\angle hk$ лежит в одной из них. Пользуясь аксиомой A16, во второй полуплоскости из точки $A$ проведем луч $\tilde{k}$, такой, что $\angle hk \cong \angle h\tilde{k}$. Затем выберем на луче $k$ точку $B$ и, применив аксиому A13, найдем на луче $\tilde{k}$ точку $\tilde{B}$, такую, что $[AB] \cong [A\tilde{B}]$.

Точки $B$ и $\tilde{B}$ лежат по разные стороны прямой, содержащей луч $h$. Поэтому отрезок $[B\tilde{B}]$ пересекается с этой прямой в какой-то своей внутренней точке $O \neq A$. Углы $\angle AOB$ и $\angle AO\tilde{B}$ являются смежными. Они конгруэнтны в силу конгруэнтности треугольников $AOB$ и $AO\tilde{B}$, что вытекает из теоремы 5.1 в силу $[AB] \cong [A\tilde{B}]$ и $\angle OAB \cong \angle OA\tilde{B}$. Значит, углы $\angle AOB$ и $\angle AO\tilde{B}$ прямые. □

Лемма 6.2. *Все прямые углы конгруэнтны.*

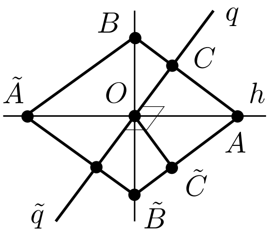



*Рис. 6.3*

Док-во. Для доказательства леммы достаточно показать, что все прямые углы конгруэнтны какому-то одному. Выберем в качестве такого эталонного угла прямой угол $\angle AOB$, построенный при доказательстве леммы 6.1. Дополним рисунок 6.2 еще одной точкой $\tilde{A}$, лежащей на прямой $OA$. Определим точку $\tilde{A}$ условием $[O\tilde{A}] \cong [OA]$. После чего проведем отрезки $[\tilde{A}B]$ и $[\tilde{A}\tilde{B}]$. В результате этого мы получим четыре прямых угла с общей вершиной в точке $O$.

Пусть $\angle h'q'$ — некоторый произвольный прямой угол. Прямая $A\tilde{A}$ разделяет плоскость рисунка 6.3 на две полуплоскости. В той из них, которая содержит точку $B$, проведем из точки $O$ луч $q$ так, чтобы угол $\angle hq$ был конгруэнтен углу $\angle h'q'$. Тогда угол $\angle hq$ также является прямым углом.

Докажем, что луч $q$ совпадает с лучом $[OB\rangle$. Если допустить, что это не так, то луч $q$ лежит внутри одного из углов $\angle AOB$ или $\angle \tilde{A}OB$. Пусть для определенности он лежит внутри угла $\angle AOB$ (второй случай сводится к этому простым переобозначением точек $A$ и $\tilde{A}$). Применив лемму 6.2 из второй главы к лучу $q$, получим, что он пересекает отрезок $[AB]$ в некоторой внутренней точке $C$. Дополним $q$ до целой прямой лучом $\tilde{q}$, лежащим внутри угла $\tilde{A}O\tilde{B}$. Затем выполним конгруэнтное перенесение $f$ прямой $AB$ в прямую $A\tilde{B}$, такое, что $f(A) = A$ и $f(B) = \tilde{B}$. Пусть $\tilde{C} = f(C)$. Тогда $\tilde{C}$ — внутренняя точка отрезка $[A\tilde{B}]$, причем $[A\tilde{C}] \cong [AC]$. Это соотношение вместе с $\angle OAB \cong \angle OA\tilde{B}$ дает конгруэнтность треугольников $AOC$ и $AO\tilde{C}$. Следовательно, угол $\angle AO\tilde{C}$ конгруэнтен углу $\angle AOC = \angle hk$. Угол $\angle h\tilde{q}$ является смежным для $\angle hq$, в силу чего $\angle h\tilde{q} \cong \angle hq$, ибо $\angle hq$ — прямой угол. Из $\angle AO\tilde{C} \cong \angle hq$ и $\angle h\tilde{q} \cong \angle hq$ вытекает совпадение лучей $[O\tilde{C}\rangle$ и $\tilde{q}$. Но это невозможно, ибо $[O\tilde{C}\rangle$ лежит внутри угла $\angle AO\tilde{B}$, а $\tilde{q}$ — внутри смежного с ним угла $\angle \tilde{A}O\tilde{B}$.

Полученное выше противоречие доказывает совпадение точек $C = B$ и совпадение лучей $q = [OB\rangle$. Следовательно, произвольный прямой угол $\angle h'q'$ конгруэнтен эталонному прямому углу $\angle AOB$. Лемма доказана. $\square$

Определение 6.2. Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если все четыре угла, образуемые ими в точке пересечения, являются прямыми.

Перпендикулярность прямых $a$ и $b$ обозначается так: $a \perp b$. В действительности, для того, чтобы прямые были перпендикулярны, достаточно, чтобы один из образованных ими углов был прямым. Тогда остальные тоже будут прямыми в силу теорем 6.1 и 6.2.

Теорема 6.3. *Пусть $a$ — некоторая прямая, лежащая в плоскости $\alpha$. Тогда через любую точку $A \in a$ можно провести ровно одну прямую $b$, лежащую в плоскости $\alpha$ и перпендикулярную прямой $a$.*

Теорема 6.4. *Через любую точку плоскости можно провести не более двух прямых, перпендикулярных друг другу.*

Теоремы 6.3 и 6.4 легко выводятся из лемм 6.1 и 6.2. Теорема 6.4 свидетельствует о том, что плоскость двумерна.

Пусть $a$ — некоторая прямая и $B$ — некоторая точка вне этой прямой. Отрезок $[BA]$, соединяющий точку $B$ с точкой $A \in a$, называется *перпендикуляром*, опущенным из $B$ на прямую $a$, если прямая $AB$ перпендикулярна прямой $a$.

Теорема 6.5. *Из любой точки $B \notin a$ можно опустить ровно один перпендикуляр на прямую $a$.*

Док-во. Докажем существование перпендикуляра, опущенного из точки $B$ на прямую $a$. Проведем плоскость $\alpha$ через эту прямую и точку $B$. Выберем на прямой некоторую точку $O$. Если $OB \perp a$, то искомый перпендикуляр построен. Если же это не так, рассмотрим два луча, на которые точка $O$ разбивает прямую $a$. Обозначим один из них через $h$ и положим $k = [OB\rangle$. Угол $\angle hk$ лежит в одной из полуплоскостей, на которые прямая $a$ разделяет плоскость $\alpha$. В другой полуплоскости из точки $O$ проведем луч $\tilde{k}$, такой, что $\angle h\tilde{k} \cong \angle hk$. Выберем на нем точку $\tilde{B}$, удовлетворяющую условию $[O\tilde{B}] \cong [OB]$. Тогда отрезок $[B\tilde{B}]$ пересечет прямую $a$ в некоторой своей внутренней точке $A$, а треугольники $OAB$ и $OA\tilde{B}$ будут конгруэнтны. Отсюда угол $\angle OAB$, конгруэнтный смежному с ним углу $\angle OA\tilde{B}$, будет прямым. Следовательно, $[BA]$ — искомый перпендикуляр.

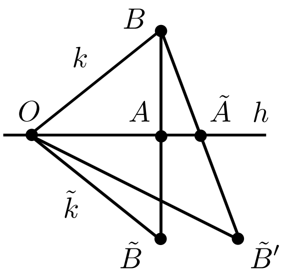



*Рис. 6.4*

Теперь докажем единственность перпендикуляра, опущенного из точки $B$ на прямую $a$. Допустим, что он не единственен, и рассмотрим два перпендикуляра $[BA]$ и $[B\tilde{A}]$. Проведем плоскость $\alpha$ через точку $B$ и прямую $a$. Отметим на прямой $a$ некоторую точку $O$, лежащую вне отрезка $[A\tilde{A}]$ и обозначим через $h$ луч $[OA\rangle = [O\tilde{A}\rangle$. Отметим на прямых $AB$ и $\tilde{A}B$, точки $\tilde{B}$ и $\tilde{B}'$, отличные от точки $B$ и удовлетворяющие условиям $[AB] \cong [A\tilde{B}]$ и $[\tilde{A}B] \cong [\tilde{A}\tilde{B}']$. Заметим далее, что прямой угол $\angle OAB$ конгруэнтен смежному с ним углу $\angle OA\tilde{B}$, а прямой угол $\angle O\tilde{A}B$ конгруэнтен углу $\angle O\tilde{A}\tilde{B}'$. Отсюда выводим конгруэнтность треугольников $OAB$ и $OA\tilde{B}$, а также конгруэнтность треугольников $O\tilde{A}B$ и $O\tilde{A}\tilde{B}'$. Поэтому

$$\begin{aligned} \angle AO\tilde{B} &\cong \angle AOB, & \qquad \angle AO\tilde{B}' &\cong \angle AOB, \\ [O\tilde{B}] &\cong [OB], & \qquad [O\tilde{B}'] &\cong [OB]. \end{aligned}$$

Первая пара полученных соотношений дает совпадение лучей $[O\tilde{B}\rangle = [O\tilde{B}'\rangle$, после чего из второй пары вытекает совпадение точек $\tilde{B} = \tilde{B}'$. Отсюда $A = \tilde{A}$ и $[BA] = [B\tilde{A}]$. $\square$

Теорема 6.6. *В треугольнике $ABC$ не может быть двух прямых углов.*

Упражнение 6.1. *Докажите теоремы 6.3 и 6.4, основываясь на леммах 6.1 и 6.2.*

Упражнение 6.2. *Выведите теорему 6.6 из теоремы 6.5.*

## § 7. Деление углов и отрезков пополам.

Определение 7.1. Точка $O$ называется *серединой* отрезка $[AB]$, если она лежит внутри этого отрезка и $[AO] \cong [OB]$.

Определение 7.2. Пусть $\angle hk$ — угол с вершиной в точке $O$. Луч $l$, выходящий из точки $O$, называется *биссектрисой* угла $\angle hk$, если он лежит внутри этого угла и $\angle hl \cong \angle lk$.

Определение 7.3. Отрезок $[AO]$, соединяющий вершину $A$ треугольника $ABC$ с точкой $O$ на прямой $BC$, называется *высотой* этого треугольника, если прямые $AO$ и $BC$ перпендикулярны.

Определение 7.4. Отрезок $[AO]$, соединяющий вершину $A$ треугольника $ABC$ с серединой стороны $[BC]$, называется *медианой* этого треугольника.

Теорема 7.1. *В равнобедренном треугольнике $ABC$ медиана $AO$, проведенная из вершины $A$ к середине основания, является одновременно высотой и биссектрисой угла $\angle BAC$.*

Доказательство теоремы 7.1 достаточно простое — при условии, что медиана треугольника $ABC$ уже проведена. Вопрос же о существовании медианы этой теоремой вообще не затрагивается.

Теорема 7.2. *Для всякого отрезка $[AB]$ существует точка $O$, являющаяся его серединой.*

Док-во. Пусть задан отрезок $[AB]$. Рассмотрим некоторую плоскость $\alpha$, содержащую в себе прямую $AB$. Пользуясь теоремой 6.3, проведем в плоскости $\alpha$ через $A$ и $B$ прямые, перпендикулярные прямой $AB$. Эти прямые не пересекаются, так как, если бы они пересеклись в точке $M$, то треугольник $ABM$ имел бы два прямых угла. Выберем на прямой, проходящей через точку $A$, некоторую точку $C$ и отложим на прямой, проходящей через точку $B$, отрезок $[BD] \cong [AC]$ так, чтобы точки $C$ и $D$ лежали в разных полуплоскостях, разделяемых прямой $AB$. Тогда отрезок $[CD]$ пересекает прямую $AB$ в некоторой своей внутренней точке $O$.

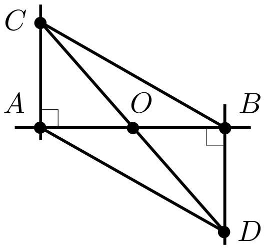



*Рис. 6.5*

Рассмотрим треугольник $BOD$ и прямую $AC$. Прямая $AC$ не может пересечь сторону $[BD]$ в этом треугольнике, ибо прямые $AC$ и $BD$ вообще не имеют общих точек. Прямая $AC$ пересекает прямую $OD$ в точке $C$, внешней для отрезка $[OD]$. Следовательно, и третью сторону $[OB]$ в треугольнике $BOD$ прямая $AC$ не может пересечь во внутренней точке (см. аксиому Паша A12). Это исключает возможность $(O \blacktriangleright A \blacktriangleleft B)$. Вторая возможность $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft O)$ исключается в результате рассмотрения прямой $BD$ и треугольника $AOC$. Значит, остается третий вариант $(A \blacktriangleright O \blacktriangleleft B)$, в силу чего точка $O$ есть внутренняя точка отрезка $[AB]$.

Далее рассмотрим треугольники $ABC$ и $BAD$. Они конгруэнтны по теореме 5.1 в силу $\angle BAC \cong \angle ABD$ и $[AC] \cong [BD]$. Из этого извлекаем $[AD] \cong [BC]$ и $\angle ABC \cong \angle BAD$. Далее в силу пункта (1) теоремы 5.3, получаем $\angle CBD \cong \angle DAC$, что дает конгруэнтность треугольников $CBD$ и $DAC$. Отсюда

$$\angle DCB \cong \angle CDA, \qquad\qquad \angle CDB \cong \angle DCA.$$

Из полученных двух соотношений по теореме 5.2 выводим, что треугольник $AOC$ конгруэнтен треугольнику $BOD$, а треугольник $COB$ конгруэнтен треугольнику $DOA$. Поэтому

$$[AO] \cong [OB], \qquad\qquad [CO] \cong [OD].$$

То есть точка $O$ является искомой серединой для отрезка $[AB]$ и, одновременно, серединой для отрезка $[CD]$. $\square$

Теорема 7.2 в сочетании с теоремой 7.1 определяет алгоритм деления углов пополам. Действительно, пусть задан угол $\angle hk$ с вершиной в точке $O$. Выберем на сторонах этого угла точки $A$ и $B$, такие, что $[OA] \cong [OB]$. Тогда, поделив основание $[AB]$ равнобедренного треугольника $AOB$ пополам точкой $C$, мы найдем его медиану, являющуюся биссектрисой угла $\angle AOB$. То есть имеет место следующая теорема.

Теорема 7.3. *Для всякого угла $\angle hk$ существует луч $l$, являющийся биссектрисой этого угла.*

Теорема 7.4. *Середина любого отрезка единственна.*

Теорема 7.5. *В любом угле есть ровно одна биссектриса.*

Упражнение 7.1. *Исходя из теоремы 2.1 докажите теорему 7.4 для отрезка $[AB]$. То есть покажите, что на прямой $AB$ есть ровно одна точка $O$, удовлетворяющая условию $[AO] \cong [OB]$. Затем из теоремы 7.4 выведите теорему 7.5.*

## § 8. Пересечение двух прямых третьей.

Рассмотрим три прямые $a$, $b$ и $c$, лежащие на одной плоскости. Пусть прямая $c$ пересекает прямые $a$ и $b$ в точках $A$ и $B$ соответственно. При этом в точке $A$ возникает четыре угла. Еще четыре угла возникает в точке $B$. Углы $\angle CAB$ и $\angle ABD$ имеют в качестве сторон противоположно направленные лучи $[AB\rangle$ и $[BA\rangle$, лежащие на одной прямой $c$ и пересекающиеся по отрезку $[AB]$. При этом сами углы $\angle CAB$ и $\angle ABD$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $c$. Такие углы называются *внутренними накрест лежащими* углами. Кроме углов $\angle CAB$ и $\angle ABD$, в пересечении прямых $a$ и $b$ прямой $c$ возникает еще одна пара внутренних накрест лежащих углов — это углы $\angle EAB$ и $\angle ABF$. При этом угол $\angle EAB$ является смежным углу $\angle CAB$, а угол $\angle ABF$ является смежным углу $\angle ABD$.

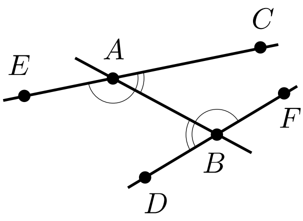



*Рис. 8.1*

Определение 8.1. Прямые $a$ и $b$ называются *параллельными*, если они совпадают $a = b$, либо если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Отношение параллельности двух прямых является рефлексивным и симметричным по определению. Оно обозначается так: $a \parallel b$. Доказательство транзитивности этого бинарного отношения в геометрии Евклида требует привлечения дополнительной аксиомы A20, которую мы еще не рассматривали.

Теорема 8.1. *Пусть прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости и пересекаются с третьей прямой $c$ в точках $A$ и $B$. Если внутренние накрест лежащие углы, возникающие в точках $A$ и $B$, конгруэнтны, то прямые $a$ и $b$ параллельны.*

Док-во. Отметим, что достаточно потребовать конгруэнтности одной пары внутренних накрест лежащих углов, например,

$\angle EAB \cong \angle ABF$. При этом соотношение $\angle CAB \cong \angle ABD$ будет вытекать из теоремы 6.1.

Докажем теорему методом от противного. Предположим, что углы $\angle EAB$ и $\angle ABF$ конгруэнтны, но при этом прямые $a$ и $b$ не параллельны. Тогда они пересекаются. Для определенности можем считать точки $C$ и $F$ совпадающими с точкой пересечения прямых $a$ и $b$. Точку $E$ будем считать выбранной так, что $[AE] \cong [BF]$. Такой выбор возможен в силу аксиомы A13. Соединим точку $E$ с точкой $B$ отрезком $[EB]$ и рассмотрим треугольники $EAB$ и $ABF$. Из условия теоремы и из сделанных дополнительных построений имеем

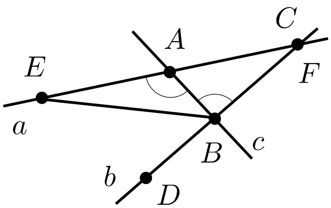



*Рис. 8.2*

$$[AE] \cong [BF], \qquad [AB] \cong [BA], \qquad \angle EAB \cong \angle ABF.$$

Применив теорему 5.1 к этим соотношениям, получаем конгруэнтность треугольников $EAB$ и $ABF$. Это сразу же дает $\angle EBA \cong \angle BAC$. Но $\angle BAC \cong \angle ABD$, что, как мы уже отмечали выше, вытекает из $\angle EAB \cong \angle ABF$. Следовательно, $\angle EBA \cong \angle DBA$. Отсюда в силу аксиомы A16 получаем совпадение лучей $[BE\rangle$ и $[BD\rangle$. Значит, точка $E$ должна лежать на прямой $b$, что невозможно, если прямые $a$ и $b$ не совпадают. Полученное противоречие показывает, что прямые $a$ и $b$ не могут пересекаться, следовательно, они параллельны. □

Теорема 8.2. *Любые два перпендикуляра к одной прямой, лежащие в одной плоскости, параллельны.*

Упражнение 8.1. *Выведите теорему 8.2 из теоремы 8.1.*

ГЛАВА IV

# КОНГРУЭНТНЫЕ ПЕРЕНОСЫ И ДВИЖЕНИЯ.

## § 1. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение 1.1. Пусть прямая $a$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$. Говорят, что прямая $a$ *перпендикулярна* плоскости $\alpha$, если она перпендикулярна всем прямым, лежащим в плоскости $\alpha$ и проходящим через точку $O$.

Теорема 1.1. *Прямая $a$, пересекающая плоскость $\alpha$ в точке $O$, перпендикулярна этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна каким-либо двум прямым, лежащим в плоскости $\alpha$ и проходящим через точку $O$.*

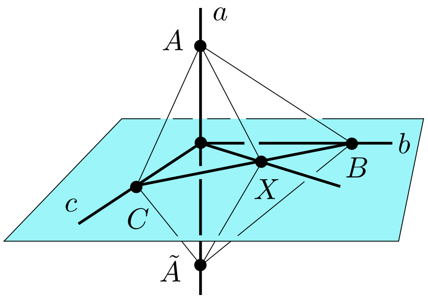



*Рис. 1.1*

Док-во. Необходимость утверждения теоремы очевидна: если прямая $a$ перпендикулярна плоскости $\alpha$, то она перпендикулярна всем прямым на плоскости, проходящим через точку $O$, в том числе и каким-либо двум выделенным.

Докажем теперь достаточность утверждения теоремы. Пусть прямая $a$ перпендикулярна двум прямым $b$ и $c$, лежащим в плоскости $\alpha$ и пересекающимся в точке $O$. Рассмотрим некоторую произвольную прямую $x$, лежащую в плоскости $\alpha$ и проходящую через точку $O$. Прямая $x$ разбивается точкой $O$ на два луча. Рассмотрим один из таких лучей $[O,+\infty)$, который лежит внутри одного из четырех углов, образованных прямыми $a$ и $b$ в точке пересечения $O$. Отметим на сторонах угла точки $B$ и $C$ и соединим их отрезком $[BC]$. Согласно лемме 6.2 из второй главы, луч $[O,+\infty)$ пересекает отрезок $[BC]$ в некоторой внутренней точке $X$.

Отметим на прямой $a$ некоторую произвольную точку $A$, отличную от $O$, и, пользуясь аксиомой A13, на луче, противоположном $[OA\rangle$, построим точку $\tilde{A}$, такую, что $[O\tilde{A}]\cong[OA]$. Из перпендикулярности $a\perp b$ заключаем, что углы $\angle AOB$ и $\angle\tilde{A}OB$ прямые. Они конгруэнтны $\angle AOB\cong\angle\tilde{A}OB$. Кроме того, $[OB]\cong[OB]$. Из полученных трех соотношений

$$[OA]\cong[O\tilde{A}],\qquad [OB]\cong[OB],\qquad \angle AOB\cong\angle\tilde{A}OB$$

вытекает конгруэнтность треугольников $AOB$ и $\tilde{A}OB$. Отсюда $[AB]\cong[\tilde{A}B]$. Аналогичным образом из перпендикулярности $a\perp c$ выводится конгруэнтность отрезков $[AC]\cong[\tilde{A}C]$. Дополним полученные два соотношения еще одним:

$$[AB]\cong[\tilde{A}B],\qquad [AC]\cong[\tilde{A}C],\qquad [BC]\cong[BC].$$

Теперь из этих трех соотношений вытекает конгруэнтность треугольников $ABC$ и $\tilde{A}BC$, откуда $\angle ABC\cong\angle\tilde{A}BC$.

Рассмотрим треугольники $ABX$ и $\tilde{A}BX$. Для их сторон и углов имеют место следующие соотношения:

$$[AB]\cong[\tilde{A}B],\qquad [BX]\cong[BX],\qquad \angle ABX\cong\angle\tilde{A}BX.$$

Из этих трех соотношений вытекает конгруэнтность рассматриваемых треугольников $ABX$ и $\tilde{A}BX$. Следовательно, для отрезков $[AX]$ и $[\tilde{A}X]$ имеем $[AX]\cong[\tilde{A}X]$. То есть треугольник $AX\tilde{A}$ является равнобедренным, а отрезок $[OX]$ есть медиана в нем, ибо $O$ — середина отрезка $[A\tilde{A}]$ по построению точек $A$ и $\tilde{A}$.

Теперь остается лишь применить теорему 7.1 из третьей главы. Согласно этой теореме медиана $[OX]$ в равнобедренном треугольнике $AX\tilde{A}$ является одновременно его высотой. Поэтому $a \perp x$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 1.2. *Через произвольную точку $O$ на заданной прямой $a$ проходит ровно одна плоскость $\alpha$, перпендикулярная прямой $a$.*

Док-во. Докажем сначала существование требуемой плоскости $\alpha$, после чего докажем ее единственность. Выберем точку $B$, не лежащую на прямой $a$, и проведем через прямую $a$ и точку $B$ плоскость $\beta$. К плоскости $\beta$, к прямой $a$ и к точке $O$ на ней можно применить теорему 6.3 из третьей главы. Это определяет прямую $b$ в плоскости $\beta$, проходящую через точку $O$ и перпендикулярную прямой $a$.

Далее выберем точку $C$, не лежащую в плоскости $\beta$. Через точку $C$ и прямую $a$ проведем плоскость $\gamma$. Ясно, что плоскости $\beta$ и $\gamma$ различны, прямая $a$ есть пересечение этих плоскостей. Применив теорему 6.3 из третьей главы к плоскости $\gamma$, к прямой $a$ и к точке $O$, получим прямую $c$, лежащую в плоскости $\gamma$, проходящую через точку $O$ и перпендикулярную прямой $a$.

Прямые $b$ и $c$ лежат в разных плоскостях $\beta$ и $\gamma$ и проходят через точку $O$. Это две не совпадающие прямые, пересекающиеся в точке $O$. Через такие прямые можно провести плоскость $\alpha$ (см. теорему 1.5 из второй главы). Но $a \perp b$ и $a \perp c$ по построению. Поэтому согласно доказанной выше теореме 1.1 имеем $a \perp \alpha$. Искомая плоскость $\alpha$ построена.

Докажем единственность построенной плоскости $\alpha$. Для этого допустим, что имеется еще одна плоскость $\tilde{\alpha} \perp a$, проходящая через точку $O$. Плоскости $\alpha$ и $\tilde{\alpha}$ различны, но имеют общую точку $O$. Поэтому они пересекаются по некоторой прямой $b$, которая проходит через точку $O$. В силу перпендикулярности $\alpha \perp a$ имеем $b \perp a$.

Перпендикулярные прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $O$. Через такую пару прямых можно провести плоскость, обозначим ее $\beta$. Выберем точку $C$, не лежащую в плоскости $\beta$, и проведем через точку $C$ и прямую $a$ плоскость $\gamma$. Заметим, что плоскость $\gamma$ отлична от $\alpha$ и $\tilde{\alpha}$. Это вытекает из того, что плоскость $\gamma$ пересекается с прямой $b$ в точке $O$, а плоскости $\alpha$ и $\tilde{\alpha}$ содержат прямую $b$ целиком. В пересечении $\gamma$ с плоскостями $\alpha$ и $\tilde{\alpha}$ мы получим две прямые $c$ и $\tilde{c}$. Прямые $c$ и $\tilde{c}$ лежат в плоскости $\gamma$ и проходят через точку $O$. Из $\alpha \perp a$ и $\tilde{\alpha} \perp a$ для них выводим $c \perp a$ и $\tilde{c} \perp a$. Если $c \neq \tilde{c}$, то в плоскости $\gamma$ мы имеем два перпендикуляра к прямой $a$, проведенные в точке $O \in a$. А это противоречит теореме 6.3 из третьей главы. Следовательно, $c = \tilde{c}$, откуда легко выводим $\alpha = \tilde{\alpha}$. Единственность плоскости $\alpha$ доказана. $\square$

Теорема 1.3. *Через произвольную точку $O$ на заданной плоскости $\alpha$ проходит ровно одна прямая $a$, перпендикулярная плоскости $\alpha$.*

Док-во. Докажем сначала существование требуемой прямой. Выберем в плоскости $\alpha$ некоторую произвольную точку $B$, отличную от $O$, и проведем прямую $OB$. Обозначим эту прямую через $b$. Применим к прямой $b$ и к точке $O$ доказанную выше теорему 1.2. Это определяет плоскость $\gamma$, проходящую через точку $O$ и перпендикулярную прямой $b$. В пересечении плоскостей $\alpha$ и $\gamma$ получается прямая $c$, проходящая через точку $O$. К плоскости $\gamma$, к прямой $c$ и к точке $O$ применим теорему 6.3 из третьей главы. В результате этого получим прямую $a$, лежащую в плоскости $\gamma$, проходящую через точку $O$ и перпендикулярную прямой $c$. Из $a \subset \gamma$ и $\gamma \perp b$ выводим $a \perp b$. Таким образом, для построенной прямой $a$ имеем

$$a \perp b, \qquad\qquad a \perp c.$$

То есть прямая $a$ проходит через точку $O$ и перпендикулярна двум прямым $b$ и $c$, лежащим в плоскости $\alpha$ и пересекающимся в точке $O$. Согласно теореме 1.1 прямая $a$ перпендикулярна плоскости $\alpha$. Существование искомой прямой $a$ доказано.

Остается доказать единственность построенной прямой. Допустим, что имеется вторая прямая $\tilde{a}$, проходящая через точку $O$ и перпендикулярная плоскости $\alpha$. Если $a \neq \tilde{a}$, то пара пересекающихся в точке $O$ прямых $a$ и $\tilde{a}$ задает плоскость $\beta$. В пересечении плоскостей $\alpha$ и $\beta$ мы получим прямую $b$, проходящую через точку $O$. Из $b \subset \alpha$ и из $a \perp \alpha$ и $\tilde{a} \perp \alpha$ заключаем, что в плоскости $\beta$ к прямой $b$ в точке $O \in b$ проведены два перпендикуляра $a$ и $\tilde{a}$. Но это противоречит теореме 6.3 из третьей главы. Полученное противоречие доказывает совпадение прямых $a = \tilde{a}$ и, тем самым, доказывает единственность искомой прямой $a$. $\square$

Теорема 1.4. *Пусть прямая $b$ пересекает прямую $a$ в точке $O$. Прямая $b$ перпендикулярна прямой $a$ тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости $\alpha$, проходящей через точку $O$ и перпендикулярной прямой $a$.*

Теорема 1.5. *Плоскость $\alpha$, проходящая через точку $O$ на прямой $a$ и перпендикулярная этой прямой, есть объединение всевозможных прямых, проходящих через точку $O$ и перпендикулярных прямой $a$.*

Упражнение 1.1. *Постройте чертежи, иллюстрирующие доказательство теорем 1.2 и 1.3.*

Упражнение 1.2. *Докажите теоремы 1.4 и 1.5.*

## § 2. Серединный перпендикуляр отрезка и плоскость серединных перпендикуляров.

Определение 2.1. Прямая $a$, проходящая через середину отрезка $[AB]$ и перпендикулярная ему, называется *серединным перпендикуляром* этого отрезка.

Пусть $O$ — середина отрезка $[AB]$ и пусть $M$ — некоторая точка на его серединном перпендикуляре $a$, отличная от точки

$O$. Тогда из $[AO] \cong [BO]$ и $[OM] \cong [OM]$ вытекает конгруэнтность прямоугольных треугольников $AOM$ и $BOM$, откуда получаем $[AM] \cong [BM]$.

Пусть, наоборот, $[AM] \cong [BM]$. Тогда треугольник $AMB$ является равнобедренным, а его медиана $[MO]$ является одновременно и его высотой (см. теорему 7.1 из третьей главы). Следовательно, прямая $AM$ есть серединный перпендикуляр для отрезка $[AB]$. *Вывод*: точка $M$ удовлетворяет соотношению $[AM] \cong [BM]$ тогда и только тогда, когда она лежит на каком-либо из серединных перпендикуляров отрезка $[AB]$.

Рассмотрим множество всех серединных перпендикуляров заданного отрезка $[AB]$. Это множество всевозможных прямых, перпендикулярных прямой $AB$ и проходящих через точку $O$. Согласно теореме 1.5 такое множество есть плоскость, проходящая через точку $O$ и перпендикулярная отрезку $[AB]$. Такая плоскость называется *плоскостью серединных перпендикуляров* отрезка $[AB]$. В результате мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Для любых двух точек $A$ и $B$ точка $M$ удовлетворяет соотношению $[AM] \cong [BM]$ тогда и только тогда, когда эта точка лежит в плоскости серединных перпендикуляров отрезка $[AB]$.*

## § 3. Перпендикулярность двух плоскостей.

Лемма 3.1. *Пусть плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют общую точку $O$. Тогда, если плоскость $\beta$ содержит перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный из точки $O$, то плоскость $\alpha$ содержит перпендикуляр к плоскости $\beta$ проведенный из точки $O$.*

Док-во. Пусть прямая $a$ есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный из точки $O$, а прямая $b$ — соответствующий перпендикуляр к плоскости $\beta$. Обозначим через $c$ пересечение плоскостей $\alpha$ и $\beta$. По условию леммы $a \subset \beta$. Значит, $b \perp a$ и

$b \perp c$. Кроме того, $a \perp c$, ибо прямая $c$ лежит в плоскости $\alpha$, а прямая $a$ есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$.

Через пересекающиеся в точке $O$ прямые $b$ и $c$ проходит некоторая плоскость $\gamma$. Из $a \perp b$ и $a \perp c$ в силу теоремы 1.1 получаем $a \perp \gamma$. Но через точку $O$ проходит только одна плоскость, перпендикулярная прямой $a$. Поэтому плоскость $\gamma$ обязана совпасть с $\alpha$. Отсюда получаем $b \subset \alpha$, что и требовалось доказать. $\square$

Определение 3.1. Пусть плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют общую точку $O$. Говорят, что плоскость $\alpha$ *перпендикулярна плоскости* $\beta$ *в точке* $O$, если она содержит перпендикуляр к плоскости $\beta$, проведенный из точки $O$.

Доказанная выше лемма 3.1 показывает, что отношение перпендикулярности плоскостей в точке симметрично, то есть из $\alpha \perp \beta$ вытекает $\beta \perp \alpha$.

Теорема 3.1. *Пусть плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по прямой $c$. Тогда, если плоскость $\beta$ перпендикулярна плоскости $\alpha$ в некоторой точке $A \in c$, то плоскость $\beta$ перпендикулярна плоскости $\alpha$ и в любой другой точке $B$ на прямой $c$.*

Док-во. Обозначим через $a$ и $b$ перпендикуляры к плоскостям $\alpha$ и $\beta$, проведенные из точки $A$. В силу перпендикулярности плоскостей $\alpha$ и $\beta$ в точке $A$ имеем $a \subset \beta$ и $b \subset \alpha$. Оставаясь в плоскости $\beta$, применим теорему 6.3 из третьей главы к прямой $AB$ и точке $B$. Это позволяет провести через точку $B$ прямую, лежащую в плоскости $\beta$ и перпендикулярную прямой $AB$. Покажем, что эта прямая есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$. Для этого отметим на ней некоторую точку $C$, после чего отложим на прямой $b$ отрезок $[AD]$,

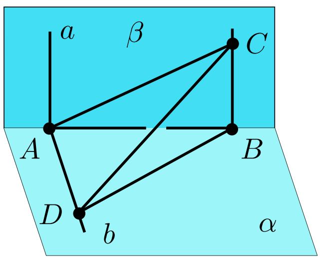



*Рис. 3.1*

конгруэнтный отрезку $[BC]$. Рассмотрим прямоугольные треугольники $ABC$ и $BAD$. Для них

$$[AB] \cong [BA], \qquad [BC] \cong [AD], \qquad \angle ABC \cong \angle BAD.$$

Из этих соотношений вытекает конгруэнтность рассматриваемых треугольников $ABC$ и $BAD$, откуда $[AC] \cong [BD]$.

Теперь рассмотрим треугольники $CAD$ и $DBC$. Эти треугольники оказываются конгруэнтными в силу следующих трех соотношений конгруэнтности для их сторон:

$$[AD] \cong [BC], \qquad [AC] \cong [BD], \qquad [CD] \cong [DC].$$

Из конгруэнтности треугольников $CAD$ и $DBC$ извлекаем конгруэнтность углов $\angle CAD \cong \angle DBC$. Но $b$ — перпендикуляр к плоскости $\beta$, в силу чего угол $\angle CAD$ прямой. Следовательно, угол $\angle DBC$ также прямой. Отсюда $BC \perp BD$ и $BC \perp AB$. То есть прямая $BC$ перпендикулярна двум прямым $AB$ и $BD$, лежащим в плоскости $\alpha$. Поэтому она есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный из точки $B$. При этом прямая $BC$ лежит в плоскости $\beta$, откуда вытекает требуемая перпендикулярность плоскостей $\alpha$ и $\beta$ в точке $B$. $\square$

Теорема 3.1 показывает, что перпендикулярность плоскостей есть их глобальная характеристика: если она имеет место в одной точке, то она имеется и во всех точках пересечения двух плоскостей.

Теорема 3.2. *Через любые два перпендикуляра к заданной плоскости $\alpha$ можно провести некоторую плоскость $\beta$, которая будет перпендикулярна плоскости $\alpha$.*

Теорема 3.2 не требует отдельного доказательства. Построение требуемой плоскости $\beta$ было, по существу, выполнено в процессе доказательства теоремы 3.1.

Теорема 3.3. *Любые два перпендикуляра к заданной плоскости $\alpha$ параллельны.*

Теорема 3.3 легко выводится из теоремы 3.2 и теоремы 8.2 из предыдущей третьей главы.

Определение 3.2. Пусть $B$ — некоторая точка, не лежащая в плоскости $\alpha$. Отрезок $[BA]$, соединяющий точку $B$ с некоторой точкой $A \in \alpha$, называется *перпендикуляром*, опущенным из точки $B$ на плоскость $\alpha$, если прямая $AB$ перпендикулярна плоскости $\alpha$. Точка $A \in \alpha$ при этом называется *основанием* перпендикуляра или же *ортогональной проекцией* точки $B$ на плоскость $\alpha$.

Теорема 3.4. *Из любой точки $B \notin \alpha$ можно опустить ровно один перпендикуляр на плоскость $\alpha$.*

Док-во. Докажем сначала существование перпендикуляра, опущенного из точки $B$ на плоскость $\alpha$. Выберем произвольную точку $O \in \alpha$. Если прямая $OB$ перпендикулярна плоскости $\alpha$, то отрезок $[BO]$ есть искомый перпендикуляр.

Рассмотрим случай, когда $[BO]$ не есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$. Пользуясь теоремой 1.3 проведем из точки $O$ прямую $a$, перпендикулярную плоскости $\alpha$. Отрезок $[BO]$ не лежит на прямой $a$, следовательно, $B \notin a$. Через прямую $a$ и точку $B$ проведем плоскость $\beta$. Обозначим через $c$ прямую, которая получается в пересечении плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Применим теорему 6.5 из третьей главы к точке $B$ и прямой $c$. В результате этого мы получим точку $A$ на прямой $c$, такую, что прямая $AB$ перпендикулярна прямой $c$.

Покажем, что отрезок $[BA]$ и есть искомый перпендикуляр, опущенный из точки $B$ на плоскость $\alpha$. Для этого заметим, что плоскость $\beta$ содержит перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный из точки $O$. Тогда согласно теореме 3.1 она содержит и перпендикуляр проведенный из точки $A$. Обозначим его $\tilde{a}$. Из $\tilde{a} \subset \beta$ и $\tilde{a} \perp c$ в силу теоремы 6.5 из третьей главы получаем требуемое совпадение $\tilde{a} = AB$.

Покажем, что построенный перпендикуляр $[BA]$ единственен. Если допустить существование второго перпендикуляра $[BA']$, то в треугольнике $ABA'$ мы имели бы два прямых угла, что противоречит теореме 6.6 из третьей главы. Этот же факт может быть выведен из теоремы 3.3. $\square$

Упражнение 3.1. *Докажите теоремы 3.2 и 3.3.*

## § 4. Двугранный угол.

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — две плоскости, пересекающиеся по некоторой прямой $a$. Каждая из плоскостей $\alpha$ и $\beta$ определяет разбиение пространства $\mathbb{E}$ на два полупространства:

$$\mathbb{E} = \alpha_- \cup \alpha \cup \alpha_+, \qquad \mathbb{E} = \beta_- \cup \beta \cup \beta_+.$$

Определение 4.1. *Двугранным углом* называется пересечение двух замкнутых полупространств, определенных двумя пересекающимися плоскостями. Пересечение соответствующих открытых полупространств называется *внутренностью* двугранного угла. Прямая, получающаяся в пересечении ограничивающих плоскостей, называется *ребром* двугранного угла.

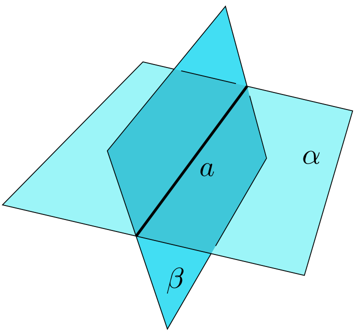



*Рис. 4.1*

В пересечении двух плоскостей $\alpha$ и $\beta$ возникает сразу четыре двугранных угла. Это следующие углы:

$$\overline{\alpha_+} \cap \overline{\beta_+}, \qquad \overline{\alpha_+} \cap \overline{\beta_-},$$
$$\overline{\alpha_-} \cap \overline{\beta_-}, \qquad \overline{\alpha_-} \cap \overline{\beta_-}.$$

Отметим, что каждый двугранный угол есть объединение своей внутренности и двух замкнутых полуплоскостей, отсекаемых ребром $a$ на плоскостях $\alpha$ и $\beta$. Эти полуплоскости называются *сторонами* двугранного угла.

Рассмотрим некоторый двугранный угол со сторонами, лежащими в плоскостях $\alpha$ и $\beta$. Выберем на его ребре $a$ некоторую произвольную точку $O$ и проведем через нее плоскость $\gamma$, перпендикулярную прямой $a$. В пересечении плоскости $\gamma$ со сторонами двугранного угла возникают лучи $h$ и $k$, лежащие в плоскостях $\alpha$ и $\beta$ и перпендикулярные ребру двугранного угла. Они образуют угол $\angle hk$, который называется *линейным углом двугранного угла* в точке $O$. Линейный угол двугранного угла зависит от положения точки $O$ на его ребре. Однако, следующая теорема показывает, что все линейные углы данного двугранного угла равнозначны.

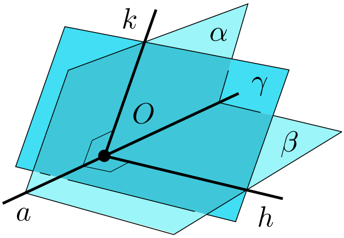



*Рис. 4.2*

Теорема 4.1. *Все линейные углы заданного двугранного угла конгруэнтны друг другу.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем некоторые дополнительные построения на плоскости. Пусть $c$ — некоторая прямая, лежащая в плоскости $\alpha$, и пусть $A$ и $B$ — две точки на этой прямой. Проведем через эти точки в плоскости $\alpha$ прямые, перпендикулярные прямой $c$. Согласно теореме 8.2 из третьей главы такие прямые параллельны. Выделим на этих прямых лучи, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой $c$, и обозначим их через $a$ и $b$. На луче $a$, исходящем из точки $A$, отметим точку $C$, после чего на луче $b$ выберем точку $D$ так, чтобы выполнялось условие $[BD] \cong [AC]$. Такой выбор возможен в силу аксиомы A13, причем он единственен в силу той же аксиомы. Соединим точки $C$ и $D$ с точками $A$ и $B$, проведя отрезки $[AD]$ и $[BC]$.

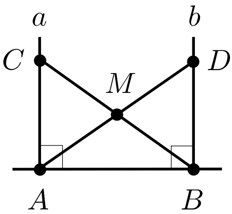



*Рис. 4.3*

Ввиду параллельности прямых $AC$ и $BD$ отрезок $[BD]$ не пересекает прямую $AC$. Значит, точки $B$ и $D$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой $AC$. Кроме того, точки $C$ и $D$ по построению лежат в одной полуплоскости относительно прямой $AB$. Следовательно, точка $D$ и луч $[AD\rangle$ лежат внутри угла $\angle BAC$. Применив лемму 6.2 из второй главы, получаем, что луч $[AD\rangle$ пересекает отрезок $[BC]$ в некоторой его внутренней точке $M$.

Аналогичные рассуждения справедливы и для луча $[BC\rangle$ по отношению к углу $\angle ABD$. Из них получаем, что точка $M$ лежит внутри отрезка $[AD]$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $ABD$ и $BAC$. Для них по построению выполнены соотношения

$$[AB] \cong [BA], \qquad [AC] \cong [BD], \qquad \angle BAC \cong \angle ABD,$$

из которых вытекает конгруэнтность этих треугольников. Отсюда извлекаем конгруэнтность углов $\angle DAB \cong \angle CBA$, которую используем при рассмотрении треугольника $AMB$. По теореме 5.2 из третьей главы он конгруэнтен самому себе при перестановке вершин $A$ и $B$. Отсюда $[AM] \cong [BM]$, то есть треугольник $AMB$ является равнобедренным.

Кроме $\angle DAB \cong \angle CBA$, из конгруэнтности треугольников $ABD$ и $BAC$ получаем $[AD] \cong [BC]$. Соединив это с соотношением $[AM] \cong [BM]$, получаем $[CM] \cong [DM]$. Это вытекает из аксиомы A15. Следовательно, треугольник $CMD$ является равнобедренным. В евклидовой геометрии имеет место конгруэнтность равнобедренных треугольников $AMB$ и $CMD$. Однако, доказательство этого факта требует применения аксиомы A20, которую мы еще не рассматривали.

Док-во теоремы 4.1. Рассмотрим двугранный угол и отметим на его ребре две произвольные точки $A$ и $B$ (см. Рис. 4.4 ниже). Через эти точки проведем плоскости, перпендикулярные ребру двугранного угла. Такие плоскости отсекут на сторонах двугранного угла четыре луча, образующие два линейных угла с вершинами в точках $A$ и $B$. Выберем на сторонах одного из таких линейных углов точки C и $E$. После этого на сторонах другого линейного угла отметим точки $D$ и $F$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$[AC] \cong [BD],$$
$$[AE] \cong [BF].$$

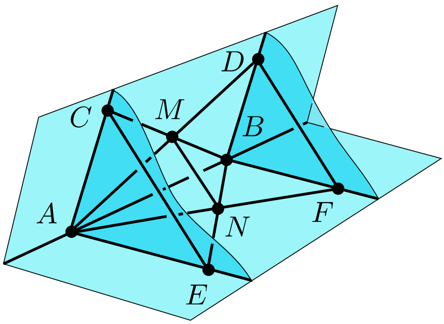



*Рис. 4.4*

Проведем четыре отрезка $[AD]$, $[BC]$, $[AF]$ и $[BE]$. При этом на каждой из сторон двугранного угла возникнет ситуация, изображенная на рисунке 4.3. В пересечении отрезков $[AD]$ и $[BC]$ мы получим точку $M$, а в пересечении отрезков $[AF]$ и $[BE]$ — точку $N$. Из равнобедренности треугольников $AMB$ и $ANB$ получаем следующие соотношения:

$$[AM] \cong [BM], \qquad [AN] \cong [BN].$$

Дополним эти соотношением очевидным условием конгруэнтности отрезка $[MN]$ самому себе: $[MN] \cong [MN]$. После этого, применив теорему 5.5 из третьей главы, выводим конгруэнтность треугольников $AMN$ и $BMN$. Отсюда имеем $\angle MAN \cong \angle MBN$ или, что то же самое, $\angle DAF \cong \angle CBE$.

Далее используем соотношения $[AD] \cong [BC]$ и $[AF] \cong [BE]$, которые возникают из рассмотрения прямоугольных треугольников $CAB$, $ABD$, $EAB$ и $ABF$. Дополнив их соотношением $\angle DAF \cong \angle CBE$ и применив теорему 5.1 из третьей главы, получим конгруэнтность треугольников $DAF$ и $CBE$. Теперь

$$[CE] \cong [DF], \qquad [AC] \cong [BD], \qquad [AE] \cong [BF],$$

из чего вытекает конгруэнтность треугольников $CAE$ и $DBF$. Следовательно, $\angle CAE \cong \angle DBF$, что и означает конгруэнтность двух линейных углов двугранного угла. $\square$

## § 5. Конгруэнтное перенесение плоскости и пространства.

Понятие конгруэнтного перенесения прямых было определено в § 3 третьей главы (см. определение 3.1). Оно легко обобщается на случай плоскостей и всего пространства.

Определение 5.1. Отображение $f\colon \alpha \to \beta$ называется *конгруэнтным перенесением* плоскости $\alpha$ в плоскость $\beta$, если для любых двух точек $X$ и $Y$ на плоскости $\alpha$ выполнено условие конгруэнтности отрезков $[f(X)f(Y)] \cong [XY]$.

Определение 5.2. Отображение $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ называется *конгруэнтным перенесением* пространства, если для произвольных двух точек $X$ и $Y$ выполнено условие конгруэнтности отрезков $[f(X)f(Y)] \cong [XY]$.

Теорема 5.1. *Пусть $f$ — конгруэнтное перенесение одной плоскости в другую либо конгруэнтное перенесение всего пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *для любых трех точек $X$, $Y$ и $Z$ из области определения отображения $f$, лежащих на одной прямой, их образы $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ также лежат на одной прямой, причем из $(X \blacktriangleright Y \blacktriangleleft Z)$ вытекает $(f(X) \blacktriangleright f(Y) \blacktriangleleft f(Z))$;*

(2) *для любых трех точек $X$, $Y$ и $Z$ из области определения отображения $f$, не лежащих на одной прямой, их образы $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ также не лежат на одной прямой, причем треугольник $XYZ$ конгруэнтен треугольнику $f(X)f(Y)f(Z)$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, сформулируем и докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $A$, $B$ и $C$ — три точки, не лежащие на одной прямой. Тогда ни для какой из точек $\tilde{B}$ на прямой $AC$ соотношения $[AB] \cong [A\tilde{B}]$ и $[BC] \cong [\tilde{B}C]$ не могут быть выполнены одновременно.*

Док-во. Докажем лемму методом от противного. Предположим, что на прямой $AC$ нашлась точка $\tilde{B}$, для которой указанные в лемме соотношения выполнены одновременно. Из них в силу теоремы 2.1 получаем, что точки $A$ и С лежат в плоскости серединных перпендикуляров отрезка $[B\tilde{B}]$. Пересечение этой плоскости с плоскостью треугольника $ABC$ дает некоторый серединный перпендикуляр отрезка $[B\tilde{B}]$, содержащий точки $A$ и $C$. Следовательно, точка $O$ (середина отрезка $[B\tilde{B}]$) лежит на прямой $AC$. Из $\tilde{B} \in AC$ и из $O \in AC$ вытекает совпадение прямых $\tilde{B}O$ и $AC$. Отсюда $B \in AC$, что противоречит условию леммы, согласно которому точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

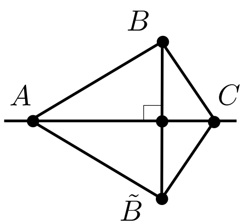



*Рис. 5.1*

Док-во теоремы 5.1. Начнем с доказательства пункта (1) в теореме. Пусть три точки $X$, $Y$ и $Z$ из области определения отображения $f$ лежат на одной прямой. Если основное утверждение пункта (1) теоремы для точек $X$, $Y$ и $Z$ не выполнено, то точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ не лежат на одной прямой. В этой ситуации они задают треугольник, для сторон которого выполняются соотношения $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$, $[YZ] \cong [f(Y)f(Z)]$, а также $[XZ] \cong [f(X)f(Z)]$. Пользуясь последним из этих соотношений, применим к точкам $X$, $Y$ и $Z$ теорему 2.1 из третьей главы. Она позволяет найти на прямой $[f(X)f(Z)]$ точку $\tilde{Y}$,

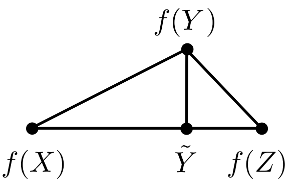



*Рис. 5.2*

такую, что $[XY] \cong [f(X)\tilde{Y}]$ и $[YZ] \cong [\tilde{Y}f(Z)]$. Сравнив это с $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$ и $[YZ] \cong [f(Y)f(Z)]$, замечаем, что мы оказались в точности в той ситуации, которая запрещена доказанной выше леммой 5.1. Значит, допущение о том, что точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ не лежат на одной прямой, неверно, и основное утверждение первого пункта теоремы выполнено. После этого соотношение $(f(X) \blacktriangleright f(Y) \blacktriangleleft f(Z))$ выводится из $(X \blacktriangleright Y \blacktriangleleft Z)$ при помощи теоремы 2.2 из третьей главы.

Теперь докажем пункт (2) теоремы. Теперь точки $X$, $Y$ и $Z$ не лежат на одной прямой. Допустим, что точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ оказались лежащими на одной прямой. Воспользуемся соотношением $[XZ] \cong [f(X)f(Z)]$ и применим теорему 2.1 из третьей главы. Она позволяет найти на отрезке $[XZ]$ точку $\tilde{Y}$, такую, что $[X\tilde{Y}] \cong [f(X)f(Y)]$ и $[\tilde{Y}Z] \cong [f(Y)f(Z)]$. Вспомнив, что выполнены соотношения $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$ и $[YZ] \cong [f(Y)f(Z)]$, мы вновь оказываемся в ситуации, которая запрещена леммой 5.1. Следовательно, наше допущение о том, что точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ лежат на одной прямой, было неверным. Основное утверждение второго пункта теоремы доказано. Конгруэнтность же треугольников $XYZ$ и $f(X)f(Y)f(Z)$ вытекает из соотношений $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$, $[YZ] \cong [f(Y)f(Z)]$ и $[XZ] \cong [f(X)f(Z)]$. $\square$

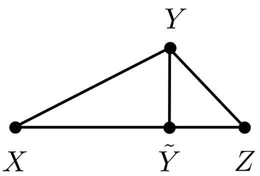



*Рис. 5.3*

Как следствие доказанной теоремы 5.1 и теоремы 2.2 из третьей главы получаем, что отображения конгруэнтного перенесения переводят прямую в прямую и луч в луч. При этом всякий угол между лучами отображается в конгруэнтный ему угол. В частности, это означает, что отображения конгруэнтного перенесения сохраняют перпендикулярность прямых.

Пусть $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — конгруэнтное перенесение пространства. Воспользовавшись теоремой 1.5, заключаем, что такое отображение переводит плоскость в плоскость и при этом сохраняет перпендикулярность плоскостей, а также перпендикулярность прямой и плоскости. Значит, сужение конгруэнтного перенесения пространства на некоторую плоскость оказывается отображением конгруэнтного перенесения плоскостей, а сужение конгруэнтного перенесения плоскостей на некоторую прямую оказывается отображением конгруэнтного перенесения прямых.

Рассмотрим отображение конгруэнтного перенесения $f$, переводящее плоскость $\alpha$ в плоскость $\beta$. Пусть $a$ — некоторая прямая, лежащая в плоскости $\alpha$. Тогда в соответствии с вышесказанным точки прямой $a$ отобразятся в точки некоторой прямой $b$, лежащей в плоскости $\beta$. Пусть $X$ и $Y$ — две точки плоскости $\alpha$, которые лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $a$. Тогда отрезок $[XY]$ пересекает прямую $a$ в некоторой своей внутренней точке $O$. В силу теоремы 5.1 точка $f(O)$ есть точка пересечения прямых $f(X)f(Y)$ и $b$. Из условия $(X \blacktriangleright O \blacktriangleleft Y)$ получаем $(f(X) \blacktriangleright f(O) \blacktriangleleft f(Y))$. Следовательно, точки $f(X)$ и $f(Y)$ лежат в плоскости $\beta$ по разные стороны от прямой $b$.

Теперь рассмотрим точки $X$ и $Y$, лежащие в плоскости $\alpha$ по одну сторону от прямой $a$. Выберем точку $Z$, лежащую в противоположной полуплоскости по отношению к точкам $X$ и $Y$. В силу приведенных выше рассуждений точки $f(X)$ и $f(Z)$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $b$. Точки $f(Y)$ и $f(Z)$ также лежат в разных полуплоскостях. Следовательно, точки $f(X)$ и $f(Y)$ лежат в плоскости $\beta$ по одну сторону от прямой $b$. В результате приведенных рассуждений доказана следующая теорема.

Теорема 5.2. *Всякое отображение конгруэнтного перенесения плоскостей и всякое отображение конгруэнтного перенесения всего пространства переводит одну полуплоскость в некоторую другую полуплоскость.*

Теорема 5.3. *Всякое отображение конгруэнтного перенесения пространства переводит одно полупространство в некоторое* *другое полупространство.*

Доказательство теоремы 5.3 аналогично доказательству теоремы 5.2. Его мы приводить не будем.

Пусть $f : \alpha \to \beta$ — отображение конгруэнтного перенесения плоскостей. Рассмотрим некоторую прямую $a$ в плоскости $\alpha$.

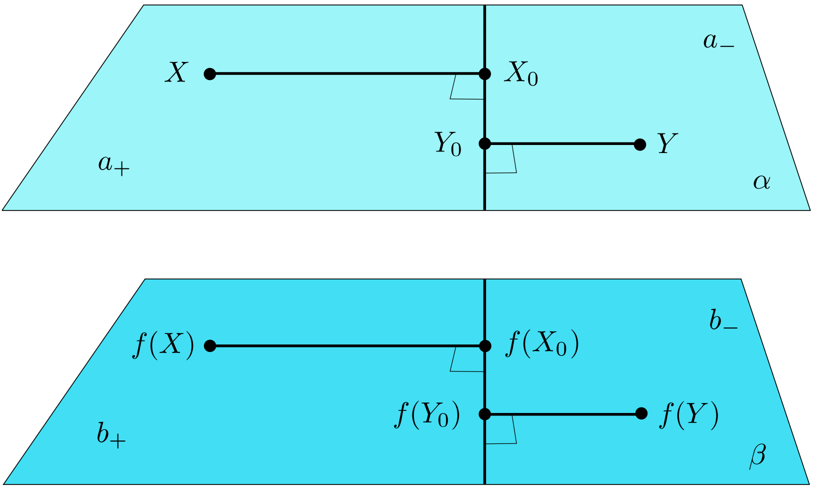



*Рис. 5.4*

Точки этой прямой отображаются в некоторую прямую $b$ в плоскости $\beta$. Прямая $a$ разбивает плоскость $\alpha$ на две полуплоскости $a_+$ и $a_-$. Обозначим через $b_+$ ту из полуплоскостей на плоскости $\beta$, в которую переходят точки полуплоскости $a_+$. Пусть $X$ — некоторая точка полуплоскости $a_+$. Оставаясь в плоскости $\alpha$, опустим из точки $X$ перпендикуляр на прямую $a$. Основание этого перпендикуляра обозначим через $X_0$. Отображение конгруэнтного перенесения сохраняет перпендикулярность, поэтому точка $f(X_0)$ будет основанием перпендикуляра, опущенного из точки $f(X)$ на прямую $b$ в плоскости $\beta$. Точнее для точки $f(X)$

выполнены следующие три условия:

$$[f(X)f(X_0)] \perp b, \qquad [f(X)f(X_0)] \cong [XX_0], \qquad f(X) \in b_+.$$

Заметим, что эти условия и задание точки $f(X_0)$ на прямой $b$ однозначно фиксируют положение точки $f(X)$ на плоскости $\beta$. Аналогичным образом для произвольной точки $Y$ из полуплоскости $a_-$ и для основания перпендикуляра $Y_0$, опущенного из точки $Y$ на прямую $a$, имеем

$$[f(Y)f(Y_0)] \perp b, \qquad [f(Y)f(Y_0)] \cong [YY_0], \qquad f(Y) \in b_-.$$

Эти условия и задание точки $f(Y_0)$ также однозначно фиксируют положение точки $f(Y)$ на плоскости $\beta$. Перечисленные наблюдения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.4. *Пусть $a$ — некоторая прямая в плоскости $\alpha$, разбивающая эту плоскость на две полуплоскости $a_+$ и $a_-$. Пусть $b$ — некоторая прямая в плоскости $\beta$, разбивающая ее на две полуплоскости $b_+$ и $b_-$. Тогда всякое отображение конгруэнтного перенесения прямых $f: a \to b$ имеет единственное продолжение до отображения конгруэнтного перенесения плоскостей $f$, переводящего $a_+$ в $b_+$ и $a_-$ в $b_-$.*

Док-во. Пусть $X \in a_+$. Определим $f(X)$ в результате следующего построения. Из точки $X$ опустим перпендикуляр на прямую $a$ и обозначим основание такого перпендикуляра через $X_0$. Применив к точке $X_0$ отображение конгруэнтного перенесения прямых $f: a \to b$, получим точку $f(X_0)$ на прямой $b$. Через точку $f(X_0)$ в плоскости $\beta$ проведем прямую, перпендикулярную прямой $b$, и выберем на ней луч, исходящий из точки $f(X_0)$ и лежащий в замкнутой полуплоскости $\overline{b_+}$. После этого точка $f(X)$ на таком луче определяется из условия $[XX_0] \cong [f(X)f(X_0)]$. Для точки $Y \in a$ процедура построения точки $f(Y)$ отличается лишь выбором луча $[f(Y_0)f(Y)\rangle$ лежащим в полуплоскости $\overline{b_-}$ (см. Рис. 5.4 выше).

Изложенные построения задают отображение $f: \alpha \to \beta$, для точек $X \in a$ совпадающее с исходным отображением $f: a \to b$. Докажем, что построенное отображение является конгруэнтным перенесением плоскостей. Для этого необходимо доказать соотношение $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$ для любых двух точек $X$ и $Y$ на плоскости $\alpha$. Рассмотрим четыре случая:

(1) обе точки $X$ и $Y$ лежат на прямой $a$;
(2) только одна из точек $X$ и $Y$ лежит на прямой $a$;
(3) точки $X$ и $Y$ не лежат на прямой $a$ и располагаются на плоскости $\alpha$ по одну сторону от этой прямой;
(4) точки $X$ и $Y$ лежат по разные стороны от прямой $a$.

В первом случае соотношение $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$ вытекает из того, что исходное отображение $f: a \to b$ является конгруэнтным перенесением прямых.

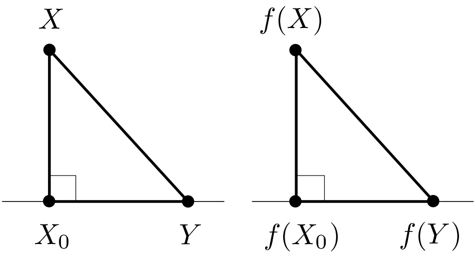



*Рис. 5.5*

Во втором случае положим для определенности $Y \in a$ и $X \notin a$. Тогда в плоскостях $\alpha$ и $\beta$ мы получим два прямоугольных треугольника. В этих треугольниках для $[X_0Y]$ и $[f(X_0)f(Y)]$ выполняется соотношение $[X_0Y] \cong [f(X_0)f(Y)]$. Оно вытекает из того, что $f: a \to b$ есть конгруэнтное перенесение прямых. Кроме того, по построению точки $f(X)$ имеем $[XX_0] \cong [f(X)f(X_0)]$. Соединив это с условием конгруэнтности прямых углов $\angle XX_0Y \cong \angle f(X)f(X_0)f(Y)$, получаем конгруэнтность треугольников $XX_0Y$ и $f(X)f(X_0)f(Y)$, откуда извлекаем требуемое $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$.

Рассмотрим третий случай. Конгруэнтность прямоугольных треугольников $X_0Y_0Y$ и $f(X_0)f(Y_0)f(Y)$ в этом случае доказывается точно так же, как и в предыдущем. Из этого извлекается конгруэнтность углов $\angle YX_0Y_0 \cong \angle f(Y)f(X_0)f(Y_0)$ и конгруэнтность отрезков $[X_0Y] \cong [f(X_0)f(Y)]$. Далее учтем, что прямые углы $\angle f(X)f(X_0)f(Y_0)$ и $\angle XX_0Y_0$ конгруэнтны, и применим теорему 5.3 из третьей главы. Как результат этого мы получим конгруэнтность угла $\angle f(X)f(X_0)f(Y)$ и угла $\angle XX_0Y$. Из соотношения $[XX_0] \cong [f(X)f(X_0)]$ и из соотношения $[X_0Y] \cong [f(X_0)f(Y)]$ теперь вытекает конгруэнтность треугольников $XX_0Y$ и $f(X)f(X_0)f(Y)$, откуда извлекается требуемое соотношение $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$ для $X$ и $Y$.

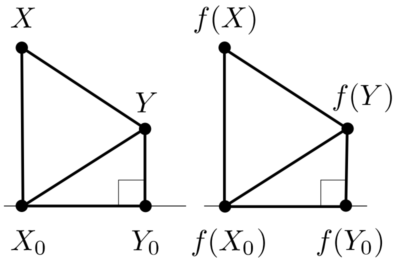



*Рис. 5.6*

Доказательство конгруэнтности отрезков $[XY]$ и $[f(X)f(Y)]$ в четвертом случае дословно повторяет доказательство этого факта в третьем случае. Однако, картинка в этом случае иная, ибо точки $X$ и $Y$ расположены по разные стороны от прямой $a$. По построению точки $f(X)$ и $f(Y)$ также располагаются по разные стороны от прямой $b$.

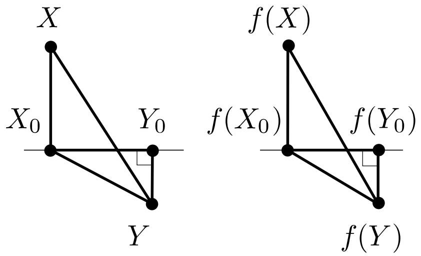



*Рис. 5.7*

В трех случаях (2), (3) и (4) имеются вырожденные подслучаи, когда $X_0 = Y_0$. Рассмотрение этих вырожденных подслучаев мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Итак, мы построили отображение $f : \alpha \to \beta$, продолжающее отображение $f : a \to b$, и доказали, что оно является конгруэнтным перенесением. Единственность построенного отображения вытекает из рассуждений, приведенных до теоремы 5.4. $\square$

Теорема 5.5. *Пусть $\alpha$ — некоторая плоскость, разбивающая пространство на два полупространства $\alpha_+$ и $\alpha_-$. Аналогично, пусть $\beta$ — некоторая плоскость, разбивающая пространство на два полупространства $\beta_+$ и $\beta_-$. Тогда всякое отображение конгруэнтного перенесения плоскостей $f\colon \alpha \to \beta$ имеет единственное продолжение до отображения конгруэнтного перенесения всего пространства $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, переводящего $\alpha_+$ в $\beta_+$ и $\alpha_-$ в $\beta_-$.*

Построение отображения $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ аналогично тому, что мы проделали при доказательстве теоремы 5.4. В остальном доказательство теоремы 5.5 также очень похоже на доказательство теоремы 5.4.

Упражнение 5.1. *Докажите теоремы 5.3 и 5.5.*

Упражнение 5.2. *Докажите, что инверсия $i_O\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ относительно точки $O$ есть отображение конгруэнтного перенесения пространства.*

## § 6. Зеркальное отражение в плоскости и в прямой.

Применим теоремы 5.4 и 5.5 для построения некоторых конкретных отображений конгруэнтного перенесения. Рассмотрим плоскость $\alpha$ и обозначим через $\alpha_+$ и $\alpha_-$ полупространства, на которые она разбивает пространство $\mathbb{E}$. Положим $\beta = \alpha$, $\beta_+ = \alpha_-$ и $\beta_- = \alpha_+$. В качества исходного отображения возьмем тождественное отображение плоскости $\alpha$ на себя, обозначив его $f : \alpha \to \beta$. Применение теоремы 5.5 определяет отображение конгруэнтного перенесения $z_\alpha\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, которое переставляет полупространства $\alpha_+$ и $\alpha_-$, оставляя неподвижными точки плоскости $\alpha$. Такое отображение называется *зеркальным отражением в плоскости $\alpha$*.

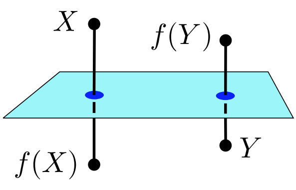



*Рис. 6.1*

Пусть $a$ — некоторая прямая, лежащая в плоскости $\alpha$. Она разбивает эту плоскость на две полуплоскости $a_+$ и $a_-$. Положим $b = a$, $b_+ = a_-$ и $b_- = a_+$. В качества отображения $f\colon a \to b$ возьмем тождественное отображение прямой $a$ на себя. Тогда, применив теорему 5.4, мы получим отображение конгруэнтного перенесения плоскостей $z_a : \alpha \to \alpha$, которое переставляет полуплоскости $a_+$ и $a_-$. Оно называется *зеркальным отражением плоскости $\alpha$ в прямой $a$.*

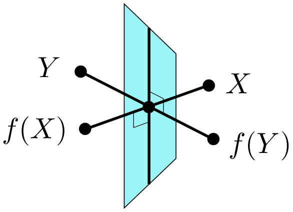



*Рис. 6.2*

Отображение $z_a$ можно продолжить до отображения всего пространства. Для этого вновь положим $\beta = \alpha$, $\beta_+ = \alpha_-$ и $\beta_- = \alpha_+$. В качества отображения $f : \alpha \to \beta$ теперь возьмем зеркальное отражение плоскости $\alpha$ в прямой $a$. Теперь применение теоремы 5.5 определяет отображение $z_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, которое называют *зеркальным отражением пространства $\mathbb{E}$ в прямой $a$.* Плоскость $\alpha$ играет вспомогательную роль в построении отображения $z_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. А именно, имеет место следующая теорема, дающая альтернативный подход к построению отображения: $z_a\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$.

Теорема 6.1. *Для всякой точки $X \notin a$ отрезок, соединяющий $X$ с зеркально симметричной точкой $z_a(X)$, пересекает прямую $a$ в точке $X_0$, являющейся его серединой, причем он перпендикулярен этой прямой.*

Упражнение 6.1. *Убедитесь в том, что теорема 6.1 однозначно определяет положение $z_a(X)$ по заданной точке $X$.*

Упражнение 6.2. *Докажите теорему 6.1 и покажите, что отображения зеркального отражения в прямой и в плоскости удовлетворяют тождествам $z_\alpha \circ z_\alpha = \mathrm{id}$ и $z_a \circ z_a = \mathrm{id}$.*

Упражнение 6.3. *Пусть прямая $a$ есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный в точке $O \in \alpha$. Докажите, что в этом случае $z_a \circ z_\alpha = z_\alpha \circ z_a = i_O$.*

## § 7. Поворот в плоскости вокруг точки.

Пусть в плоскости $\alpha$ задан угол $\angle hk$ с вершиной в точке $O$. Продолжим луч $h$ до целой прямой $a$, а луч $k$ — до целой прямой $b$. Угол $\angle hk$ есть пересечение двух полуплоскостей, задаваемых прямыми $a$ и $b$. Положим для определенности $\angle hk = \overline{a_+} \cap \overline{b_-}$. Согласно результатам § 3 из третьей главы существует единственное отображение конгруэнтного перенесения прямых $f^+_{OO} : a \to b$, переводящее точку $O$ в себя и отображающее луч $h$ в луч $k$. Пользуясь теоремой 5.4, продолжим это отображение до конгруэнтного перенесения плоскостей $\theta_{hk} : \alpha \to \alpha$, переводящего $a_+$ в $b_+$ и $a_-$ в $b_-$. Такое отображение называется *поворотом плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$ на угол $\angle hk$ от луча $h$ к лучу $k$.*

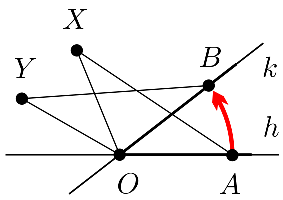



*Рис. 7.1*

Перестановка лучей $h$ и $k$ не меняет угла $\angle hk$. Однако, при этом мы получим поворот в противоположную сторону от луча $k$ к лучу $h$. Отображение $\theta_{kh}$ является обратным для $\theta_{hk}$, то есть $\theta_{hk} \circ \theta_{kh} = \theta_{kh} \circ \theta_{hk} = \mathrm{id}_\alpha$.

Пусть в плоскости $\alpha$ задан угол поворота $\angle hk$. Рассмотрим процедуру построения точки $Y = \theta_{hk}(X)$ для некоторой произвольной точки $X \in \alpha$. Положим для определенности $X \in a_+$. Отметим на лучах $h$ и $k$ точки $A$ и $B$ так, чтобы выполнялись соотношения $[OA] \cong [OX]$ и $[OB] \cong [OX]$. Тогда $B = \theta_{hk}(A)$. Рассмотрим равнобедренный треугольник $AOX$. Он целиком лежит в замкнутой полуплоскости $\overline{a_+}$, которая при повороте $\theta_{hk}$ переходит в $\overline{b_+}$. Построим в полуплоскости $\overline{b_+}$ треугольник $BOY$, конгруэнтный треугольнику $AOX$. Для этого отложим в $\overline{b_+}$ луч, образующий с лучом $k$ угол, конгруэнтный углу $\angle XOA$, после чего отметим на таком луче точку $Y$, такую, что $[OY] \cong [OX]$. Теперь из $O = \theta_{hk}(O)$, $B = \theta_{hk}(A)$ и из конгруэнтности треугольников $AOX$ и $BOY$ выводим $Y = \theta_{hk}(X)$. Для случая $X \in a_-$ процедура построения точки $Y = \theta_{hk}(X)$ аналогична приведенной выше, с той лишь разницей, что треугольник $BOY$, конгруэнтный треугольнику $AOX$, теперь строится в полуплоскости $\overline{b_-}$.

Теорема 7.1. *Отображение поворота $\theta_{hk}\colon \alpha \to \alpha$ имеет ровно одну неподвижную точку. Это точка $O = \theta_{hk}(O)$, вокруг которой выполняется поворот на угол $\angle hk$.*

Док-во. Тот факт, что точка $O$ является неподвижной точкой отображения $\theta_{hk}$ вытекает из того, что поворот определяется как продолжение отображения $f^+_{OO}\colon a \to b$ в силу теоремы 5.4 (см. выше). Покажем, что других неподвижных точек у отображения $\theta_{hk}\colon \alpha \to \alpha$ нет.

Допустим, что это не так. Если $X$ — еще одна неподвижная точка, то вся прямая $OX$ состоит из неподвижных точек отображения $\theta_{hk}$ (это следует из теоремы 2.1 из третьей главы). Прямая $OX$ отлична от $a$ (ибо $a$ отображается в $b$), поэтому неподвижную точку $X \neq O$ всегда можно выбрать из полуплоскости $a_+$. Применим к точке $X$ процедуру построения точки $Y = \theta_{hk}(X)$, изложенную выше. Условие $X = Y$ приводит к ситуации, изображенной на рисунке 7.2. Из $Y \in b_+$ и $A \in b_-$ следует, что точки $X$ и $A$ лежат по разные стороны прямой $b$. Поэтому отрезок $[AX]$ пересекает прямую $OB$ в некоторой своей внутренней точке $C$. Отсюда заключаем, что точка $A$ является внешней для отрезка $[XC]$, поэтому из $X \in a_+$ вытекает $C \in a_+$. Но точка $B$ также лежит в полуплоскости $a_+$. Значит, точки $B$ и $C$ лежат по одну сторону от прямой $OA$ и точка $O$ лежит вне отрезка $[BC]$. Из этого, в свою очередь, вытекает, что точки $B$ и $C$ лежат по одну сторону от прямой $OX$. Теперь из конгруэнтности углов $\angle OYB \cong \angle OXA$ вытекает совпадение лучей $[XA\rangle$ и $[XB\rangle$. Далее из $[AX] \cong [BY]$ получаем совпадение

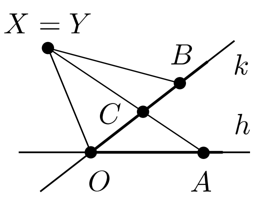



*Рис. 7.2*

$A = B$, А это противоречит тому, что лучи $h \neq k$ образуют угол $\angle hk$. Полученное противоречие показывает, что отображение $\theta_{hk}$ не имеет неподвижных точек, отличных от $O$. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть $h$ и $k$ — два луча с общим началом в точке $O$, лежащие в плоскости $\alpha$. Существует ровно два отображения конгруэнтного перенесения $f\colon \alpha \to \alpha$ с неподвижной точкой $O$, которые переводят луч $h$ в луч $k$. Первое из них $f = \theta_{hk}$ — это поворот на угол $\angle hk$ вокруг точки $O$, а второе $f = z_m$ — зеркальное отражение плоскости $\alpha$ в прямой $m$, содержащей биссектрису угла $\angle hk$.*

Док-во. Нетрудно видеть, что отображения $\theta_{hk}$ и $z_m$ действительно переводят луч $h$ в луч $k$. Пусть $a$ — прямая, содержащая луч $h$, и пусть $b$ — прямая, содержащая луч $k$. Сужение $\theta_{hk}$ и $z_m$ на прямую $a$ совпадает с отображением конгруэнтного перенесения прямых $f^{+}_{OO}\colon a \to b$. Но, согласно теореме 5.4, мы можем построить только два продолжения этого отображения до отображения конгруэнтного перенесения плоскости $f\colon \alpha \to \alpha$. Первое переводит $a_+$ в $b_+$ и $a_-$ в $b_-$, это поворот $f = \theta_{hk}$. А второе переводит $a_+$ в $b_-$ и $a_-$ в $b_+$, это отображение зеркального отражения $f = z_m$. $\square$

**Замечание**. Есть два особых случая расположения лучей $h$ и $k$ в теореме 7.2, когда они лежат на одной прямой $n$. Если $h = k$, то полагают $\theta_{hk} = \theta_{hh} = \mathrm{id}$. При этом прямая $m$ совпадает с $n$. Если лучи $h$ и $k$ противоположны, то они образуют развернутый угол, биссектрисой которого служит перпендикуляр к прямой $n$, проведенный из точки $O$. А поворот $\theta_{hk}$ в этом случае считается совпадающим с инверсией плоскости $\alpha$ относительно точки $O$. С учетом сделанных дополнительных обозначений теорема 7.2 остается справедливой и в указанных особых случаях расположения лучей $h$ и $k$.

Теорема 7.3. *Для всякого луча $l$ с началом в точке $O$, лежащего на плоскости $\alpha$, из $\theta_{hk}(l) = q$ вытекает $\theta_{hk} = \theta_{lq}$.*

Док-во. Действительно, $\theta_{hk}(l) = q$ означает, что отображение конгруэнтного перенесения $\theta_{hk}$ переводит луч $l$ в луч $q$. Оно имеет единственную неподвижную точку $O$. Поэтому $\theta_{hk}$ совпадает с $\theta_{lq}$. $\square$

Теорема 7.4. *Отображения поворота плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$ и отображения зеркального отражения в прямых, проходящих через эту точку, обладают следующими свойствами:*

$$\theta_{kl} \circ \theta_{hk} = \theta_{hl}; \qquad \theta_{hk} \circ z_m = z_m \circ \theta_{kh};$$

$$z_m \circ z_m = \mathrm{id}; \qquad z_m \circ z_n = \theta_{hk}, \text{ где } h \subset n,\ k = z_m(h).$$

Док-во. Пусть $h$, $k$ и $l$ — три луча с общим началом в точке $O$, лежащие на плоскости $\alpha$. Пусть при этом никакие два из них не лежат на одной прямой. Тогда они определяют три угла $\angle hk$, $\angle kl$, $\angle hl$ и три поворота $\theta_{hk}$, $\theta_{kl}$ и $\theta_{hl}$. Обозначим через $f$ композицию двух поворотов: $f = \theta_{kl} \circ \theta_{hk}$. Легко видеть, что отображение $f$ переводит луч $h$ в луч $l$ и имеет неподвижную точку $O$. Поэтому в силу теоремы 7.2 мы имеем две возможности: $f = \theta_{hl}$ либо $f = z_m$.

Докажем, что $f$ имеет единственную неподвижную точку $O$. Если допустить существование второй неподвижной точки $X$, то найдется луч $q = [OX\rangle$, целиком состоящий из неподвижных точек отображения $f$. Тогда $\theta_{kl} \circ \theta_{hk}(q) = q$ или $\theta_{hk}(q) = \theta_{lk}(q)$. Положим $\theta_{hk}(q) = p$ и применим теорему 7.3. В результате получим $\theta_{hk} = \theta_{qp}$ и $\theta_{lk} = \theta_{qp}$. Следовательно, $\theta_{kh} = \theta_{kl}$, что приводит к совпадению лучей $h = l$. Но это противоречит исходному предположению, о том, что никакие два из лучей $h$, $k$ и $l$ не лежат на одной прямой. Полученное противоречие исключает возможность $f = z_m$ и доказывает первое соотношение $\theta_{kl} \circ \theta_{hk} = \theta_{hl}$.

Пусть $m$ — некоторая прямая, лежащая в плоскости $\alpha$ и проходящая через точку $O$. Точка $O$ разбивает ее на два луча. Обозначим один из них через $l$ и положим $q = \theta_{hk}(l)$. Тогда

$\theta_{hk} = \theta_{lq}$, что следует из теоремы 7.3. Обозначим $p = \theta_{ql}(l)$. По построению лучи $p$ и $q$ лежат по разные стороны от прямой $m$. Из $p = \theta_{ql}(l)$ и $l = \theta_{ql}(q)$ получаем, что они образуют конгруэнтные углы $\angle lq$ и $\angle lp$ с лучом $l$, лежащим на прямой $m$. Следовательно, $p = z_m(q)$ и $q = z_m(p)$. Отсюда

$$\theta_{hk} \circ z_m(l) = \theta_{hk}(l) = \theta_{lq}(l) = q,$$

$$z_m \circ \theta_{kh}(l) = z_m \circ \theta_{ql}(l) = z_m(p) = q.$$

Оба отображения $f = \theta_{hk} \circ z_m$ и $g = z_m \circ \theta_{kh}$ переводят луч $l$ в луч $q$. При этом равенство $f = \theta_{lq}$ исключается, ибо из $f = \theta_{hk} \circ z_m = \theta_{lq}$ вытекает $z_m = \mathrm{id}$. Равенство $g = \theta_{lq}$ также исключается, поскольку из $g = z_m \circ \theta_{kh} = \theta_{lq}$ получалось бы $z_m = \theta_{lq} \circ \theta_{pl} = \theta_{pq}$. Значит, в силу теоремы 7.2 отображения $f$ и $g$ совпадают с зеркальным отражением в прямой, содержащей биссектрису угла $\angle lq$. Отсюда $f = g$, что доказывает второе соотношение $\theta_{hk} \circ z_m = z_m \circ \theta_{kh}$.

Третье соотношение $z_m \circ z_m = \mathrm{id}$ вытекает непосредственно из самого определения зеркального отражения плоскости в прямой $z_m \colon \alpha \to \alpha$ (см. § 6 выше).

Пусть $m \neq n$ — две прямые, лежащие в плоскости $\alpha$ и пересекающиеся в точке $O$. Точка $O$ разбивает прямую $n$ на два луча. Обозначим один из них через $h$ и положим $k = z_m(h)$. Тогда для отображения $f = z_m \circ z_n$ имеем $f(h) = k$. Отсюда в силу теоремы 7.2 имеем две возможности: $f = \theta_{hk}$ либо $f = z_u$, где $u$ — прямая, содержащая биссектрису угла $\angle hk$.

Покажем, что $f$ имеет единственную неподвижную точку $O$. Если допустить существование второй неподвижной точки $X$, то из $z_m \circ z_n(X) = X$ выводим $z_m(X) = z_n(X)$. Положим, $Y = z_m(X) = z_n(X)$. Совпадение $X = Y$ исключается, ибо точка $O$ является единственной общей неподвижной точкой отображений $z_m$ и $z_n$. Тогда из $Y = z_m(X)$ получаем, что $m$ совпадает с серединным перпендикуляром отрезка $[XY]$, лежащим в плоскости $\alpha$. В силу $Y = z_n(X)$ прямая $n$ также совпадает с этим серединным перпендикуляром, что противоречит исходному предположению $m \neq n$. Значит, $f$ не имеет неподвижных точек, отличных от точки $O$, и потому $f \neq z_u$. Тогда $f = \theta_{hk}$, что завершает доказательство четвертого соотношения и всей теоремы в целом. □

Упражнение 7.1. *Сравните теорему 7.4 с теоремой 3.2 из третьей главы.*

Упражнение 7.2. *Покажите, что теорема 7.3 и теорема 7.4 остаются справедливыми и в особых случаях, когда какие-то из прямых совпадают или какие-то из лучей оказываются лежащими на одной прямой.*

## § 8. Группа вращений и группа поворотов плоскости.

Пусть $f : \alpha \to \alpha$ — некоторое отображение конгруэнтного переноса, имеющее неподвижную точку $O$. Такое отображение иногда называют *вращением плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$*. Выберем некоторый произвольный луч $h \subset \alpha$ с началом в точке $O$. Отображение $f$ переведет его в луч $k = f(h)$, имеющий то же начало. Теперь, применив теорему 7.2, заключаем, что любое вращение $f$ плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$ есть некоторый поворот $\theta_{hk}$ вокруг этой точки либо зеркальное отражение $z_m$ в прямой, проходящей через точку $O$. Как следствие получаем, что такое отображение $f$ биективно и имеет обратное отображение $f^{-1}$, также являющееся вращением вокруг точки $O$. Множество всех вращений плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$ является группой относительно операции взятия композиции (см. определение 4.2 в третьей главе). Единичным элементом в *группе вращений* служит тождественное отображение id, которое можно интерпретировать как особый случай поворота: $\mathrm{id} = \theta_{hh}$ (см. замечание к теореме 7.2).

Множество поворотов плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$ также является группой. Это вытекает из теоремы 7.3 и первого соотношения из теоремы 7.4.

Теорема 8.1. *Пусть $h$, $k$, $l$ и $q$ — четыре луча с общим началом в точке $O$, лежащие на одной плоскости $\alpha$. Равенство $\theta_{hk} = \theta_{lq}$ имеет место тогда и только тогда, когда биссектрисы углов $\angle lk$ и $\angle hq$ лежат на одной прямой.*

Док-во. Пусть $\theta_{hk} = \theta_{lq}$. Обозначим через $m$ биссектрису угла, образованного лучами $l$ и $k$. Тогда $z_m(l) = k$ и $z_m(k) = l$. Рассмотрим отображение $f = z_m \circ \theta_{kh} \circ z_m$ и вычислим $f(l)$:

$$f(l) = z_m(\theta_{kh}(z_m(l))) = z_m(\theta_{kh}(k)) = z_m(h).$$

С другой стороны, применив второе и третье соотношения из теоремы 7.4, для отображения $f$ получаем

$$f = (z_m \circ \theta_{kh}) \circ z_m = (\theta_{hk} \circ z_m) \circ z_m = \theta_{hk} \circ (z_m \circ z_m) = \theta_{hk}.$$

Поэтому $z_m(h) = f(l) = \theta_{hk}(l) = \theta_{lq}(l) = q$. То есть луч $q$ получается из луча $l$ зеркальным отражением в прямой $m$. Следовательно, биссектриса угла $\angle hq$ лежит на той же прямой $m$, что и биссектриса угла $\angle lk$. Необходимость утверждения теоремы доказана.

Докажем его достаточность. Пусть биссектрисы углов $\angle lk$ и $\angle hq$ лежат на одной прямой. Обозначим эту прямую через $m$. Тогда $z_m(h) = q$ и $z_m(l) = k$. Вновь рассмотрим отображение $f = z_m \circ \theta_{kh} \circ z_m = \theta_{hk}$ и вычислим $\theta_{hk}(l)$:

$$\theta_{hk}(l) = f(l) = z_m(\theta_{kh}(z_m(l))) = z_m(\theta_{kh}(k)) = z_m(h) = q.$$

Полученное соотношение $\theta_{hk}(l) = q$ вместе с теоремой 7.3 дают требуемый результат $\theta_{hk} = \theta_{lq}$. $\square$

Теорема 8.2. *Из равенства $\theta_{hk} = \theta_{lq}$ вытекает $\theta_{hl} = \theta_{kq}$ и, наоборот, из $\theta_{hl} = \theta_{kq}$ вытекает $\theta_{hk} = \theta_{lq}$.*

Теорема 8.3. *Любые два поворота плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$ перестановочны:* $\theta_{hk} \circ \theta_{lq} = \theta_{lq} \circ \theta_{hk}$.

Теорема 8.2 легко выводится из теоремы 8.1. Она является аналогом теоремы 4.1 из третьей главы. А теорема 8.3 является аналогом теоремы 4.3 из третьей главы. Из нее вытекает коммутативность (абелевость) группы поворотов плоскости $\alpha$ вокруг точки $O$ (см. определение 4.3 в третьей главе). Следующая теорема является еще одним следствием из теоремы 8.1.

Теорема 8.4. *Из равенства $\theta_{hk} = \theta_{lq}$ вытекает конгруэнтность углов $\angle hk \cong \angle lq$.*

Упражнение 8.1. *Используя теорему 8.1, докажите теоремы 8.2 и 8.4.*

Упражнение 8.2. *Пользуясь аналогией между поворотами $\theta_{hk}$ на плоскости и конгруэнтными переносами $p_{AB}$ на прямой, докажите теорему 8.3.*

## § 9. Поворот пространства вокруг прямой.

Пусть $\theta_{hk} : \alpha \to \alpha$ — поворот плоскости $\alpha$ на угол $\angle hk$ вокруг точки $O$. Плоскость $\alpha$ разбивает пространство $\mathbb{E}$ на два полупространства $\alpha_+$ и $\alpha_-$. Положим $\beta = \alpha$, $\alpha_+ = \beta_+$ и $\alpha_- = \beta_-$. Применив теорему 5.5, мы получим отображение $\theta_{hk} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Проведем из точки $O$ прямую $c$, перпендикулярную плоскости $\alpha$. Эта прямая называется *осью поворота*, а само отображение $\theta_{hk} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ называется *поворотом вокруг оси $c$ на угол $\angle hk$*.

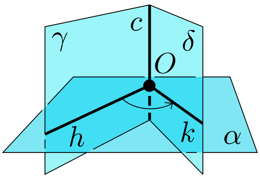



*Рис. 9.1*

Луч $h$ имеет с осью поворота $c$ общую точку $O$. Проведем плоскость $\gamma$ через луч $h$ и прямую $c$. Аналогичным образом через луч $k$ и прямую $c$ проведем плоскость $\delta$. Плоскости $\gamma$ и $\delta$ перпендикулярны плоскости $\alpha$, они пересекаются по прямой $c$ и задают двугранный угол с ребром $c$, для которого угол $\angle hk$ в плоскости $\alpha$ служит линейным углом.

Всякий двугранный угол в пространстве задает отображение поворота пространства вокруг оси. Действительно, пусть задан двугранный угол с ребром $c$, полученный как пересечение двух замкнутых полупространств $\overline{\gamma_+} \cap \overline{\delta_-}$. Положим $c = d$ и обозначим через $c_+$ и $d_+$ стороны этого угла. В качестве отображения $f: c \to d$ возьмем тождественное отображение $\mathrm{id}: c \to c$. Применение теоремы 5.4 позволяет продолжить его до отображения $f: \gamma \to \delta$, переводящего полуплоскость $c_+$ в $d_+$, а полуплоскость $c_-$ в $d_-$. Затем применение теоремы 5.5 определяет дальнейшее продолжение $f$ до отображения $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, переводящего $\gamma_+$ в $\delta_+$ и $\gamma_-$ в $\delta_-$.

Упражнение 9.1. *Покажите, что изложенная выше конструкция отображения $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, связанная с двугранным углом, дает тот же результат, что и предыдущая конструкция, продолжающая поворот плоскости вокруг точки до поворота пространства вокруг оси.*

Повороты пространства вокруг заданной оси наследуют все свойства поворотов плоскости вокруг заданной точки.

Теорема 9.1. *Пусть $\theta_{hk}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — поворот пространства вокруг некоторой оси $c$, отличный от тождественного отображения $(h \neq k)$. Тогда множество неподвижных точек отображения $\theta_{hk}$ совпадает с осью поворота $c$.*

Теорема 9.2. *Пусть $h$ и $k$ — две полуплоскости, имеющие прямую $c$ в качестве общей границы. Существует ровно два отображения конгруэнтного перенесения $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, которые оставляют неподвижными точки прямой $c$ и переводят полуплоскость $h$ в полуплоскость $k$. Первое из них $f = \theta_{hk}$ — это поворот вокруг оси c, а второе $f = z_\gamma$ — зеркальное отражение в плоскости $\gamma$, которая содержит биссектрису двугранного угла, образованного полуплоскостями $h$ и $k$.*

**Замечание**. Под *биссектрисой двугранного угла* понимается полуплоскость, ограниченная ребром этого угла и содержащая биссектрису любого из его линейных углов. Биссектриса разделяет двугранный угол на два двугранных угла, линейные углы которых конгруэнтны.

В теореме 9.2, как и в теореме 7.2, возможны особые случаи, когда полуплоскости $h$ и $k$ лежат в одной плоскости. Если $h$ и $k$ совпадают, то поворот $\theta_{hk}$ есть тождественное отображение: $\theta_{hk} = \mathrm{id}$. Если $h$ и $k$ — две противоположные полуплоскости на одной плоскости, то поворот $\theta_{hk}$ совпадает с зеркальным отражением в прямой $c$, разделяющей $h$ и $k$: $\theta_{hk} = z_c$.

Теорема 9.3. *Повороты пространства вокруг фиксированной оси и отображения зеркального отражения в плоскостях, проходящих через эту ось, обладают следующими свойствами:*

$$\theta_{kl} \circ \theta_{hk} = \theta_{hl}, \qquad \theta_{hk} \circ z_\alpha = z_\alpha \circ \theta_{kh},$$

$$z_\alpha \circ z_\alpha = \mathrm{id}, \qquad z_\alpha \circ z_\beta = \theta_{hk}, \quad \text{где} \quad h \subset \beta,\ k = z_\alpha(h).$$

Теорема 9.4. *Из равенства $\theta_{hk} = \theta_{lq}$ вытекает $\theta_{hl} = \theta_{kq}$ и, наоборот, из $\theta_{hl} = \theta_{kq}$ вытекает $\theta_{hk} = \theta_{lq}$.*

Теорема 9.5. *Любые два поворота пространства вокруг одной и той же оси перестановочны: $\theta_{hk} \circ \theta_{lq} = \theta_{lq} \circ \theta_{hk}$.*

Упражнение 9.2. *Сравните теоремы 9.1, 9.2, 9.3, 9.4 и 9.5 с соответствующими теоремами для поворотов плоскости и предложите план их доказательства.*

Теорема 9.6. *Пусть $\theta_{hk}$ и $\theta_{lq}$ — два поворота, оси которых $c_1$ и $c_2$ не совпадают, но пересекаются в точке $O$. Тогда композиция $\theta_{hk} \circ \theta_{lq}$ есть некоторый поворот $\theta_{rp}$ вокруг некоторой третьей оси $c_3$, проходящей через точку $O$.*

Док-во. Проведем через пару пересекающихся прямых $c_1$ и $c_2$ плоскость $\beta$. Прямая $c_1$ разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Обозначим одну из этих полуплоскостей через $h$ и положим $k = \theta_{hk}(h)$. Полуплоскости $h$ и $k$ задают двугранный угол с ребром $c_1$. Обозначим через $\alpha$ плоскость, содержащую его биссектрису. Тогда зеркальное отражение $z_\alpha$ переводит полуплоскость $h$ в полуплоскость $k$. Это позволяет применить четвертое соотношение из теоремы 9.3 для того, чтобы разложить поворот $\theta_{hk}$ в композицию двух зеркальных отражений по формуле $\theta_{hk} = z_\alpha \circ z_\beta$. Далее используем это разложение в следующих вычислениях:

$$\theta_{hk} \circ \theta_{lq} = z_\alpha \circ z_\beta \circ \theta_{lq} = z_\alpha \circ (z_\beta \circ \theta_{lq}) = z_\alpha \circ (\theta_{ql} \circ z_\beta).$$

Плоскость $\beta$ по построению содержит ось второго поворота $c_2$, поэтому мы применили второе соотношение теоремы 9.3 в форме $z_\beta \circ \theta_{lq} = \theta_{ql} \circ z_\beta$. Теперь, повторив использованный выше прием для поворота $\theta_{ql}$, получим разложение $\theta_{ql} = z_\gamma \circ z_\beta$. Для исходной композиции $\theta_{hk} \circ \theta_{lq}$ это дает

$$\theta_{hk} \circ \theta_{lq} = z_\alpha \circ (z_\gamma \circ z_\beta \circ z_\beta) = z_\alpha \circ z_\gamma \circ (z_\beta \circ z_\beta) = z_\alpha \circ z_\gamma.$$

Плоскость $\alpha$ содержит прямую $c_1$, но не содержит $c_2$. Плоскость $\gamma$, наоборот, содержит $c_2$, но не содержит $c_1$. Поэтому эти плоскости не совпадают, но имеют общую точку $O$. Обозначим через $c_3$ прямую, возникающую в их пересечении. Ясно, что $O \in c_3$. Теперь для композиции $z_\alpha \circ z_\beta$ в силу четвертого соотношения из теоремы 9.3 выводим $z_\alpha \circ z_\beta = \theta_{rp}$, где $\theta_{rp}$ есть некоторый поворот вокруг оси $c_3$. Отсюда $\theta_{hk} \circ \theta_{lq} = \theta_{rp}$, что завершает доказательство теоремы. □

Соединим первое соотношение из теоремы 9.3 с теоремой 9.6. Это дает следующий важный результат.

Теорема 9.7. *Композиция произвольных двух поворотов пространства, оси которых имеют общую точку $O$, есть поворот вокруг оси, проходящей через точку $O$.*

## § 10. Теорема о разложении вращений.

Выше мы рассмотрели несколько видов конкретных отображений конгруэнтного перенесения пространства. Это повороты вокруг оси, зеркальные отражения в плоскости и в прямой, а также отображение инверсии относительно точки. Все они обладают одним общим свойством: имеют неподвижные точки.

Определение 10.1. Отображение конгруэнтного перенесения пространства $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, оставляющее неподвижной точку $O$, то есть такое, что $f(O) = O$, называется *вращением пространства вокруг точки* $O$.

Пусть $f$ и $g$ — два отображения конгруэнтного перенесения пространства. Их композиция $f \circ g$ также есть отображение конгруэнтного перенесения пространства. Если $f$ и $g$ — вращения вокруг точки $O$, то $f \circ g$ также есть вращение вокруг этой точки.

Теорема 10.1. *Всякое вращение пространства $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ вокруг точки $O$ есть поворот вокруг некоторой оси, проходящей через точку $O$, т. е. $f = \theta_{hk}$, либо есть композиция такого поворота с зеркальным отражением в некоторой плоскости, содержащей точку $O$, т. е. $f = z_\alpha \circ \theta_{hk}$.*

Понятие *поворот* в формулировке этой теореме трактуется расширительно: тождественное отображение и зеркальное отражение в некоторой прямой считаются поворотами (см. замечание к теореме 9.2). Для доказательства теоремы 10.1 нам потребуются две вспомогательные леммы.

Лемма 10.1. *Пусть $M$ — некоторая точка, лежащая в плоскости треугольника $ABC$. Если для точки $X$ в пространстве выполнены соотношения $[XA] \cong [MA]$, $[XB] \cong [MB]$ и $[XC] \cong [MC]$, то точка $X$ совпадает с точкой $M$.*

Док-во. Если допустить, что $X \neq M$, то из соотношений $[XA] \cong [MA]$, $[XB] \cong [MB]$ и $[XC] \cong [MC]$ в силу теоремы 2.1 получаем, что точки $A$, $B$ и $C$ лежат в плоскости серединных перпендикуляров отрезка $[MX]$. Обозначим эту плоскость $\alpha$. Тогда в силу теоремы 6.1 имеем $X = z_\alpha(M)$, где $z_\alpha$ — зеркальное отражение в плоскости $\alpha$. Но точка $M$ по условию теоремы лежит в плоскости $\alpha$, поэтому $z_\alpha(M) = M$. Отсюда $X = M$ вопреки сделанному допущению $X \neq M$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 10.2. *Пусть $M$ — некоторая точка, не лежащая в плоскости треугольника $ABC$. В пространстве имеется ровно одна точка $X$, отличная от точки $M$, для которой $[XA] \cong [MA]$, $[XB] \cong [MB]$ и $[XC] \cong [MC]$. Она получается из $M$ в результате зеркального отражения в плоскости треугольника $ABC$.*

Док-во. Обозначим плоскость треугольника $ABC$ через $\alpha$ и положим $X = z_\alpha(M)$. Требуемые соотношения $[XA] \cong [MA]$, $[XB] \cong [MB]$ и $[XC] \cong [MC]$ вытекают из того, что отображение зеркального отражения $z_\alpha$ является отображением конгруэнтного перенесения пространства. Существование искомой точки $X$ доказано.

Покажем единственность точки $X \neq M$, удовлетворяющей соотношениям $[XA] \cong [MA]$, $[XB] \cong [MB]$ и $[XC] \cong [MC]$. Из этих соотношений и теоремы 2.1 получаем, что точки $A$, $B$ и $C$ лежат в плоскости серединных перпендикуляров отрезка $[MX]$. Значит, в силу теоремы 6.1 имеем $X = z_\alpha(M)$. Этим соотношением точка $X$ определяется однозначно. $\square$

Док-во теоремы 10.1. Пусть отображение $f$, являющееся вращением вокруг точки $O$, отлично от тождественного. Покажем, что либо оно само, либо его композиция с зеркальным отражением в некоторой плоскости имеет еще одну неподвижную точку $Z$, отличную от $O$.

Рассмотрим всевозможные пары точек $X$ и $f(X)$, где $X \neq O$. Если $X = f(X)$, то искомая неподвижная точка найдена. Если же $X \neq f(X)$, то построим плоскость серединных перпендикуляров для отрезка $[Xf(X)]$. Из $[OX] \cong [f(O)f(X)]$ в силу неподвижности точки $O$ получаем $[OX] \cong [Of(X)]$. Тогда по теореме 2.1 точка $O$ лежит в плоскости серединных перпендикуляров для отрезка $[Xf(X)]$. То есть любые две плоскости серединных перпендикуляров для отрезков вида $[X f(X)]$ имеют общую точку $O$. Возможен случай, когда все такие плоскости совпадают. Обозначим общую плоскость серединных перпендикуляров для всех отрезков $[X f(X)]$ через $\alpha$. В этом случае $f$ есть зеркальное отражение в плоскости $\alpha$ и мы имеем $f = z_\alpha \circ \mathrm{id}$. А тождественное отображение трактуется как тривиальная разновидность поворота вокруг оси.

Теперь рассмотрим случай, когда найдутся две точки $X$ и $Y$, для которых плоскости серединных перпендикуляров отрезков $[X f(X)]$ и $[Y f(Y)]$ не совпадают. Эти плоскости имеют общую точку $O$, следовательно, они пересекаются по некоторой прямой $a$. Выберем точку $Z \neq O$ на этой прямой. Тогда

$$[ZX] \cong [Z f(X)], \qquad [ZY] \cong [Z f(Y)], \qquad [ZO] \cong [Z f(O)].$$

Первые два соотношения вытекают из теоремы 2.1, а последнее есть тривиальное следствие из $f(O) = O$. Далее из того, что $f$ есть конгруэнтное перенесение пространства, выводим

$$\begin{aligned} [ZX] &\cong [f(Z) f(X)],\\ [ZY] &\cong [f(Z) f(Y)],\\ [ZO] &\cong [f(Z) f(O)]. \end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{Z} = f(Z)$ и, сравнив полученные наборы соотношений, находим

$$\begin{aligned} [Z f(X)] &\cong [\tilde{Z} f(X)],\\ [Z f(Y)] &\cong [\tilde{Z} f(Y)],\\ [Z f(O)] &\cong [\tilde{Z} f(O)]. \end{aligned} \tag{10.1}$$

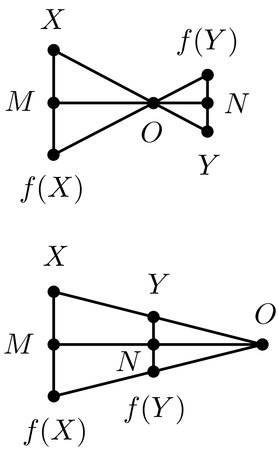


*Рис. 10.1*

Чтобы применить одну из лемм 10.1 либо 10.2, докажем, что точки $X$, $Y$ и $O$ не лежат на одной прямой. Если допустить, что эти точки лежат на одной прямой, то точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(O)$ также лежат на одной прямой (см. теорему 5.1), и мы получаем ситуацию, изображенною на одном из рисунков 10.1. Все пять точек $X$, $Y$, $f(X)$, $f(Y)$ и $O$ лежат в одной плоскости. При этом из $[OX] \cong [Of(X)]$ и $[OY] \cong [Of(Y)]$ заключаем, что треугольники $XOf(X)$ и $YOf(Y)$ являются равнобедренными. Их медианы $[OM]$ и $[ON]$ лежат на одной прямой, поскольку они являются биссектрисами одного угла, либо биссектрисами двух вертикальных углов. Они же являются и высотами в соответствующих треугольниках, поэтому прямая $MN$ есть общий серединный перпендикуляр для отрезков $[Xf(X)]$ и $[Yf(Y)]$, которые лежат в одной плоскости. Проведем из точки $O$ перпендикуляр к плоскости треугольников $XOf(X)$ и $YOf(Y)$. Через него и прямую $MN$ можно провести плоскость $\beta$, которая (в силу теоремы 3.1) будет общей плоскостью серединных перпендикуляров для отрезков $[Xf(X)]$ и $[Yf(Y)]$. Но мы выбрали случай, когда плоскости серединных перпендикуляров для $[Xf(X)]$ и $[Yf(Y)]$ не совпадают. Поэтому наше допущение о том, что точки $X$, $Y$ и $O$ лежат на одной прямой, было неверным.

Теперь, доказав, что точки $X$, $Y$ и $O$ не лежат на одной прямой, вернемся к соотношениям (10.1). В силу теоремы 5.1 точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(O)$ также не лежат на одной прямой. Обозначим через $\beta$, плоскость треугольника $f(X)f(Y)f(O)$. Если $Z \in \beta$, то опираясь на соотношения (10.1), применим лемму 10.1. Она дает $Z = \tilde{Z} = f(Z)$, то есть $Z \neq O$ — искомая неподвижная точка отображения $f$. Если $Z \notin \beta$, то применима лемма 10.2. В этом случае $Z = \tilde{Z}$ либо точки $Z$ и $\tilde{Z}$ зеркально симметричны относительно плоскости $\beta$. Если $Z = \tilde{Z}$, то $Z$ вновь оказывается неподвижной точкой для $f$. Если же $Z \neq \tilde{Z}$, то $Z$ — неподвижная точка для отображения $z_\beta \circ f$, которое также является вращением вокруг точки $O$.

Обозначим $g = f$ в первом случае и $g = z_\beta \circ f$ во втором. Из $g(O) = O$ и $g(Z) = Z$ в силу теоремы 2.1 из третьей главы заключаем, что все точки прямой $OZ$ остаются неподвижными при действии отображения $g$. Пусть $h$ — некоторая произвольная полуплоскость, имеющая прямую $OZ$ в качестве своей границы. Положим $k = g(h)$ и применим теорему 9.2. В силу этой теоремы $g$ есть поворот вокруг прямой $OZ$, переводящий полуплоскость $h$ в полуплоскость $k$, либо $g$ есть зеркальное отражение в плоскости $\delta$, содержащей биссектрису двугранного угла, образованного полуплоскостями $h$ и $k$. Отсюда для исходного отображения $f$ получаем следующие четыре возможных варианта разложения:

$$f = \theta_{hk}, \qquad f = z_\beta \circ \theta_{hk}, \qquad f = z_\delta, \qquad f = z_\beta \circ z_\delta.$$

Если реализовался первый либо второй вариант, то доказательство теоремы завершено. Для третьего варианта мы можем записать $f = z_\delta \circ \mathrm{id}$, поэтому здесь доказательство теоремы также завершено. Остается четвертый вариант. Плоскости $\beta$ и $\delta$ имеют общую точку $O$, следовательно, $\beta = \delta$, либо они пересекаются по некоторой прямой $b$. Если $\delta = \beta$, то $f = z_\beta \circ z_\beta = \mathrm{id}$. Если же $\delta \neq \beta$, то применимо четвертое соотношение из теоремы 9.3. Для $f$ оно дает $f = z_\beta \circ z_\beta = \theta_{lq}$, где $\theta_{lq}$ — поворот вокруг прямой $b = \beta \cap \delta$. Теорема 10.1 полностью доказана. □

## § 11. Группа вращений и группа поворотов пространства.

Теорема 10.1, доказанная в предыдущем параграфе, имеет важное следствие. Из нее вытекает, что всякое отображение вращения вокруг неподвижной точки биективно. Действительно, поворот вокруг оси и зеркальное отражение в плоскости суть биективные отображения, а композиция двух биекций есть биекция. Отсюда получаем, что множество вращений пространства вокруг фиксированной точки $O$ есть группа относительно операции взятия композиции. Эта группа называется *группой вращений пространства.*

Согласно теореме 9.6 множество поворотов вокруг различных осей, проходящих через фиксированную точку $O$, также есть группа относительно операции взятия композиции. Эта группа называется *группой поворотов пространства.*

Теорема 10.1 определяет разделение вращений на *четные* и *нечетные.* Чистые повороты относят к *четным* вращениям, а зеркальные отражения в плоскостях и их композиции с поворотами — к *нечетным.* Одно и то же вращение не может быть одновременно четным и нечетным. Действительно, из $f = \theta_{hk}$ и $f = z_\beta \circ \theta_{lq}$ вытекало бы $z_\beta = \theta_{hk} \circ \theta_{ql} = \theta_{rp}$, что невозможно.

Упражнение 11.1. *Покажите, что композиция двух четных вращений и композиция двух нечетных вращений суть четные вращения, а композиция четного вращения с нечетным есть нечетное вращение.*

## § 12. Ортогональная проекция на прямую.

Пусть $a$ — некоторая прямая в пространстве. Выбрав произвольную точку $X$, не лежащую на прямой $a$, опустим из точки $X$ перпендикуляр $[XY]$ на прямую $a$. Основание такого перпендикуляра (точку $Y$) называют *ортогональной проекцией* точки $X$ на прямую $a$. Согласно теореме 6.5 из третьей главы задание точки $X$ однозначно фиксирует положение ее проекции $Y$, что позволяет задать отображение $\pi_a : \mathbb{E} \to a$. Для точек самой прямой $Y \in a$ при этом полагают $\pi_a(Y) = Y$. Отображение $\pi_a$ называют *ортогональным проектированием* на прямую $a$.

Ортогональное проектирование не является конгруэнтным перенесением. Более того, различные точки $X_1 \neq X_2$ оно может отображать в одну $\pi_a(X_1) = \pi_a(X_2)$. Пусть $\alpha$ — некоторая плоскость, перпендикулярная прямой $a$. Согласно определению 1.1 такая плоскость пересекает прямую $a$ в некоторой точке $A$. Сравнив это определение с конструкцией отображения $\pi_a$, видим, что все точки плоскости $\alpha$ переводятся отображением проектирования $\pi_a$ в точку $A$.

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — две различные плоскости, перпендикулярные прямой $a$ и пересекающие прямую $a$ в точках $A$ и $B$. Такие плоскости не имеют общих точек. Действительно, существование точки $M \in \alpha \cap \beta$ означало бы, что $\pi_a(M) = A$ и $\pi_a(M) = B$. Но результат ортогонального проектирования точки $M$ на прямую $a$ определен однозначно, поэтому $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Теорема 12.1. *Пусть $\pi_a$ — ортогональное проектирование на некоторую прямую $a$. Если для каких-либо двух точек $A$ и $B$ их проекции совпадают, то вся прямая $AB$ проектируется в одну точку $C = \pi_a(A) = \pi_a(B)$ на прямой $a$.*

Док-во. Соотношение $C = \pi_a(A)$ означает, что $C = A$ либо $C$ — есть основание перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на прямую $a$. В любом из этих двух случаев, точка $A$ лежит в плоскости $\alpha$, проходящей через точку $C$ и перпендикулярной прямой $a$ (см. теоремы 1.2 и 1.4). Аналогичные рассуждения дают $B \in \alpha$. Следовательно, вся прямая $AB$ лежит в плоскости $\alpha$, которая целиком проектируется в точку $C \in a$. $\square$

Теорема 12.2. *Пусть $\pi_a$ — ортогональное проектирование на прямую $a$ и пусть $b$ — некоторая прямая, которая не проектируется в одну точку на прямой $a$. Тогда для точек прямой $b$ справедливы следующие утверждения:*

(1) *из $A \neq B$ вытекает $\pi_a(A) \neq \pi_a(B)$;*
(2) *из $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$ вытекает $(\pi_a(A) \blacktriangleright \pi_a(B) \blacktriangleleft \pi_a(C))$.*

Док-во. Первый пункт этой теоремы является немедленным следствием предыдущей теоремы 12.1.

Рассмотрим второй пункт. Пусть $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$. Введем следующие обозначения для проекций точек $A$, $B$ и $C$:

$$\tilde{A} = \pi_a(A), \qquad \tilde{B} = \pi_a(B), \qquad \tilde{C} = \pi_a(C).$$

Проведем из точки $\tilde{B} \in a$ плоскость $\beta$, перпендикулярную прямой $a$. Такая плоскость существует и единственна (см. теорему 1.2). Точки $B$ и $\tilde{B}$ лежат в этой плоскости. Из $\tilde{A} \neq \tilde{B}$ и из $\tilde{C} \neq \tilde{B}$ заключаем, что четыре точки $A$, $C$, $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$ не лежат в плоскости $\beta$. Плоскость $\beta$ разбивает множество точек, не лежащих в этой плоскости, на два открытых полупространства $\beta_+$ и $\beta_-$. Полупространства $\beta_+$ и $\beta_-$ возникают как классы эквивалентности, когда точки $X$ и $Y$ считаются эквивалентными, если $X = Y$, либо если отрезок $[XY]$ не пересекается с плоскостью $\beta$ (см. § 6 из второй главы).

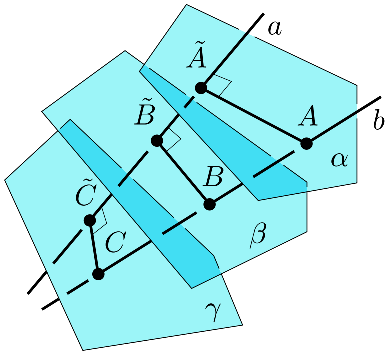



*Рис. 12.1*

В нашем случае точки $A$ и $\tilde{A}$ лежат на плоскости $\alpha$, проведенной через точку $\tilde{A} \in a$ перпендикулярно прямой $a$. Плоскость $\alpha$ не имеет общих точек с плоскостью $\beta$. Поэтому, либо $A = \tilde{A}$, либо, если $A \neq \tilde{A}$, отрезок $[A\tilde{A}]$ целиком лежит в плоскости $\alpha$ и не пересекается с плоскостью $\beta$. Значит, $A \sim \tilde{A}$. Аналогичным образом получаем $C \sim \tilde{C}$. Но из $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$ вытекает, что отрезок $[AC]$ пересекает плоскость $\beta$ в точке $B$. Поэтому точки $A$ и $C$ не эквивалентны. Теперь из $A \sim \tilde{A}$ и $C \sim \tilde{C}$ получаем, что точки $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$ также не эквивалентны. Поэтому отрезок $[\tilde{A}\tilde{C}]$ пересекает плоскость $\beta$ в точке $\tilde{B}$, откуда сразу же получаем требуемое соотношение $(\tilde{A} \blacktriangleright \tilde{B} \blacktriangleleft \tilde{C})$. $\square$

В качестве следствия доказанной теоремы 12.2 получаем, что если отображение $\pi_a$ не проектирует прямую $b$ в одну точку, то всякий луч, лежащий на прямой $b$, проектируется в луч, а всякий отрезок прямой $b$ проектируется в отрезок.

## § 13. Ортогональная проекция на плоскость.

Пусть $\alpha$ — некоторая плоскость и пусть $X$ — некоторая точка вне этой плоскости. Опустим из точки $X$ перпендикуляр на плоскость $\alpha$ и обозначим основание такого перпендикуляра через $\pi_\alpha(X)$. Для точек, лежащих в плоскости $\alpha$, положим $\pi_\alpha(Y) = Y$. В силу теоремы 3.4 это определяет отображение $\pi_\alpha\colon \mathbb{E} \to \alpha$, которое называется *ортогональным проектированием* на плоскость $\alpha$.

Ортогональное проектирование на плоскость $\pi_\alpha$ также не является конгруэнтным перенесением. Оно может отображать различные точки в одну. Пусть $Y$ — некоторая точка плоскости $\alpha$ и пусть $a$ — перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный из точки $Y$ (см. теорему 1.3). Тогда все точки прямой $a$ и только они проектируются в одну точку $Y \in \alpha$.

Теорема 13.1. *Пусть $\pi_\alpha$ — ортогональное проектирование на некоторую плоскость $\alpha$. Если для каких-либо двух точек $A$ и $B$ их проекции совпадают, то вся прямая $AB$ проектируется в одну точку $C = \pi_a(A) = \pi_a(B)$ на плоскости $\alpha$ и является перпендикуляром к этой плоскости, проведенным из точки $C$.*

Док-во. Соотношение $C = \pi_\alpha(A)$ означает, что $C = A$ либо $C$ — есть основание перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на плоскость $\alpha$. В любом из этих двух случаев, точка $A$ лежит на перпендикуляре $a$ к плоскости $\alpha$, проведенном из точки $C$ (см. теорему 1.3). Аналогичные рассуждения для точки $B$ дают $B \in a$. Следовательно, прямая $AB$ совпадает с прямой $a$, которая целиком проектируется в точку $C \in \alpha$. $\square$

Теорема 13.2. *Пусть $\pi_\alpha$ — ортогональное проектирование на плоскость $\alpha$ и пусть $b$ — некоторая прямая, которая не проектируется в одну точку. Тогда прямая $b$ проектируется в некоторую прямую $a$ на плоскости $\alpha$ и для ее точек справедливы следующие утверждения:*

(1) *из $A \neq B$ вытекает $\pi_a(A) \neq \pi_a(B)$;*
(2) *из $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$ вытекает $(\pi_a(A) \blacktriangleright \pi_a(B) \blacktriangleleft \pi_a(C))$.*

Док-во. Прямая $b$ не проектируется в одну точку, поэтому на ней найдутся две точки $A$ и $B$, проекции которых различны. Положим $\tilde{A} = \pi_\alpha(A)$ и $\tilde{B} = \pi_\alpha(B)$, после чего прямую $\tilde{A}\tilde{B}$ обозначим через $a$. Из точек $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ проведем перпендикуляры $m$ и $n$ к плоскости $\alpha$. Согласно теореме 3.2 через два таких перпендикуляра проходит плоскость $\beta$, перпендикулярная плоскости $\alpha$. Её пересечение с плоскостью $\alpha$ есть прямая $a$, поскольку точки $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ принадлежат $\alpha \cap \beta$.

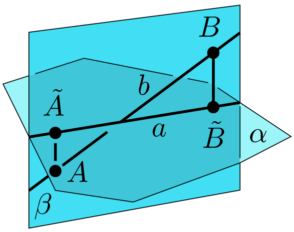



*Рис. 13.1*

Точки $A$ и $B$ лежат на перпендикулярах $m$ и $n$, следовательно, они принадлежат плоскости $\beta$. Отсюда получаем $b \subset \beta$. Пусть $X$ — некоторая произвольная точка плоскости $\beta$, не лежащая на прямой $a$. Оставаясь в плоскости $\beta$ опустим из точки $X$ перпендикуляр $[X\tilde{X}]$ на прямую $a$. Из $\alpha \perp \beta$ в силу определений 3.1 и 1.1 и в силу теоремы 6.5 из третьей главы выводим, что отрезок $[X\tilde{X}]$ есть перпендикуляр, опущенный из точки $X$ на плоскость $\alpha$. Значит, вся плоскость $\beta$ проектируется в прямую $a$, причем сужение отображения $\pi_\alpha : \mathbb{E} \to \alpha$ на плоскость $\beta$, совпадает с сужением отображения $\pi_a : \mathbb{E} \to a$ на ту же плоскость. Это сводит теорему 13.2 к уже доказанной теореме 12.2. $\square$

В качестве дополнительного факта при доказательстве теоремы 13.2 мы показали, что плоскость $\beta$, перпендикулярная плоскости $\alpha$, проектируется отображением $\pi_\alpha$ в прямую $a = \alpha \cap \beta$. Этот результат можно несколько усилить.

Теорема 13.3. *Плоскость $\beta$ проектируется отображением $\pi_\alpha\colon \mathbb{E} \to \alpha$ в прямую $a \subset \alpha$ тогда и только тогда, когда $\beta \perp \alpha$.*

Следующая теорема хорошо известна. Она называется теоремой *о трех перпендикулярах.*

Теорема 13.4. *Прямая $b$, пересекающая плоскость $\alpha$ в точке $O$, перпендикулярна прямой $c$, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку $O$, тогда и только тогда, когда ее проекция $a = \pi_\alpha(b)$ перпендикулярна $c$.*

Док-во. Если прямая $b$ лежит в плоскости $\alpha$, то $b = a$. Тогда утверждение теоремы тривиальным образом выполнено.

Пусть прямая $b$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $O$, но не лежит целиком на этой плоскости. Выберем точку $B \neq O$ на этой прямой и положим $A = \pi_\alpha(B) \in a$. Прямая $AB$ есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный из точки $A$. Из точки $O$ проведем еще один перпендикуляр к плоскости $\alpha$. Обозначим его $d$. Согласно теореме 3.2 через два перпендикуляра к плоскости $\alpha$ можно провести плоскость $\beta$, перпендикулярную плоскости $\alpha$. Точки $O$ и $B$ лежат в плоскости $\beta$, поэтому $b \subset \beta$. Аналогичным образом, из $O \in \beta$ и $A \in \beta$ вытекает $a \subset \beta$.

Из $d \perp \alpha$ следует, что прямая $d$ перпендикулярна любой прямой, лежащей на плоскости $\alpha$ и проходящей через точку $O$. В частности, $d \perp c$. Теперь, если $b \perp c$, то из $c \perp b$ и $c \perp d$ в силу теоремы 1.1 получим $c \perp \beta$, откуда $c \perp a$.

Наоборот, если $c \perp a$, то, дополнив это условием $c \perp d$, вновь получим $c \perp \beta$, откуда $c \perp b$. $\square$

Теорема 13.5. *Пусть $\pi_\alpha$ — ортогональное проектирование на плоскость $\alpha$ и пусть $\beta$ — некоторая плоскость, которая не проектируется в прямую. Тогда для точек плоскости $\beta$ справедливы следующие утверждения:*

(1) *из $A \neq B$ вытекает $\pi_a(A) \neq \pi_a(B)$;*
(2) *если точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой, то их проекции также не лежат на одной прямой;*
(3) *если точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, то их проекции также лежат на одной прямой, причем, если $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$, то $(\pi_\alpha(A) \blacktriangleright \pi_\alpha(B) \blacktriangleleft \pi_\alpha(C))$.*
(4) *если $b$ — некоторая прямая в плоскости $\beta$ и если точки $A$ и $C$ лежат по разные стороны от прямой $b$, то их проекции $\pi_\alpha(A)$ и $\pi_\alpha(C)$ лежат по разные стороны от прямой $a = \pi_\alpha(b)$.*

Док-во. Если допустить, что проекции двух различных точек $A$ и $B$ совпадают, то прямая $AB$, их соединяющая, является перпендикуляром к плоскости $\alpha$. Плоскость $\beta$, содержащая перпендикуляр к плоскости $\alpha$, оказывается перпендикулярной $\alpha$ (см. определение 3.1). Поэтому она проектируется в прямую, вопреки условию теоремы. Полученное противоречие доказывает пункт (1) в теореме.

Пусть $A$, $B$ и $C$ — точки плоскости $\beta$, не лежащие на одной прямой. Обозначим через $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ их проекции:

$$\tilde{A} = \pi_\alpha(A), \qquad \tilde{B} = \pi_\alpha(B), \qquad \tilde{C} = \pi_\alpha(C).$$

В силу доказанного уже пункта (1) теоремы совпадения $\tilde{A} = \tilde{B}$, $\tilde{B} = \tilde{C}$ и $\tilde{A} = \tilde{C}$ невозможны. Проведем из точек $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ два перпендикуляра к плоскости $\alpha$. Согласно теореме 3.2 через эти два перпендикуляра проходит плоскость $\gamma$, перпендикулярная плоскости $\alpha$. Она содержит в себе прямую $\tilde{A}\tilde{B}$.

Теперь, если допустить, что точки $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ лежат на одной прямой, то точка $\tilde{\mathrm{C}}$, лежит на прямой $\tilde{A}\tilde{B}$, которая содержится в плоскости $\gamma$. Из $\gamma \perp \alpha$ в этой ситуации получаем, что перпендикуляр к плоскости $\alpha$, проведенный из точки $\tilde{C}$, лежит в плоскости $\gamma$. Следовательно, все три точки $A$, $B$ и $C$ лежат в плоскости $\gamma$, откуда вытекает совпадение $\beta = \gamma$ и перпендикулярность $\beta \perp \alpha$. Но это невозможно, ибо по условию теоремы плоскость $\beta$ не проектируется в прямую. Полученное противоречие доказывает второй пункт теоремы.

Перейдем к доказательству третьего пункта теоремы. Обозначим через $b$ прямую, на которой лежат точки $A$, $B$ и $C$. В силу уже доказанного пункта (1) теоремы прямая $b$ не проектируется в точку. Поэтому утверждение третьего пункта вытекает из теоремы 13.2.

Пусть точки $A$ и $C$ лежат в плоскости $\beta$ по разные стороны от прямой $b$. Тогда отрезок $[AC]$ пересекает прямую $b$ в некоторой своей внутренней точке $B$, то есть $(A \blacktriangleright B \blacktriangleleft C)$. Переходя к проекциям $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$, в силу третьего пункта теоремы заключаем, что отрезок $[\tilde{A}\tilde{C}]$, лежащий в плоскости $\alpha$, пересекает прямую $a = \pi_\alpha(b)$ в своей внутренней точке $\tilde{B}$. Это доказывает четвертый пункт теоремы и завершает доказательство теоремы в целом. $\square$

Теорема 13.5 имеет важное следствие. Если плоскости $\alpha$ и $\beta$ не перпендикулярны, то отображение $\pi_\alpha : \mathbb{E} \to \alpha$ переводит всякую прямую $b$ из плоскости $\beta$ в некоторую прямую $a$ на плоскости $\alpha$, причем так, что полуплоскости, ограниченные прямой $b$ на плоскости $\beta$ проектируются в полуплоскости, ограниченные прямой $a$ в плоскости $\alpha$.

Упражнение 13.1. *Докажите теорему 13.3.*

## § 14. Сдвиг на вектор вдоль прямой.

Пусть $a$ — некоторая прямая в плоскости $\alpha$. Она разбивает плоскость $\alpha$ на две полуплоскости $a_+$ и $a_-$. Пусть $\beta = \alpha$ и $b = a$. Положим также $b_+ = a_+$ и $b_- = a_-$, а в качестве отображения $f : a \to a$ выберем отображение $p_{\mathbf{c}}$, где $\mathbf{c}$ — некоторый скользящий вектор на прямой $a$. Отображение $p_{\mathbf{c}}$, называемое конгруэнтным переносом на вектор, было определено в § 3 в третьей главе. Применение теоремы 5.4 позволяет продолжить $p_{\mathbf{c}}$ до отображения $p_{a\mathbf{c}} : \alpha \to \alpha$, которое называется *сдвигом в плоскости $\alpha$ на вектор $\mathbf{c}$ вдоль прямой $a$.*

Плоскость $\alpha$ разбивает пространство на два полупространства $\alpha_+$ и $\alpha_-$. Положим $\beta = \alpha$, $\beta_+ = \alpha_+$ и $\beta_- = \alpha_-$, в качестве отображения $f : \alpha \to \alpha$ выберем отображение $p_{a\mathbf{c}}$, после чего применим теорему 5.5. В результате этого получится отображение $p_{a\mathbf{c}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, которое называется *сдвигом пространства на вектор $\mathbf{c}$ вдоль прямой $a$.*

Плоскость $\alpha$, содержащая прямую $a$, играет вспомогательную роль в конструкции отображения $p_{a\mathbf{c}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 14.1. *Сужение отображения $p_{a\mathbf{c}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ на любую плоскость $\beta$, которая содержит прямую $a$, совпадает со сдвигом плоскости $\beta$ на вектор $\mathbf{c}$ вдоль прямой $a$.*

Док-во. Рассмотрим отображение $p_{a\mathbf{c}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, построенное при помощи вспомогательной плоскости $\alpha$, которая содержит прямую $a$. Пусть $\beta$ — некоторая другая плоскость, содержащая прямую $a$, и пусть $X$ — точка плоскости $\beta$, не лежащая в плоскости $\alpha$. Рассмотрим сначала случай, когда плоскость $\beta$ не перпендикулярна плоскости $\alpha$. Обозначим через $\alpha_+$ полупространство с граничной плоскостью $\alpha$, в котором лежит точка $X$. Далее обозначим через $b_+$, ту из полуплоскостей на плоскости $\beta$, которая ограничена прямой $a$ и в которой лежит точка $X$. Тогда $b_+ = \beta \cap \alpha_+$. Пусть $Y = p_{a\mathbf{c}}(X)$. Следуя общей схеме продолжения отображений конгруэнтного перенесения (см. в § 5), для построения точки $Y$ опустим перпендикуляр из точки $X$ на плоскость $\alpha$. В результате этого получится точка $\tilde{X} = \pi_\alpha(X)$ и отрезок $[X\tilde{X}]$. Применим к точке $\tilde{X}$ отображение $p_{a\mathbf{c}} : \alpha \to \alpha$ и получим точку $\tilde{Y} = p_{a\mathbf{c}}(\tilde{X})$. Проведем из точки $\tilde{Y}$ перпендикуляр к плоскости $\alpha$ и на таком перпендикуляре отложим отрезок $[Y\tilde{Y}] \cong [X\tilde{X}]$, причем так, чтобы точка $Y$ лежала в полупространстве $a_+$. Этим положение точки $Y = p_{a\mathbf{c}}(X)$ определяется однозначно.

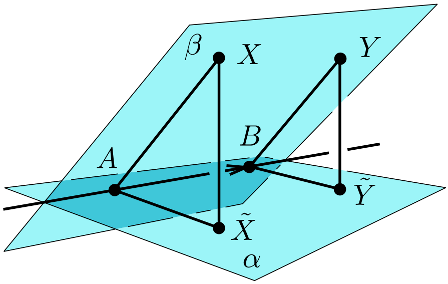



*Рис. 14.1*

Но отображение $p_{a\mathbf{c}} : \alpha \to \alpha$ само является продолжением отображения $p_{\mathbf{c}} : a \to a$ с прямой $a$ на плоскость $\alpha$. В силу теоремы 13.5 полуплоскость $b_+$ отображается при ортогональном проектировании $\pi_\alpha : \mathbb{E} \to \alpha$ в некоторую полуплоскость с границей $a$. Обозначим ее $a_+$. Из $\tilde{X} = \pi_\alpha(X)$ получаем $\tilde{X} \in a_+$. Для нахождения точки $\tilde{Y} = p_{a\mathbf{c}}(\tilde{X})$ применим процедуру продолжения отображения $p_{\mathbf{c}} : a \to a$ (см. теорему 5.4, ее доказательство и предшествующий ей комментарий в § 5). В плоскости $\alpha$ опустим из точки $\tilde{X}$ перпендикуляр на прямую $a$. Основание такого перпендикуляра обозначим $A$. Пусть $B = p_{\mathbf{c}}(A)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ есть геометрическая реализация скользящего вектора $\mathbf{c}$ на прямой $a$ (см. § 3 и § 4 в третьей главе). Определив положение точки $B$, проведем из нее в плоскости $\alpha$ перпендикуляр к прямой $a$, на котором отложим отрезок $[B\tilde{Y}] \cong [A\tilde{X}]$, причем так, чтобы точка $\tilde{Y}$ лежала в полуплоскости $a_+$. Это фиксирует положение точки $\tilde{Y} = p_{a\mathbf{c}}(\tilde{X})$. По построению она оказывается ортогональной проекцией точки $Y$ на плоскость $\alpha$, то есть мы имеем $\tilde{Y} = \pi_\alpha(Y)$.

Теперь рассмотрим плоскости треугольников $AX\tilde{X}$ и $BY\tilde{Y}$, которые конгруэнтны в силу $[X\tilde{X}] \cong [Y\tilde{Y}]$, $[A\tilde{X}] \cong [B\tilde{Y}]$ и в силу того, что углы $\angle A\tilde{X}X$ и $\angle B\tilde{Y}Y$ прямые. Обозначим первую из плоскостей $\gamma$, а вторую — $\delta$. Плоскость $\gamma$ содержит прямую $X\tilde{X}$, которая перпендикулярна плоскости $\alpha$. Следовательно, $\gamma \perp \alpha$ (см. определение 3.1). В силу $\tilde{X} = \pi_\alpha(X)$ прямая $A\tilde{X}$ является проекцией прямой $AX$. Это позволяет применить теорему о трех перпендикулярах (см. теорему 13.4 выше). Из нее и из перпендикулярности прямых $A\tilde{X}$ и $a$ выводим $a \perp AX$. Теперь из $a \perp A\tilde{X}$ и $a \perp AX$ получаем $a \perp \gamma$. Таким образом, мы видим, что полуплоскости $b_+$ и $a_+$ определяют двугранный угол с ребром $a = b$, а плоскость $\gamma$, перпендикулярная $a$, отсекает в нем угол $\angle XA\tilde{X}$, который является линейным углом этого двугранного угла.

Повторим приведенные выше рассуждения применительно к плоскости $\delta$. Это дает $a \perp \delta$. То есть плоскость $\delta$ отсекает еще один линейный угол в двугранном угле, образованном полуплоскостями $b_+$ и $a_+$. Из конгруэнтности треугольников $AX\tilde{X}$ и $BY\tilde{Y}$ вытекает конгруэнтность углов $\angle YB\tilde{Y}$ и $\angle XA\tilde{X}$. Теперь применение теоремы 4.1 и учет того, что точка $Y$ лежит в полупространстве $\alpha_+$, позволяют заключить, что угол $\angle YB\tilde{Y}$ совпадает с линейным углом двугранного угла, образованного полуплоскостями $b_+$ и $a_+$. Отсюда $Y \in b_+ \subset \beta$. Значит, отрезки $[AX]$ и $[BY]$ лежат в плоскости $\beta$ по одну сторону от прямой $b = a$. Они перпендикулярны прямой $a$ и конгруэнтны друг другу в силу конгруэнтности треугольников $AX\tilde{X}$ и $BY\tilde{Y}$. Для $X$ и $Y$ полученные результаты запишем так:

(1) точки $X$ и $Y$ лежат в плоскости $\beta$ по одну сторону от прямой $a$;
(2) отрезки $[AX] \cong [BY]$ перпендикулярны прямой $a$;
(3) вектор $\overrightarrow{AB}$ есть геометрическая реализация скользящего вектора $\mathbf{c}$.

Перечисленные условия как раз и означают, что точка $Y$ получается из точки $X$ в результате применения отображения $p_{a\mathbf{c}}\colon \beta \to \beta$, сдвигающего плоскость $\beta$ на вектор $\mathbf{c}$ вдоль $a$.

Случай $\beta \perp \alpha$ оказывается заметно проще уже рассмотренного случая. Здесь точки $X$ и $Y$ сразу проектируются в точки $A$ и $B$ на прямой $a$, то есть $A = \pi_\alpha(X)$ и $B = \pi_\alpha(Y)$, что в силу конструкции отображения $p_{a\mathbf{c}}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ обеспечивает выполнение условий (2) и (3). Соотношение $Y \in \beta$ вытекает из $\beta \perp \alpha$ и $[YB] \perp \alpha$ в силу определения 3.1. А тот факт, что точки $X$ и $Y$ лежат по одну сторону от прямой $a$ следует из того, что они лежат по одну сторону от плоскости $\alpha$ по построению отображения $p_{a\mathbf{c}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Значит, условие (1) в случае $\beta \perp \alpha$ также выполнено и точка $Y$ есть результат применения сдвига $p_{a\mathbf{c}}\colon \beta \to \beta$ к точке $X$. Теорема доказана. $\square$

Отображения сдвига вдоль одной и той же прямой $a$ наследуют свойства отображений сдвига на самой этой прямой, которые рассмотрены § 3 и в § 4 третьей главы. Они перестановочны и из равенства $\mathbf{d} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$ вытекает соотношение

$$p_{a\mathbf{d}} = p_{a\mathbf{c}} \circ p_{a\mathbf{e}}.$$

Сдвиг на нулевой вектор оказывается тождественным отображением: $p_{a\mathbf{0}} = \mathrm{id}$. Сдвиги вдоль прямых на ненулевые вектора составляют отдельную разновидность отображений конгруэнтного перенесения. При $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ отображение $p_{a\mathbf{c}}$ нельзя свести к вращению вокруг какой-либо точки $O$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 14.2. *При* $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *отображение сдвига* $p_{a\mathbf{c}}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *не имеет неподвижных точек.*

Пусть $\mathbf{c}$ — некоторый ненулевой скользящий вектор на прямой $a$. Выберем точку $A$, не лежащую на этой прямой, после чего через точку $A$ и прямую $a$ проведем плоскость $\alpha$. Положим $B = p_{a\mathbf{c}}(A)$. Согласно теореме 14.1 точка $B$ принадлежит плоскости $\alpha$. Обозначим через $b$ прямую $AB$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{BA}$. Обозначим через $\mathbf{d}$ скользящий вектор на прямой $b$, соответствующий геометрическому вектору $\overrightarrow{BA}$. Тогда, очевидно, $A = p_{b\mathbf{d}}(B)$, в силу чего точка $A$ оказывается неподвижной точкой для композиции $f = p_{b\mathbf{d}} \circ p_{a\mathbf{c}}$. Согласно теореме 10.1 отображение $f$ есть поворот пространства вокруг некоторой оси, либо $f$ есть композиция такого поворота с зеркальным отражением в некоторой плоскости. Оказывается, в данном случае всегда реализуется лишь первый вариант, а именно, композиция $f = p_{b\mathbf{d}} \circ p_{a\mathbf{c}}$ есть поворот вокруг оси, проходящей через точку $A$ и перпендикулярной плоскости $\alpha$. Это утверждение можно немного усилить.

Теорема 14.3. *Пусть* $p_{a\mathbf{c}}$ *и* $p_{b\mathbf{d}}$ *— два отображения сдвига на вектора* $\mathbf{c}$ *и* $\mathbf{d}$ *вдоль прямых* $a$ *и* $b$. *Если их композиция* $f = p_{b\mathbf{d}} \circ p_{a\mathbf{c}}$ *имеет неподвижную точку* $O$, *то через прямые* $a$ *и* $b$ *проходит некоторая плоскость* $\alpha$, *а само отображение* $f$ *есть поворот вокруг оси, проходящей через точку* $O$ *и перпендикулярной плоскости* $\alpha$.

Теорема 14.4. *Пусть* $p_{a\mathbf{m}}$, *и* $p_{b\mathbf{n}}$ *и* $p_{c\mathbf{k}}$ *— три отображения сдвига на вектора* $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ *и* $\mathbf{k}$ *вдоль прямых* $a$, $b$ *и* $c$. *Если их композиция* $f = p_{c\mathbf{k}} \circ p_{b\mathbf{n}} \circ p_{a\mathbf{m}}$ *имеет неподвижную точку* $O$, *то эта композиция есть поворот вокруг некоторой оси, проходящей через точку* $O$.

Мы не станем здесь доказывать теоремы 14.3 и 14.4, оставив это читателю в качестве упражнения. Дело в том, что после введения аксиомы A20 формулировки этих теорем существенно упрощаются. Доказательства соответствующих упрощенных теорем, опирающиеся на аксиому A20, будут приведены в шестой главе.

Упражнение 14.1. *Докажите теорему 14.2, основываясь на теореме 14.1.*

Упражнение 14.2. *Докажите теоремы 14.3 и 14.4*

Теоремы 14.3 и 14.4, по существу, отличаются лишь числом отображений сдвига в композиции. Оказывается, это число может быть произвольным. Пользуясь теоремами 9.6, 14.2 и 14.4, по индукции можно доказать следующий факт.

Теорема 14.5. *Пусть $f = f_1 \circ \ldots \circ f_n$ — композиция $n$ отображений конгруэнтного перенесения пространства, каждое из которых представляет собой сдвиг на некоторый вектор вдоль некоторой прямой. Если такая композиция имеет неподвижную точку $O$, то она есть поворот пространства вокруг некоторой прямой, проходящей через точку $O$.*

## § 15. Движения и конгруэнтность сложных геометрических фигур.

Теорема 15.1. *Всякое отображение конгруэнтного перенесения пространства $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ есть композиция $f = g \circ p_{a\mathbf{c}}$, где $g$ — вращение вокруг некоторой точки $O$, а $p_{a\mathbf{c}}$ — сдвиг на вектор $\mathbf{c}$ вдоль некоторой прямой $a$.*

Док-во. Если отображение $f$ имеет неподвижную точку $O$, то отображение $f$ само является вращением вокруг этой точки. В этом случае выберем нулевой вектор $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ на произвольной прямой $a$ и положим $f = g$. Из $p_{a\mathbf{c}} = \mathrm{id}$ вытекает требуемое разложение $f = g \circ p_{a\mathbf{c}}$.

Пусть $f$ не имеет неподвижных точек. Выберем произвольную точку $A$ и положим $O = f(A)$. Тогда $O \neq A$. Проведем прямую $AO$, которую обозначим через $a$. На ней рассмотрим вектор $\mathbf{c} = \overrightarrow{AO}$. Отображение сдвига $p_{a\mathbf{c}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ также переводит точку $A$ в точку $O$. Это отображение биективно и обратным для него служит сдвиг на противоположный вектор $\overrightarrow{OA} = -\mathbf{c}$ вдоль прямой $a$. Положим $g = f \circ p_{a\mathbf{c}}^{-1}$. Легко проверить, что точка $O$ является неподвижной точкой отображения $g$, то есть $g$ есть вращение вокруг точки $O$. Из $g = f \circ p_{a\mathbf{c}}^{-1}$ легко извлекается требуемое разложение $f = g \circ p_{a\mathbf{c}}$ для $f$. $\square$

Из теорем 10.1 и 15.1 следует, что произвольное отображение конгруэнтного перенесения пространства $f$ допускает разложение в композицию одного из следующих двух видов: $f = \theta_{hk} \circ p_{a\mathbf{c}}$ либо $f = z_\beta \circ \theta_{hk} \circ p_{a\mathbf{c}}$. В силу существования таких разложений отображение $f$ биективно, поскольку зеркальные отражения в плоскости, повороты вокруг осей и сдвиги вдоль прямых суть биективные отображения.

Пусть $f$ и $g$ — два отображения конгруэнтного переноса. Пользуясь биективностью $f$, вычислим обратное отображение $f^{-1}$ и построим композицию $g' = f \circ g \circ f^{-1}$. Такая процедура называется *сопряжением* отображения $g$ при помощи $f$. Отображение $g'$, полученное в результате сопряжения, называется *сопряженным* отображению $g$.

Теорема 15.2. *Пусть $f$ и $g$ — два отображения конгруэнтного переноса и пусть $g' = f \circ g \circ f^{-1}$ получено сопряжением $g$ при помощи $f$. Тогда*

(1) *если $g = z_\beta$ — зеркальное отражение в плоскости $\beta$, то $g'$ — зеркальное отражение в плоскости $f(\beta)$;*
(2) *если $g = \theta_{hk}$ — поворот вокруг оси $a$ на угол $\angle hk$, то $g'$ есть поворот вокруг оси $f(a)$ на угол, конгруэнтный углу $\angle hk$;*
(3) *если $g = p_{a\mathbf{c}}$ — сдвиг на вектор $\mathbf{c}$ вдоль прямой $a$, то $g'$ есть сдвиг на вектор $f(\mathbf{c})$ вдоль прямой $f(a)$.*

Упражнение 15.1. *Докажите теорему 15.2. Для этого воспользуйтесь тем, что если $g$ переводит точку $A$ в точку $B$, то* *сопряженное отображение* $g' = f \circ g \circ f^{-1}$ *переводит точку* $f(A)$ *в точку* $f(B)$.

Определение 15.1. Отображение конгруэнтного перенесения пространства $f$, которое раскладывается в композицию поворота вокруг оси и сдвига вдоль прямой (т. е. $f = \theta_{hk} \circ p_{a\mathbf{c}}$), называется *четным*. Если же в разложении $f$ присутствует зеркальное отражение в плоскости (т. е. $f = z_\beta \circ \theta_{hk} \circ p_{a\mathbf{c}}$), то оно называется *нечетным*.

Одно и то же отображение конгруэнтного переноса не может быть одновременно четным и нечетным. Для отображений, являющихся вращениями вокруг некоторой неподвижной точки, этот факт мы установили в § 11. В общем случае он требует отдельного доказательства. Докажем его методом от противного. Допустим, что $f$ — отображение конгруэнтного переноса, имеющее разложения двух видов:

$$f = g_A \circ p_{a\mathbf{c}}, \qquad f = \tilde{g}_B \circ p_{b\mathbf{d}}. \tag{15.1}$$

Здесь $g_A$ — четное вращение вокруг неподвижной точки $A$, а $\tilde{g}_B$ — нечетное вращение вокруг неподвижной точки $B$. Из соотношений (15.1) вытекает соотношение $g_A \circ p_{a\mathbf{c}} \circ p_{b\mathbf{e}} = \tilde{g}_B$, где через $\mathbf{e}$ обозначен вектор, противоположный вектору $\mathbf{d}$.

Рассмотрим сначала случай $A = B$. Здесь мы имеем соотношение $g_A \circ p_{a\mathbf{c}} \circ p_{b\mathbf{e}} = \tilde{g}_A$. При выполнении этого соотношения композиция сдвигов $p_{a\mathbf{c}} \circ p_{b\mathbf{e}}$ имеет неподвижную точку $A$. Применив теорему 14.3, получаем $p_{a\mathbf{c}} \circ p_{b\mathbf{e}} = \theta_{hk}$, где $\theta_{hk}$ — поворот вокруг некоторой прямой, проходящей через точку $A$. Композиция $g_A$ с таким поворотом не меняет четности, поэтому равенство $g_A \circ \theta_{hk} = \tilde{g}_A$ противоречит нечетности $\tilde{g}_A$. Полученное противоречие доказывает невозможность одновременного выполнения соотношений (15.1) в случае $A = B$.

Теперь пусть $A \neq B$. В этом случае рассмотрим сдвиг вдоль прямой $AB$ на вектор $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB}$. Обозначим его $p_{r\mathbf{s}}$. Тогда

$B = p_{r\mathbf{s}}(A)$. Пользуясь этим, положим $g_B = p_{r\mathbf{s}} \circ g_A \circ p_{r\mathbf{s}}^{-1}$. Отображение $g_B$, полученное из $g_A$ в результате сопряжения, является вращением вокруг неподвижной точки $B$, имеющим ту же четность, что и $g_A$. Это вытекает из теоремы 15.2. Из $g_B = p_{r\mathbf{s}} \circ g_A \circ p_{r\mathbf{s}}^{-1}$ для исходного отображения $g_A$ получаем

$$g_A = p_{r\mathbf{s}}^{-1} \circ g_B \circ p_{r\mathbf{s}} = g_B \circ (g_B^{-1} \circ p_{r\mathbf{s}}^{-1} \circ g_B) \circ p_{r\mathbf{s}}.$$

Отображение $g_B^{-1} \circ p_{r\mathbf{s}}^{-1} \circ g_B$ получается из $p_{r\mathbf{s}}^{-1}$ в результате сопряжения при помощи $g_B^{-1}$. Согласно теореме 15.2 оно является сдвигом на вектор $\mathbf{v}$ вдоль некоторой прямой $u$. Тогда для $g_A$ имеем $g_A = g_B \circ p_{u\mathbf{v}} \circ p_{r\mathbf{s}}$. Подставим это в соотношение $g_A \circ p_{a\mathbf{c}} \circ p_{b\mathbf{e}} = \tilde{g}_B$, вытекающее из (15.1), что дает

$$p_{u\mathbf{v}} \circ p_{r\mathbf{s}} \circ p_{a\mathbf{c}} \circ p_{b\mathbf{e}} = g_B^{-1} \circ \tilde{g}_B. \tag{15.2}$$

В силу полученного соотношения (15.2) композиция четырех сдвигов в левой части этого соотношения имеет неподвижную точку $B$. Применив теорему 14.5 для случая $n = 4$, получим, что эта композиция есть поворот вокруг некоторой оси, проходящей через точку $B$. Отсюда имеем $\tilde{g}_B = g_B \circ \theta_{hk}$, что противоречит нечетности вращения $\tilde{g}_B$. Таким образом, и в случае $A \neq B$ соотношения (15.1) не могут быть выполнены одновременно.

Определение 15.2. Отображение конгруэнтного перенесения пространства $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ называется *движением*, если оно является четным.

Понятие конгруэнтности отрезков и углов является базовым понятием, оно входит в формулировку аксиом. Конгруэнтность же треугольников — это определяемое понятие. Переходя от треугольников к более сложным геометрическим фигурам, мы могли бы каждый раз формулировать определение конгруэнтности таких фигур. Однако, наличие конгруэнтных переносов избавляет нас от такой необходимости.

Определение 15.3. Две геометрические фигуры $\Phi_1$ и $\Phi_2$ называются *конгруэнтными*, если существует отображение конгруэнтного перенесения $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, осуществляющее взаимно однозначное соответствие между точками этих фигур.

Разделение конгруэнтных переносов на четные и нечетные позволяет уточнить понятие конгруэнтности фигур.

Определение 15.4. Две геометрические фигуры $\Phi_1$ и $\Phi_2$ называются *строго конгруэнтными* или *собственно конгруэнтными*, если существует движение, осуществляющее взаимно однозначное соответствие между точками этих фигур.

Определение 15.5. Две геометрические фигуры $\Phi_1$ и $\Phi_2$ называются *зеркально конгруэнтными* или *взаимно зеркальными*, если существует нечетное отображение конгруэнтного перенесения $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, осуществляющее взаимно однозначное соответствие между точками этих фигур.

Упражнение 15.2. *Покажите, что для треугольников три определения 15.3, 15.4 и 15.5 эквивалентны определению 5.1 из третьей главы.*

ГЛАВА V

# АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ.

## § 1. Сравнение отрезков.

Определение 1.1. Пусть $[AB]$ и $[CD]$ — два произвольных отрезка. Скажем, что отрезок $[AB]$ *меньше* отрезка $[CD]$, и запишем это в виде $[AB] < [CD]$, если внутри отрезка $[CD]$ найдется точка $E$, такая, что $[AB] \cong [CE]$.

Теорема 1.1. *Бинарное отношение сравнения отрезков из определения 1.1 обладает следующими свойствами:*

(1) *условие* $[AB] < [CD]$ *исключает* $[AB] \cong [CD]$;
(2) *условие* $[AB] < [CD]$ *исключает* $[CD] < [AB]$;
(3) *из* $[AB] < [CD]$ *и* $[CD] < [EF]$ *вытекает* $[AB] < [EF]$;
(4) *если* $[\tilde{A}\tilde{B}] \cong [AB]$ *и* $[\tilde{C}\tilde{D}] \cong [CD]$, *то из* $[AB] < [CD]$ *вытекает* $[\tilde{A}\tilde{B}] < [\tilde{C}\tilde{D}]$;
(5) *для любых двух неконгруэнтных отрезков* $[AB]$ *и* $[CD]$ *всегда выполняется одно из двух условий* $[AB] < [CD]$ *или* $[CD] < [AB]$.

Док-во. Первый пункт теоремы является прямым следствием аксиомы A13. Действительно, одновременное выполнение условий $[AB] < [CD]$ и $[AB] \cong [CD]$ означало бы существование на луче $[CD\rangle$ двух точек $D$ и $E$, для которых $[AB] \cong [CD]$ и $[AB] \cong [CE]$, что противоречит указанной аксиоме.

Докажем второй пункт теоремы методом от противного. Допустим, что оба условия $[AB] < [CD]$ и $[CD] < [AB]$ выполнены одновременно. Тогда внутри отрезка $[CD]$ имеется точка $E$, а внутри отрезка $[AB]$ — точка $F$, такие, что выполняются следующие соотношения конгруэнтности отрезков:

$$[AB] \cong [CE], \qquad\qquad [CD] \cong [AF].$$

Пользуясь соотношением $[CD] \cong [AF]$, определим отображение конгруэнтного перенесения $f$, отображающее прямую $CD$ в прямую $AB$, для которого $f(C) = A$ и $f(D) = F$ (см. теоремы 2.1, 2.2 и § 3 из третьей главы). Обозначим $\tilde{E} = f(E)$. Тогда из $(C \blacktriangleright E \blacktriangleleft D)$ вытекает $(A \blacktriangleright \tilde{E} \blacktriangleleft F)$. При этом отрезки $[A\tilde{E}]$ и $[CE]$ конгруэнтны. В результате на луче $[AB\rangle$ мы получаем две точки $\tilde{E} \neq B$, для которых $[A\tilde{E}] \cong [CE]$ и $[AB] \cong [CE]$, что противоречит аксиоме A13. Полученное противоречие доказывает невозможность одновременного выполнения условий $[AB] < [CD]$ и $[CD] < [AB]$.

Теперь рассмотрим третий пункт теоремы. Соотношения $[AB] < [CD]$ и $[CD] < [EF]$ означают, что внутри отрезков $[CD]$ и $[EF]$ найдутся точки $M$ и $N$, такие, что

$$[AB] \cong [CM], \qquad\qquad [CD] \cong [EN].$$

Пользуясь вторым из этих соотношений, построим отображение конгруэнтного перенесения $f$, переводящее прямую $CD$ в прямую $EF$, для которого $f(C) = E$ и $f(D) = N$. С помощью отображения $f$ построим точку $K = f(M)$, лежащую внутри отрезка $[CN]$. Для нее $[EK] \cong [CM]$. Из этого соотношения и из $[AB] \cong [CM]$ получаем $[AB] \cong [EK]$. Из $(E \blacktriangleright K \blacktriangleleft N)$ и $(E \blacktriangleright N \blacktriangleleft F)$ вытекает $(E \blacktriangleright K \blacktriangleleft F)$ (см. лемму 3.2 из второй главы). Иными словами, точка $K$ лежит внутри отрезка $[EF]$ и $[AB] \cong [EF]$. Требуемое соотношение $[AB] < [EF]$ доказано.

Докажем четвертый пункт теоремы. Из $[AB] < [CD]$ вытекает существование внутри отрезка $[CD]$ точки $E$, для которой $[AB] \cong [CE]$. Пользуясь $[CD] \cong [\tilde{C}\tilde{D}]$, построим конгруэнтное перенесение $f$ прямой $CD$ в прямую $\tilde{C}\tilde{D}$, для которого

$f(C) = \tilde{C}$ и $f(D) = \tilde{D}$. Применив $f$ к точке $E$, построим точку $\tilde{E} = f(E)$, лежащую внутри отрезка $[\tilde{C}\tilde{D}]$, для которой $[CE] \cong [\tilde{C}\tilde{E}]$. Соединив это с $[\tilde{A}\tilde{B}] \cong [AB]$ и с $[AB] \cong [CE]$, получаем $[\tilde{A}\tilde{B}] \cong [\tilde{C}\tilde{E}]$. Соотношение $[\tilde{A}\tilde{B}] < [\tilde{C}\tilde{D}]$ доказано.

Для доказательства пятого пункта теоремы, применив аксиому A13, на луче $[CD\rangle$ отложим точку $E$, такую, что отрезок $[AB]$ конгруэнтен $[CE]$. Совпадение $D = E$ невозможно, ибо оно означало бы конгруэнтность отрезков $[AB]$ и $[CD]$. Поэтому точка $E$ может лежать внутри отрезка $[CD]$, либо вне этого отрезка. В первом случае $[AB] < [CD]$. Во втором случае $[CD] < [CE]$. Дополнив это соотношением $[AB] \cong [CE]$ и применив уже доказанный четвертый пункт теоремы, получим $[CD] < [AB]$. Теорема доказана. $\square$

Свойства (1)–(3) отношения сравнения отрезков очень похожи на соответствующие свойства отношения порядка (см. § 3 в первой главе). Отличие состоит лишь в том, что вместо $[AB] < [CD]$ исключает $[AB] = [CD]$ в первом свойстве записано $[AB] < [CD]$ исключает $[AB] \cong [CD]$. Это означает, что отношение сравнения является отношением порядка не на множестве отрезков, а на фактормножестве, состоящем из классов конгруэнтных отрезков. Следующие два свойства (4) и (5) означают, что фактормножество является линейно упорядоченным.

Соотношение сравнения $[AB] < [CD]$ иногда записывают как $[CD] > [AB]$ и говорят, что отрезок $[CD]$ *больше* отрезка $[AB]$. Запись $[AB] \leqslant [CD]$ или $[CD] \geqslant [AB]$ означает выполнение одного из двух условий: $[AB] < [CD]$ либо $[AB] \cong [CD]$.

Теорема 1.2. *Если точки $C$ и $D$ лежат внутри отрезка $[AB]$, то тогда $[CD] < [AB]$.*

Док-во. Введем на прямой $AB$ отношение порядка, полагая $A \prec B$ (см. § 4 во второй главе). Если точки $C$ и $D$ лежат внутри отрезка $[AB]$, то выполнено одно из двух условий:

$$A \prec C \prec D \prec B, \qquad\qquad A \prec D \prec C \prec B.$$

Рассмотрим случай, когда выполнено первое из них. Случай, когда выполнено второе, сводится этому случаю простым переобозначением точек $C$ и $D$. Из $A \prec C \prec D \prec B$ имеем $(A \blacktriangleright C \blacktriangleleft D)$ и $(A \blacktriangleright D \blacktriangleleft B)$. Из первого соотношения выводим $[CD] < [AD]$, из второго $[AD] < [AB]$. Теперь, применив третий пункт теоремы 1.1, получаем искомое $[CD] < [AB]$. Теорема доказана. $\square$

## § 2. Сравнение углов.

Определение 2.1. Пусть $\angle hk$ и $\angle lq$ — два произвольных угла. Скажем, что угол $\angle hk$ *меньше* угла $\angle lq$ и запишем это в виде $\angle hk < \angle lq$, если найдется луч $m$, исходящий из вершины угла $\angle lq$ и лежащий внутри этого угла, такой, что $\angle hk \cong \angle lm$.

Теорема 2.1. *Бинарное отношение сравнения углов обладает следующими пятью свойствами:*

(1) *условие $\angle hk < \angle lq$ исключает $\angle hk \cong \angle lq$;*
(2) *условие $\angle hk < \angle lq$ исключает $\angle lq < \angle hk$;*
(3) *из $\angle hk < \angle lq$ и $\angle lq < \angle mn$ вытекает $\angle hk < \angle mn$;*
(4) *если $\angle\tilde{h}\tilde{k} \cong \angle hk$ и $\angle\tilde{l}\tilde{q} \cong \angle lq$, то из $\angle hk < \angle lq$ вытекает соотношение $\angle\tilde{h}\tilde{k} < \angle\tilde{l}\tilde{q}$;*
(5) *для любых двух неконгруэнтных углов $\angle hk$ и $\angle lq$ выполнено одно из условий $\angle hk < \angle lq$ или $\angle lq < \angle hk$.*

Теорема 2.2. *Если лучи $l$ и $q$, исходящие из вершины угла $\angle hk$, лежат внутри этого угла, то тогда $\angle lq < \angle hk$.*

Упражнение 2.1. *Опираясь на аналогию с теоремами 1.1 и 1.2, докажите теоремы 2.1 и 2.2.*

В случае углов мы имеем два эталонных угла — прямой угол и развернутый. Всякий угол может быть включен в некоторый развернутый угол, поэтому всякий угол меньше развернутого. Сравнение с прямым углом разделяет углы, отличные от прямого, на два множества. Угол, который меньше прямого, принято называть *острым.* Угол, который больше прямого, называется *тупым.* В силу теоремы 2.1 любой острый угол меньше любого тупого угла.

Определение 2.2. Угол, смежный внутреннему углу треугольника, называется *внешним углом* этого треугольника.

Теорема 2.3. *Во всяком треугольнике каждый внутренний угол меньше любого внешнего угла, не смежного с ним.*

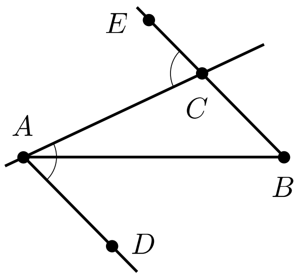



*Рис. 2.1*

Док-во. Рассмотрим треугольник $ABC$. Построим луч $[CE\rangle$, являющийся продолжением стороны $[BC]$ в этом треугольнике. Угол $\angle ACE$, смежный углу $\angle ACB$, будет внешним углом треугольника $ABC$. Сравним его с внутренним углом $\angle CAB$ в этом треугольнике. Прямая $AC$ разбивает плоскость треугольника $ABC$ на две полуплоскости, причем точки $E$ и $B$ лежат по разные стороны от этой прямой. Пользуясь аксиомой A16, в полуплоскости, содержащей точку $B$ построим луч $[AD\rangle$ так, чтобы угол $\angle CAD$ был конгруэнтен углу $\angle ACE$. Если допустить, что $\angle CAD \cong \angle CAB$ или $\angle CAD < \angle CAB$, то луч $[AD\rangle$ совпадает с лучом $[AB\rangle$ или же он лежит внутри угла $\angle CAB$. В любом из этих случаев луч $[AD\rangle$ должен иметь общую точку с отрезком $[BC]$ (см. лемму 6.2 во второй главе). В нашем же случае углы $\angle CAD$ и $\angle ACE$ являются внутренними накрест лежащими углами в пересечении прямой $AC$ с прямыми $AD$ и $BC$. Они конгруэнтны $\angle CAD \cong \angle ACE$, поэтому в силу теоремы 8.1 из третьей главы прямые $AD$ и $BC$ не имеют общих точек. Полученное противоречие доказывает требуемое сравнение $\angle CAB < \angle ACE$. $\square$

Теорема 2.4. *В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно, против большего угла лежит большая сторона.*

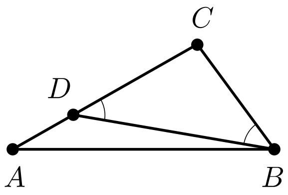



*Рис. 2.2*

Док-во. Рассмотрим треугольник $ABC$. Докажем сначала, что из условия $[AC] > [BC]$ вытекает соотношение $\angle ABC > \angle BAC$. Из $[AC] > [BC]$ следует, что внутри отрезка $[AC]$ найдется точка $D$, такая, что отрезок $[DC]$ конгруэнтен отрезку $[BC]$. Проведем отрезок $[BD]$ и рассмотрим треугольник $BCD$. В силу $[DC] \cong [BC]$ он равнобедренный. Следовательно, $\angle BDC \cong \angle DBC$.

По построению луч $[BD\rangle$ лежит внутри угла $ABC$. Поэтому $\angle ABC > \angle DBC$. С другой стороны, угол $\angle BDC$ есть внешний угол треугольника $ABD$. Применив теорему 2.3, получаем $\angle BDC > \angle BAC$. В итоге мы имеем три соотношения

$$\angle ABC > \angle DBC, \qquad \angle BDC \cong \angle DBC, \qquad \angle BDC > \angle BAC,$$

из которых в результате применения теоремы 2.1 выводим требуемое соотношение $\angle ABC > \angle BAC$. Одно утверждение теоремы доказано.

Обратное утверждение докажем методом от противного. Допустим, что соотношение $\angle ABC > \angle BAC$ выполнено, но соотношение $[AC] > [BC]$ не имеет места. Тогда $[AC] \cong [BC]$ либо $[AC] < [BC]$. Если $[AC] \cong [BC]$, то треугольник $ABC$ равнобедренный, откуда $\angle ABC \cong \angle BAC$, что противоречит $\angle ABC > \angle BAC$. Если же $[AC] < [BC]$, то в силу уже доказанного прямого утверждения теоремы $\angle ABC < \angle BAC$, что также противоречит $\angle ABC > \angle BAC$. Значит, из $\angle ABC > \angle BAC$ вытекает $[AC] > [BC]$. Теорема доказана. $\square$

Пусть точка $B$ лежит внутри отрезка $[AC]$ между точками $A$ и $C$. Отрезок $[AC]$ в этом случае составлен из двух отрезков

$[AB]$ и $[BC]$ (см. теоремы 3.1 и 3.2 во второй главе). Его иногда называют *суммой* отрезков $[AB]$ и $[BC]$. А отрезок $[BC]$ называют *разностью* отрезков $[AC]$ и $[AB]$.

Имея два совершенно произвольных отрезка $[MN]$ и $[PQ]$, мы можем отложить конгруэнтные им отрезки на одной прямой по разные стороны от точки $B$:

$$[MN] \cong [AB], \qquad\qquad [PQ] \cong [BC].$$

Тогда отрезок $[AC]$ называют суммой отрезков $[MN]$ и $[PQ]$. Такой отрезок определен неоднозначно, однако, все отрезки, реализующие сумму $[MN]$ и $[PQ]$, конгруэнтны.

Пусть $[MN] < [PQ]$. Отложим на некоторой прямой отрезок $[AC]$, конгруэнтный отрезку $[PQ]$. Тогда $[MN] < [AC]$ и внутри отрезка $[AC]$ есть точка $B$, такая, что $[AB] \cong [MN]$. При таком выборе $B$ отрезок $[BC]$ будет разностью отрезков $[PQ]$ и $[MN]$.

Теорема 2.5. *В произвольном треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны.*

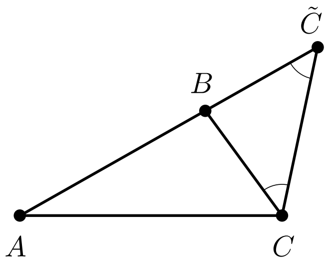



*Рис. 2.3*

Док-во. Рассмотрим треугольник $ABC$. Точка $B$ разделяет прямую $AB$ на два луча. Выберем луч, противоположный лучу $[BA\rangle$, и отложим на нем отрезок $[B\tilde{C}]$, конгруэнтный отрезку $[BC]$. Луч $[CB\rangle$ пересекает отрезок $[A\tilde{C}]$, поэтому он лежит внутри угла $\angle AC\tilde{C}$ (см. лемму 6.2 из второй главы). Отсюда возникает сравнение $\angle AC\tilde{C} > \angle BC\tilde{C}$. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике $CB\tilde{C}$ углы $\angle BC\tilde{C}$ и $\angle B\tilde{C}C$ конгруэнтны. Значит, $\angle AC\tilde{C} > \angle A\tilde{C}C$. Применив теорему 2.4 к треугольнику $AC\tilde{C}$, получаем $[A\tilde{C}] > [AC]$. По построению отрезок $[A\tilde{C}]$ есть сумма $[AB]$ и $[BC]$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.6. *В произвольном треугольнике по крайней мере два угла острые.*

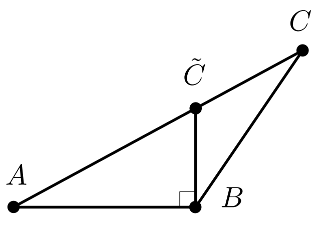



*Рис. 2.4*

Док-во. Рассмотрим треугольник $ABC$, в котором угол $\angle ABC$ тупой. Из точки $B$ проведем перпендикуляр к прямой $AB$. Поскольку тупой угол больше прямого, такой перпендикуляр пересечет сторону $AC$ в некоторой внутренней точке $\tilde{C}$. И мы получим треугольник $AB\tilde{C}$, в котором тупой угол заменен прямым, а угол при вершине $A$ остался прежним. Если этот угол также является тупым, то, повторив процедуру, его можно сделать прямым. Вывод: если в треугольнике есть два тупых угла или если в нем один угол тупой, а другой — прямой, то такой треугольник можно свести к треугольнику с двумя прямыми углами. А треугольник с двумя прямыми углами невозможен (см. теорему 8.2 из третьей главы). □

В силу доказанной теоремы 2.6 треугольники можно разделить на *остроугольные*, *прямоугольны* и *тупоугольные*. В остроугольном треугольнике все углы острые, в прямоугольном треугольнике имеется один прямой угол, а в тупоугольном треугольнике — один тупой угол.

В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*. Две другие стороны называются *катетами*. Из теорем 2.4 и 2.6 следует, что гипотенуза больше любого из катетов.

## § 3. Аксиоматика вещественных чисел.

Сравнение отрезков и углов, введенное определениями 1.1 и 2.1, дает лишь очень грубое представление о том, как соотносятся размеры сравниваемых объектов. Более точное их описание требует введения понятий длины отрезка и количественной меры угла. Для этого нам придется использовать некоторые факты из теории вещественных чисел.

Вещественные числа образуют множество $\mathbb{R}$, на котором определены две алгебраические операции — *сложение* и *умножение*. Базовые свойства вещественных чисел формулируются в виде семнадцати аксиом R1–R17. Вся теория вещественных чисел выводится из этих аксиом.

Аксиома R1. *Сложение вещественных чисел коммутативно, то есть $a + b = b + a$ для всех $a$ и $b$ из $\mathbb{R}$.*

Аксиома R2. *Сложение вещественных чисел ассоциативно, то есть $(a + b) + c = a + (b + c)$ для всех $a$, $b$ и $c$ из $\mathbb{R}$.*

Аксиома R3. *Существует число ноль ($0 \in \mathbb{R}$), такое, что $a + 0 = a$ для всех $a$ из $\mathbb{R}$.*

Можно доказать, что число 0 единственно. Действительно, если допустить существование второго нуля $\tilde{0}$, то $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ и $0 + \tilde{0} = 0$. Но тогда в силу аксиомы R1, получаем совпадение двух нулей: $\tilde{0} = \tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0} = 0$.

Аксиома R4. *Для всякого числа $a \in \mathbb{R}$ существует противоположное число $a' \in \mathbb{R}$, такое, что $a + a' = 0$.*

Для всякого $a \in \mathbb{R}$ противоположное число $a'$ единственно. Если допустить существование второго противоположного числа $\tilde{a}'$, то из аксиом R1, R2 и R3 выводится их совпадение:

$$a' = a' + 0 = a' + (a + \tilde{a}') = (a' + a) + \tilde{a}' = 0 + \tilde{a}' = \tilde{a}'.$$

Упражнение 3.1. *Пусть $a'$ — число, противоположное числу $a$. Докажите, что число, противоположное числу $a'$ совпадает с $a$, то есть $(a')' = a$.*

Упражнение 3.2. *Докажите, что число, противоположное нулю, совпадает с нулем:* $0' = 0$.

Понятие противоположного числа лежит в основе определения операции *вычитания*: $b - a = b + a'$. Кроме того, принято обозначать $a' = -a$ для единообразия.

Упражнение 3.3. *Докажите следующие соотношения:*

$$a - b = -(b - a), \qquad (a - b) + c = a + (c - b),$$
$$(a + b) - c = a + (b - c), \qquad (a - b) - c = a - (b + c).$$

Аксиома R5. *Умножение вещественных чисел коммутативно, то есть $a \cdot b = b \cdot a$ для всех $a$ и $b$ из $\mathbb{R}$.*

Аксиома R6. *Умножение вещественных чисел ассоциативно, то есть $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех $a$, $b$ и $c$ из $\mathbb{R}$.*

Аксиома R7. *Существует число единица ($1 \in \mathbb{R}$), такое, что $a \cdot 1 = a$ для всех $a$ из $\mathbb{R}$.*

Аксиома R8. *Для всякого числа $a \neq 0$ существует обратное число $a^* \in \mathbb{R}$, такое, что $a \cdot a^* = 1$.*

Упражнение 3.4. *Докажите единственность числа 1, а также единственность числа $a^*$ для заданного числа $a \neq 0$.*

Понятие обратного числа лежит в основе определения операции *деления*: $b : a = b \cdot a^*$. Для записи операции деления используется несколько вариантов:

$$b : a = b/a = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}.$$

Последняя форма записи связана с обозначением $a^* = a^{-1}$ для числа, обратного числу $a \neq 0$.

Аксиома R9. *Умножение и сложение вещественных чисел связаны дистрибутивным законом $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.*

Упражнение 3.5. *Докажите дистрибутивный закон, связывающий умножение с вычитанием:* $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$. *Выведите следующие правила вычислений с дробями:*

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{b\cdot c + a\cdot d}{a\cdot c}, \qquad \frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c} = \frac{b\cdot d}{a\cdot c}.$$

На множестве $\mathbb{R}$ определено отношение порядка, относительно которого вещественные числа оказываются линейно упорядоченным множеством (см. § 3 в первой главе).

Аксиома R10. *Для любых чисел $a$ и $b$ из $\mathbb{R}$ выполнено одно из соотношений $a < b$, $b < a$, либо $a = b$.*

Аксиома R11. *Соотношение $a < b$ исключает $a = b$.*

Аксиома R12. *Соотношение $a < b$ исключает $b < a$.*

Аксиома R13. *Из $a < b$ и $b < c$ вытекает $a < c$.*

Следующие две аксиомы определяют связь отношения порядка на множестве вещественных чисел с алгебраическими операциями сложения и умножения.

Аксиома R14. *Из $a < b$ вытекает $a + \mathrm{c} < b + c$.*

Аксиома R15. *Из $a < b$ и $0 < c$ вытекает $a\cdot c < b\cdot c$.*

Упражнение 3.6. *Докажите, что отношение порядка на множестве $\mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:*

(1) *из $a > b$ вытекает $-a < -b$;*
(2) *из $a < b$ и $c < 0$ вытекает $a\cdot c > b\cdot c$;*
(3) $1 > 0$;
(4) *из $a > b > 0$ вытекает $b^{-1} > a^{-1} > 0$.*

Натуральные числа получаются в результате сложения единиц: $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$, и т. д. Они составляют множество $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Дополнив $\mathbb{N}$ числом ноль и числами, противоположными натуральным, получим множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Дроби $n/m$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$, составляют множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Рассмотрим также дроби специального вида

$$r = \frac{n}{2^m}, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \text{ и } m \in \mathbb{N}.$$

Такие дроби составляют множество *двоично-рациональных чисел.* Множество двоично-рациональных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения, однако, оно не замкнуто относительно деления.

Аксиома R16. *Для всякого вещественного числа $\xi \in \mathbb{R}$ существует натуральное число $n \in \mathbb{N}$, такое, что $n > \xi$.*

Аксиома R16 известна как аксиома Архимеда. Она показывает, что всякое вещественное число можно оценить сверху натуральным. Эту оценку можно сделать двухсторонней.

Теорема 3.1. *Для всякого вещественного числа $\xi$ существует натуральное число $n \in \mathbb{N}$, такое, что $-n < \xi < n$.*

Док-во. Если $\xi = 0$, то можно взять $n = 1$. Если $\xi > 0$, то число $n$, даваемое аксиомой Архимеда R16, обеспечивает двухстороннюю оценку $-n < \xi < n$. Если $\xi < 0$, то применим аксиому Архимеда к числу $-\xi$. Полученное число $n$ в этом случае также обеспечивает двухстороннюю оценку. $\square$

Теорема 3.2. *Для всякого вещественного числа $\xi > 0$ существует натуральное число $m$, такое, что $2^{-m} < \xi$.*

Док-во. Рассмотрим число $\xi^{-1}$ и применим к нему аксиому Архимеда R16. В результате этого получим натуральное число $m$, такое, что $\xi^{-1} < m$. Воспользуемся неравенством $m < 2^m$, которое выполнено для всех натуральных $m \in \mathbb{N}$. Оно легко доказывается индукцией по $m$. Теперь из $\xi^{-1} < 2^m$ с учетом положительности $\xi$ выводим $\xi > 2^{-m}$, что и требовалось доказать. $\square$

Аксиома R17. *Пусть* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— две последовательности вещественных чисел, такие, что*

$$a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_1.$$

*Тогда существует число* $\xi \in \mathbb{R}$, *разделяющее эти две последовательности, то есть такое, что* $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Аксиома R17 — это аксиома Кантора. Она выражает свойство полноты вещественных чисел. Аксиома Кантора лежит в основе доказательства многих известных фактов из математического анализа (подробнее см. в [6]).

## § 4. Двоично-рациональные аппроксимации вещественных чисел.

Пусть $p$, $q$ и $\xi$ — три вещественных числа. Говорят, что числа $p$ и $q$ *приближают* (или *аппроксимируют*) число $\xi$, если выполнено неравенство

$$p \leqslant \xi \leqslant q.$$

Число $p$ называется *приближением снизу*, а число $q$ — *приближением сверху*. Разность $q - p$ называется *точностью приближения.*

Изучим вопрос о приближении вещественных чисел двоично-рациональными числами. Обозначим через $I(m,k)$ следующие полуоткрытые интервалы:

$$I(m,k) = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \quad \frac{k}{2^m} \leqslant x < \frac{k+1}{2^m}\right\}.$$

Целое число $k \in \mathbb{Z}$ назовем *номером* интервала, а натуральное число $m \in \mathbb{N}$ — его *порядком.*

Теорема 4.1. *При фиксированном $m \in \mathbb{N}$ всякое вещественное число $\xi$ попадает ровно в один из интервалов $I(m,k)$.*

Док-во. Интервалы $I(m,k_1)$ и $I(m,k_2)$ с различными номерами $k_1 \neq k_2$ не пересекаются. Поэтому число $\xi$, попав в один из интервалов, не может одновременно попасть и в другой.

Применив теорему 3.1 к числу $\xi$, находим, что существует натуральное $n$, такое, что $\xi$ попадает в интервал $(-n,n)$ между числами $-n$ и $n$. Но для такого интервала имеем

$$(-n,n) \subset \bigcup_{k=-2^m n}^{2^m n} I(m,k).$$

Поэтому $\xi$ содержится в одном из интервалов $I(m,k)$, объединение которых содержит интервал $(-n,n)$. $\square$

Доказанная теорема означает, что для всякого вещественного числа $\xi$ и натурального числа $m$ имеется однозначно определенное целое число $k_m$ и определяемые им двоично-рациональные числа $a_m$ и $b_m$, такие, что

$$\frac{k_m}{2^m} = a_m \leqslant \xi < b_m = \frac{k_m+1}{2^m}. \tag{4.1}$$

Числа $a_m$ и $b_m$ называются *двоично-рациональными приближениями* порядка $m$ для числа $\xi$.

Лемма 4.1. *Последовательности $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ двоично-рациональных приближений вещественного числа $\xi$ монотонны: $a_{m+1} \geqslant a_m$ и $b_{m+1} \leqslant b_m$. Последовательность $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется тогда и только тогда, когда само число $\xi$ является двоично-рациональным.*

Док-во. При увеличении номера $m$ на единицу интервал $I(m,k)$ разделяется на два не пересекающихся интервала следующего порядка: $I(m,k) = I(m+1,2k) \cup I(m+1,2k+1)$. Поэтому при переходе от $m$ к $m+1$ мы имеем $k_{m+1}=2k_m$ либо $k_{m+1}=2k_m+1$. Для $a_{m+1}$ и $b_{m+1}$ это дает

$$
\begin{aligned}
&a_{m+1}=a_m, && b_{m+1}=b_m-\frac{1}{2^{m+1}},\\
&a_{m+1}=a_m+\frac{1}{2^{m+1}}, && b_{m+1}=b_m.
\end{aligned}
$$

В любом из этих случаев условия монотонности $a_{m+1}\geqslant a_m$ и $b_{m+1}\leqslant b_m$ выполнены.

Рассмотрим случай, когда число $\xi$ является двоично-рациональным. Тогда $\xi$ можно записать в виде дроби

$$\xi=\frac{q}{2^n}=\frac{q\cdot 2^{m-n}}{2^m}. \tag{4.2}$$

Из (4.2) для $k_m$ при $m\geqslant n$ получаем $k_m=q\cdot 2^{m-n}$. Для чисел $a_m$ и $b_m$ при $m\geqslant n$ это дает

$$a_m=\xi, \qquad\qquad b_m=\xi+\frac{1}{2^m}.$$

То есть последовательность $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется на значении $a_m=\xi$ при $m\geqslant n$.

Пусть, наоборот, известно, что последовательность $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется при $m\geqslant n$. Пусть $a$ — значение, на котором стабилизируется эта последовательность. Тогда из (4.1) имеем

$$a\leqslant\xi<a+\frac{1}{2^m}. \tag{4.3}$$

Неравенства (4.3) легко трансформируются к виду

$$\frac{1}{2^m}>\xi-a\geqslant 0.$$

Если $\xi\neq a$, то $\xi-a\neq 0$ и мы приходим к противоречию с теоремой 3.2. Следовательно $\xi$ совпадает с двоично-рациональным числом $a$. Лемма доказана. $\square$

Упражнение 4.1. *Покажите, что вторая последовательность $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ не может стабилизироваться ни при каком выборе числа $\xi$.*

Пусть $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательности двоично-рациональных приближений числа $\xi$. В силу доказанной леммы 4.1 к ним можно применить утверждение аксиомы Кантора R17. Пусть $\tilde{\xi}$ — число, существование которого вытекает из этой аксиомы. Тогда мы имеем два неравенства

$$a_m \leqslant \xi < b_m, \qquad\qquad a_m \leqslant \tilde{\xi} \leqslant b_m,$$

из которых выводится оценка для модуля разности $\xi$ и $\tilde{\xi}$:

$$|\xi - \tilde{\xi}| \leqslant b_m - a_m = \frac{1}{2^m}.$$

Если допустить, что $\xi \neq \tilde{\xi}$, мы немедленно приходим к противоречию с теоремой 3.2. Поэтому $\xi = \tilde{\xi}$. Это приводит к важному выводу: число $\xi$ однозначно восстанавливается по двум последовательностям своих двоично-рациональных приближений (4.1).

Теорема 4.2. *Пусть $\xi < \eta$ — два вещественных числа и пусть $a_m$, $b_m$, $\tilde{a}_m$ и $\tilde{b}_m$ — последовательности их двоично-рациональных приближений. Тогда существует номер $n$, такой, что $b_m < \tilde{a}_m$ для всех $m > n$.*

Док-во. Рассмотрим соотношения (4.1). Из этих соотношений для чисел $a_m$ и $b_m$ выводим оценки

$$\begin{aligned} b_m &= a_m + \frac{1}{2^m} \leqslant \xi + \frac{1}{2^m},\\ a_m &= b_m - \frac{1}{2^m} > \xi - \frac{1}{2^m}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оценки, аналогичные (4.4), имеют место и для чисел $\tilde{a}_m$ и $\tilde{b}_m$. Запишем пару таких оценок для $b_m$ и $\tilde{a}_m$:

$$\tilde{a}_m > \eta - \frac{1}{2^m}, \qquad\qquad b_m \leqslant \xi + \frac{1}{2^m}.$$

Вычитая второе неравенство из первого, для $\tilde{a}_m - b_m$ получаем

$$\tilde{a}_m - b_m > (\eta - \xi) - \frac{1}{2^{m-1}}. \tag{4.5}$$

Опираясь на теорему 3.2, выберем число $n$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\eta - \xi > \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{4.6}$$

Из (4.5) и из (4.6) для разности $\tilde{a}_m - b_m$ получаем оценку снизу

$$\tilde{a}_m - b_m > \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}.$$

При $m > n$ это дает требуемое неравенство $b_m < \tilde{a}_m$. Теорема доказана. $\square$

## § 5. Аксиома Архимеда и аксиома Кантора в геометрии.

Пусть на некоторой прямой $a$ задан отрезок $[OE]$. Зададим положительное направление на этой прямой вектором $\mathbf{c} = \overrightarrow{OE}$. Обозначим $A(0) = O$, $A(1) = E = p_{\mathbf{c}}(A(0))$ и построим последовательность точек $A(2) = p_{\mathbf{c}}(A(1))$, $A(3) = p_{\mathbf{c}}(A(2))$ и т. д., многократно применяя отображение конгруэнтного перенесения на вектор $\mathbf{c}$. Точки, получаемые в результате последовательных перенесений точки $O$ на противоположный вектор $-\mathbf{c}$, пронумеруем отрицательными числами: $A(-1) = p_{-\mathbf{c}}(A(0))$,

$A(-2) = p_{-\mathbf{c}}(A(-1))$ и т. д. Полученная бесконечная в обе стороны последовательность точек оказывается монотонной (см. определение в § 4 второй главы):

$$\ldots \prec A(-2) \prec A(-1) \prec A(0) \prec A(1) \prec A(2) \prec \ldots .$$

Отрезки, соединяющие соседние точки в построенной последовательности, конгруэнтны друг другу:

$$[A(-n)A(-n+1)] \cong \ldots \cong [OE] \cong \ldots \cong [A(n-1)A(n)]$$

Такая монотонная последовательность точек называется *эквидистантной*. Отрезок $[A(0)A(2)]$ получается сложением двух отрезков $[A(0)A(1)]$ и $[A(1)A(2)]$, каждый из которых конгруэнтен $[OE]$. Говорят, что он получен *удвоением* отрезка $[OE]$. Отрезок $[A(0)A(3)]$ получается *утроением* отрезка $[OE]$, следующий отрезок $[A(0)A(4)]$ — *учетверением* и т. д. Запишем это обстоятельство следующим образом:

$$[A(0)A(2)] \cong 2 \cdot [OE], \ldots , [A(0)A(n)] \cong n \cdot [OE].$$

Аксиома A18. *Для любых двух отрезков $[AB]$ и $[OE]$ существует число $n \in \mathbb{N}$, такое, что $[AB] < [CD] \cong n \cdot [OE]$, где отрезок $[CD]$ получен увеличением отрезка $[OE]$ в $n$ раз.*

Аксиома A18 называется аксиомой Архимеда. Она является геометрическим аналогом аксиомы R16 для вещественных чисел, рассмотренной в § 3.

Рассмотрим вновь отрезок $[OE]$ на прямой $a$. Согласно теореме 7.2 из третьей главы внутри этого отрезка можно найти точку $E_1$, являющуюся его серединой. Тогда $[OE] \cong 2 \cdot [OE_1]$. Запишем это по другому:

$$[OE_1] \cong \frac{1}{2} \cdot [OE].$$

Применив операцию деления отрезка пополам еще раз, найдем середину отрезка $[OE_1]$. Обозначим ее $E_2$. Повторяя эту процедуру многократно, мы получим серию отрезков, каждый из которых вдвое меньше предыдущего:

$$[OE_1] \cong \frac{1}{2} \cdot [OE], \ \ldots, \ [OE_m] \cong \frac{1}{2^m} \cdot [OE].$$

Следующая теорема является геометрическим аналогом теоремы 3.2 для вещественных чисел.

Теорема 5.1. *Для любых двух отрезков $[AB]$ и $[OE]$ существует натуральное число $m$, такое, что*

$$[AB] > [CD] \cong \frac{1}{2^m} \cdot [OE],$$

*где отрезок $[CD]$ получается из $[OE]$ в результате $m$-кратного деления этого отрезка пополам.*

Док-во. Если допустить, что утверждение теоремы не выполнено, то для любого натурального $m$ и $n = 2^m$ имеем

$$[AB] < [CD] \cong \frac{1}{2^m} \cdot [OE] \ \text{ или } \ [OE] > 2^m \cdot [AB],$$

что противоречит аксиоме Архимеда A18. олученное противоречие доказывает теорему. □

Аксиома A19. *Пусть $\{[A_nB_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность отрезков на некоторой прямой, такая, что*

$$[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_nB_n] \ \text{ для всех } \ n \in \mathbb{N}.$$

*Тогда пересечение всех этих отрезков непусто и на прямой существует точка $X$, принадлежащая сразу всем отрезкам.*

Аксиома A19 называется аксиомой Кантора. Она является геометрическим аналогом аксиомы Кантора R17 из § 3.

## § 6. Числовая прямая.

Рассмотрим вновь прямую $a$ и отрезок $[OE]$ на ней. В § 5 мы построили последовательность точек $\{A(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ этой прямой, пронумерованную целыми числами. Последовательность $\{A(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ эквидистантна и монотонна, причем из $m < n$ следует $A(m) \prec A(n)$. Она задает *координатную сетку* (или *шкалу*) на прямой $a$. Разделим каждый из отрезков между соседними точками $A(n)$ и $A(n+1)$ пополам и пронумеруем середины отрезков полуцелыми числами. В результате этого мы получим двукратное уплотнение первоначальной шкалы точек:

$$\ldots \prec A(-1) \prec A(-1/2) \prec A(0) \prec A(1/2) \prec A(1) \prec \ldots .$$

Такой процесс двукратного уплотнения шкалы точек на прямой можно продолжать и далее. На следующем шаге для нумерации используем числа вида $k/4$, затем числа вида $k/8$, затем $k/16$ и т. д. Повторив этот процесс неограниченное число раз, мы получим множество точек на прямой, пронумерованное двоично-рациональными числами. Обозначим его через $\mathcal{A}$, а множество двоично-рациональных чисел — через $\mathbb{D}$. Сопоставление числу $r \in \mathbb{D}$ точки $A(r)$ задает отображение

$$A\colon \mathbb{D} \to \mathcal{A}. \tag{6.1}$$

Построенное отображение (6.1) биективно, причем для него

$$\text{из} \;\; p < q \;\; \text{вытекает} \;\; A(p) \prec A(q). \tag{6.2}$$

Свойство (6.2) вытекает из самого способа построения отображения $A$. Это легко увидеть, если записать числа $p$ и $q$ в форме, приведенной к общему знаменателю:

$$p = \frac{k_1}{2^m}, \qquad\qquad q = \frac{k_2}{2^m}.$$

Теорема 6.1. *Отображение* (6.1) *можно продолжить до биективного отображения* $A\colon \mathbb{R} \to a$ *из множества вещественных чисел в прямую* $a = OE$ *с сохранением свойства* (6.2).

Док-во. Сначала докажем существование отображения, которое продолжает (6.1), путем прямого построения. Пусть $\xi \in \mathbb{R}$ — некоторое вещественное число. Согласно результатам § 5 по числу $\xi$ можно построить две последовательности его двоично-рациональных приближений $a_m$ и $b_m$, которые определяются этим числом однозначно. Применив отображение (6.1) к числам $a_m$ и $b_m$, получим две последовательности точек $A_m = A(a_m)$ и $B_m = A(b_m)$. В силу леммы 4.1 и свойства (6.2) отображения $A$ для этих последовательностей точек имеем

$$[A_{m+1}B_{m+1}] \subset [A_mB_m].$$

что позволяет применить аксиому Кантора A19. Из этой аксиомы извлекаем существование точки $X$, принадлежащей всем отрезкам $[A_mB_m]$.

Точка $X$, принадлежащая всем отрезкам $[A_mB_m]$ одновременно, единственна. Действительно, из $b_m - a_m = 2^{-m}$ по построению точек $A_m$ и $B_m$ имеем

$$[A_mB_m] \cong \frac{1}{2^m} \cdot [OE].$$

Существование второй точки $\tilde{X}$, принадлежащей сразу всем отрезкам $[A_mB_m]$, означало бы

$$[X\tilde{X}] < [A_mB_m] \cong \frac{1}{2^m} \cdot [OE],$$

что противоречит теореме 5.1. Существование и единственность точки $X$, определяемой числом $\xi$ через его двоично-рациональные приближения, задает требуемое отображение $A\colon \mathbb{R} \to a$, если положить $A(\xi) = X$. Если число $\xi$ является двоично-рациональным, то последовательность $a_m$ стабилизируется: $a_m = \xi$ при $m > m_0$. Поэтому $A_m = X$ при $m > m_0$, и мы получаем, что сужение $A\colon \mathbb{R} \to a$ на множество двоично-рациональных чисел совпадает с (6.1).

Пусть $\xi$ и $\eta$ — два вещественных числа и пусть $\xi < \eta$. Обозначим через $a_m$, $b_m$, $\tilde{a}_m$ и $\tilde{b}_m$ их двоично-рациональные приближения. Из теоремы 4.2 вытекает существование номера $m$, такого, что выполняются неравенства

$$a_m < b_m < \tilde{a}_m < \tilde{b}_m.$$

Пусть $A_m = A(a_m)$, $B_m = A(b_m)$, $\tilde{A}_m = A(\tilde{a}_m)$ и $\tilde{B}_m = A(\tilde{b}_m)$. Воспользуемся свойством (6.2) отображения (6.1) и получим

$$A_m \prec B_m \prec \tilde{A}_m \prec \tilde{B}_m. \tag{6.3}$$

Но точка $X = A(\xi)$ по построению принадлежит отрезку $[A_m B_m]$, а точка $Y = A(\eta)$ — отрезку $[\tilde{A}_m \tilde{B}_m]$. Это позволяет уточнить соотношения (6.3):

$$A_m \preccurlyeq A(\xi) \preccurlyeq B_m \prec \tilde{A}_m \preccurlyeq A(\eta) \preccurlyeq \tilde{B}_m.$$

Отсюда уже вытекает требуемое $A(\xi) \prec A(\eta)$. Таким образом, для отображения $A\colon \mathbb{R} \to a$ выполнено условие:

$$\text{из } \ \xi < \eta \ \text{ вытекает } \ A(\xi) \prec A(\eta). \tag{6.4}$$

В качестве немедленного следствия из условия (6.4) получаем инъективность отображения $A : \mathbb{R} \to a$. Для доказательства биективности этого отображения остается установить его сюръективность. Сформулируем и докажем этот факт в виде отдельной теоремы. $\square$

Теорема 6.2. *Для любой точки $X$ на прямой $a = OE$ существует вещественное число $\xi$, такое, что $X = A(\xi)$.*

Док-во. Рассмотрим интервалы $I(m,k)$, при помощи которых в § 4 мы определили двоично-рациональные приближения вещественных чисел. Их границы определяются числами

$$a_{mk} = \frac{k}{2^m}, \qquad\qquad b_{mk} = \frac{k+1}{2^m}.$$

Зададим аналогичные полуоткрытые интервалы на прямой $a$:

$$\varTheta(m,k) = [A(a_{mk})A(b_{mk})). \tag{6.5}$$

При каждом фиксированном $m$ интервалы с различными номерами $k_1 \neq k_2$ не пересекаются, а в совокупности они покрывают всю прямую $a$. Этот факт вытекает из аксиомы Архимеда A18 (сравните с теоремой 4.1 для вещественных чисел). Следовательно, для каждого $m$ существует ровно один интервал $\varTheta(m,k)$, который содержит точку $X$. Обозначим через $k_m$ номер такого интервала и положим

$$a_m = \frac{k_m}{2^m}, \qquad\qquad b_m = \frac{k_m+1}{2^m}.$$

Интервалы (6.5) устроены так, что $\varTheta(m,k)$ есть объединение двух интервалов следующего порядка:

$$\varTheta(m,k) = \varTheta(m+1,2k) \cup \varTheta(m+1,2k+1).$$

Отсюда $k_{m+1} = 2k_m$ либо $k_{m+1} = 2k_m + 1$. Для чисел $a_m$ и $b_m$ это означает $a_m \leqslant a_{m+1} < b_{m+1} \leqslant b_m$. Поэтому к последовательностям $a_m$ и $b_m$ применима аксиома Кантора R17, которая дает существование вещественного числа $\xi$, удовлетворяющего неравенствам $a_m \leqslant \xi \leqslant b_m$. Такое число $\xi$ единственно, ибо существование второго числа $\tilde{\xi}$, которое удовлетворяет неравенствам $a_m \leqslant \tilde{\xi} \leqslant b_m$, привело бы к соотношению, которое противоречит теореме 3.2:

$$|\xi - \tilde{\xi}| \leqslant b_m - a_m = \frac{1}{2^m}.$$

Существование и единственность числа $\xi$, определяемого заданием точки $X$ на прямой $a = OE$, означает, что построено отображение из прямой $a$ в множество вещественных чисел:

$$\xi\colon a \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Докажем, что $A(\xi) = X$. Для этого уточним неравенства $a_m \leqslant \xi \leqslant b_m$. Совпадение $\xi = b_m$ в таких неравенствах исключается, ибо в силу $\xi \leqslant b_{m+1} \leqslant b_m$ оно означало бы стабилизацию последовательности $b_m = b = \xi$ при $m > m_0$. А для точки $X$ на прямой $a$ стабилизация $b_m = b$ давала бы

$$X \in [A(b - 2^{-m})A(b)) \ \text{ для всех } \ m > m_0, \tag{6.7}$$

что невозможно, ибо пересечение всех полуоткрытых интервалов $[A(b - 2^{-m})A(b))$ в (6.7) пусто. Таким образом, для числа $\xi$ и двоично-рациональных чисел $a_m$ и $b_m$ выполнены неравенства $a_m \leqslant \xi < b_m$. Значит, $\xi \in I(m, k_m)$ и числа $a_m$ и $b_m$ в точности совпадают с двоично-рациональными приближениями числа $\xi$, которые используются при построении точки $A(\xi)$. Теперь из $X \in [A(a_m)A(b_m)]$ для всех $m \in \mathbb{N}$ получаем требуемое соотношение $X = A(\xi)$. $\square$

Упражнение 6.1. *Покажите, что пересечение всех полуоткрытых интервалов $[A(b - 2^{-m})A(b))$ из (6.7) пусто. Для этого рассмотрите отрезки $[A(b - 2^{-m})A(b)]$ и, опираясь на аксиому Кантора, докажите, что их пересечение состоит из единственной точки $A(b)$.*

При доказательстве теоремы 6.2 мы не только завершили доказательство биективности отображения $A\colon \mathbb{R} \to a$ из теоремы 6.1, но и построили обратное отображение (6.6). В конструкции обоих отображений $A$ и $\xi$ существенным образом используется задание точки $O$ и вектора $\overrightarrow{OE}$ на прямой $a$.

Определение 6.1. Задание точки $O$ и некоторого вектора $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ на прямой $a$ определяет *декартову систему координат* на этой прямой. Точка $O$ называется *началом координат*, а вектор $\mathbf{e}$ — *базисным вектором.*

Определение 6.2. Пусть $(O, \mathbf{e})$ — декартова система координат на некоторой прямой $a$. Тогда число $\xi = \xi(X)$ называется *координатой* точки $X$ на этой прямой, а вектор $\overrightarrow{OX}$, соединяющий начало координат с точкой $X$, называется *радиус-вектором* этой точки.

Задание точки $X \in a$ однозначно определяет ее координату, и наоборот, задание координаты однозначно определяет положение точки $X$ на прямой. Это вытекает из биективности отображений $A$ и $\xi = A^{-1}$.

Использование отображений $A$ и $\xi$ позволяет отождествлять вещественные числа с точками некоторой прямой. Это дает наглядный образ для представления множества $\mathbb{R}$, поэтому само множество вещественных чисел часто называют *числовой прямой* или *числовой осью.*

## § 7. Измерение отрезков.

Пусть задан отрезок $[OE]$. На прямой $a = OE$ введем декартову систему координат с началом в точке $O$ и базисным вектором $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$. Используем прямую $a$ в качестве линейки, а отрезок $[OE]$ в качестве эталона. Пусть $[PQ]$ некоторый произвольный отрезок. Отложим на луче $[OE\rangle$ точку $M$, такую, что $[OM] \cong [PQ]$. Тогда точке $M$ соответствует число $\xi(M)$, являющееся ее координатой. Из $O \prec M$ в силу соотношения

(6.4) вытекает положительность числа $\xi = \xi(M)$. Положительное число $\xi$ называется *длиной* отрезка $[PQ]$, измеренной по отношению к эталону $[OE]$. Это записывают так:

$$[PQ] \cong \xi \cdot [OE] \ \text{ или } \ |PQ| = \xi \cdot |OE|.$$

Если эталонный отрезок зафиксирован, то само число $\xi$ можно считать длиной отрезка $[PQ]$. В этом случае пишут

$$|PQ| = \xi.$$

Если отрезки $[AB]$ и $[CD]$ конгруэнтны, то определяемые ими точки $M$ и $\tilde{M}$ на луче $[OE\rangle$ эталонной прямой $a$ совпадают. Для их длин это дает $|AB| = |CD|$. И наоборот, из равенства длин $|AB| = |CD|$ следует $[OM] \cong [AB]$ и $[OM] \cong [CD]$, что дает $[AB] \cong [CD]$. Сформулируем этот факт в виде теоремы.

Теорема 7.1. *Два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда их длины, измеренные относительно одного и того же эталона $[OE]$, равны.*

Теорема 7.2. *Соотношение $[AB] < [CD]$ для отрезков $[AB]$ и $[CD]$ эквивалентно неравенству $|AB| < |CD|$ для их длин, измеренных по отношению к одному и тому же эталону $[OE]$.*

Док-во. Отрезкам $[AB]$ и $[CD]$ в процессе измерения их длин сопоставляются точки $M$ и $\tilde{M}$ на луче $[OB\rangle$, такие, что $[OM] \cong [AB]$ и $[O\tilde{M}] \cong [CD]$. Соотношение $[AB] < [CD]$ при этом эквивалентно $[OM] < [O\tilde{M}]$ или

$$O \prec M \prec \tilde{M}. \tag{7.1}$$

Отсюда, в силу свойства (6.4) для отображения $A$, получаем $\xi(M) < \xi(\tilde{M})$, что означает $|AB| < |CD|$.

В обратную сторону из $|AB| < |CD|$ вытекает $\xi(M) < \xi(\tilde{M})$, что приводит к соотношению (7.1). Из (7.1) и из $[OM] \cong [AB]$ и $[O\tilde{M}] \cong [CD]$ получаем $[AB] < [CD]$. $\square$

Теорема 7.3. *Пусть точка $B$ лежит внутри отрезка $[AC]$. Тогда для длин отрезков $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$, измеренных по отношению к одному и тому же эталону $[OE]$, имеет место равенство $|AC| = |AB| + |BC|$.*

Док-во. Рассмотрим процесс измерения длин отрезков $[AB]$ и $[AC]$ по отношению к эталонному отрезку $[OE]$. Отметим на луче $[OE\rangle$ точки $M$ и $\tilde{M}$, такие, что $[OM] \cong [AB]$ и $[O\tilde{M}] \cong [AC]$. Тогда точка $M$ лежит внутри отрезка $[O\tilde{M}]$, что вытекает из $[AB] < [AC]$. Кроме того, $[M\tilde{M}] \cong [BC]$, что есть следствие аксиомы A15.

Пусть $\xi = \xi(M)$ и $\tilde{\xi} = \xi(\tilde{M})$. Тогда $\xi < \tilde{\xi}$, причем для длин отрезков $[AB]$ и $[AC]$ имеем

$$|AB| = \xi, \qquad\qquad |AC| = \tilde{\xi}. \tag{7.2}$$

Числам $\xi$ и $\tilde{\xi}$ соответствуют последовательности $a_m$, $b_m$, $\tilde{a}_m$ и $\tilde{b}_m$ двоично-рациональных приближений этих чисел. Применив теорему 4.2, получаем $b_m < \tilde{a}_m$ при $m > m_0$. Используя это обстоятельство, запишем

$$a_m \leqslant \xi < b_m < a_m \leqslant \tilde{\xi} < b_m.$$

Теперь учтем, что $A(\xi) = M$ и $A(\tilde{\xi}) = \tilde{M}$, и применим свойство (6.4) отображения $A$. Это дает

$$A(a_m) \preccurlyeq M \prec A(b_m) \prec A(\tilde{a}_m) \preccurlyeq \tilde{M} \prec A(\tilde{b}_m).$$

Другими словами, отрезок $[M\tilde{M}]$ включает в себя отрезок $[A(b_m)A(\tilde{a}_m)]$, а сам содержится в отрезке $[A(a_m)A(\tilde{b}_m)]$. Применим в этой ситуации теорему 7.2, которая дает

$$|A(b_m)A(\tilde{a}_m)| < |M\tilde{M}| < |A(a_m)A(\tilde{b}_m)|. \tag{7.3}$$

Двоично-рациональные числа $a_m$, $b_m$, $\tilde{a}_m$ и $\tilde{b}_m$ определяются двумя целыми числами $k_m$ и $\tilde{k}_m$ (см. формулы (4.1)). Из

$$b_m = \frac{k_m + 1}{2^m}, \qquad\qquad \tilde{a}_m = \frac{\tilde{k}_m}{2^m}$$

заключаем, что отрезок $[A(b_m)A(\tilde{a}_m)]$ составлен из конгруэнтных отрезков, каждый из которых может быть получен $m$-кратным делением отрезка $[OE]$ пополам. Число таких отрезков равно $\tilde{k}_m - k_m - 1$. Поэтому

$$|A(b_m)A(\tilde{a}_m)| = \frac{\tilde{k}_m - k_m - 1}{2^m} = \tilde{a}_m - b_m.$$

Аналогичным образом для отрезка $[A(a_m)A(\tilde{b}_m)]$ получаем

$$|A(a_m)A(\tilde{b}_m)| = \frac{\tilde{k}_m - k_m + 1}{2^m} = \tilde{b}_m - a_m.$$

Теперь из (7.3) имеем оценки для длины отрезка $[M\tilde{M}]$:

$$\tilde{a}_m - b_m < |\tilde{M}M| < \tilde{b}_m - a_m.$$

Далее учтем, что $[M\tilde{M}] \cong [BC]$, и воспользуемся неравенствами $a_m \leqslant \xi < b_m$ и $\tilde{a}_m \leqslant \tilde{\xi} < \tilde{b}_m$. Это дает

$$\begin{aligned} &\tilde{\xi} - \xi - |BC| < \tilde{b}_m - a_m - (\tilde{a}_m - b_m) = 2^{m+1},\\ &\tilde{\xi} - \xi - |BC| > \tilde{a}_m - b_m - (\tilde{b}_m - a_m) = -2^{-m+1}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Если учесть (7.2), неравенства (7.4) можно записать так:

$$-2^{-m+1} < |AC| - |AB| - |BC| < 2^{-m+1}.$$

Отсюда в силу произвольности $m > m_0$ вытекает требуемое равенство $|AC| = |AB| + |BC|$. Теорема доказана. $\square$

Определение 7.1. Функция, сопоставляющая каждому отрезку $[PQ]$ положительное число $\xi([PQ])$, называется *функцией длины*, если выполнены следующие условия:

(1) эталонному отрезку соответствует число $\xi([OE]) = 1$;
(2) из $[AB] \cong [CD]$ вытекает $\xi([AB]) = \xi([CD])$;
(3) если точка $B$ лежит внутри отрезка $[AC]$, то выполняется равенство $\xi([AC]) = \xi([AB]) + \xi([BC])$.

Теорема 7.4. *Функция длины, удовлетворяющая условиям* (1)–(3) *из определения 7.1, существует и фиксируется заданием эталонного отрезка $[OE]$ однозначно.*

Док-во. Действительно, функции длины, удовлетворяющие условиям (1)–(3) из определения 7.1, существуют. Одна из них была построена выше. Обозначим ее $\xi$. Пусть $\eta$ — некоторая другая функция длины, удовлетворяющая тем же условиям (1)-(3). Покажем совпадение значений этих функций: $\xi([PQ]) = \eta([PQ])$. Свойство (2) позволяет ограничиться отрезками вида $[OM]$, где $M$ — некоторая точка, лежащая на луче $[OE\rangle$, содержащем эталонный отрезок $[OE]$.

Если $M = E$, то совпадение $\xi([OE]) = \eta([OE]) = 1$ вытекает из свойства (1). Пусть отрезок $[AB]$ получен $m$-кратным делением отрезка $[OE]$ пополам и последующим увеличением полученного отрезка в $k$-раз:

$$[AB] \cong \frac{k}{2^m} \cdot [OE].$$

Тогда, пользуясь свойством (3), можно вывести соотношения

$$\xi([AB]) = \frac{k}{2^m}, \qquad \eta([AB]) = \frac{k}{2^m},$$

из которых вытекает совпадение $\xi([AB]) = \eta([AB])$ для двоично-рациональных кратных эталонного отрезка $[OE]$.

Свойство (3) имеет еще одно важное следствие, которое состоит в том, что из $[AB] < [AC]$ вытекает $\eta([AB]) < \eta([AC])$. Оно вытекает из положительности $\eta([BC])$ в формуле

$$\eta([AC]) = \eta([AB]) + \eta([BC])$$

Применим его для доказательства $\xi([OM]) = \eta([OM])$ для точки $M$ на луче $[OE\rangle$. Согласно теореме 6.2 имеем $M = A(\alpha)$, где $\alpha$ — некоторое положительное вещественное число. Обозначим через $a_m$ и $b_m$ двоично-рациональные приближения этого числа. Тогда $a_m \leqslant \alpha < b_m$ и

$$A(a_m) \preccurlyeq M \prec A(b_m).$$

Из включений $[OA(a_m)] \subset [OM] \subset [OA(b_m)]$ получаем оценки

$$\eta([OA(a_m)]) \leqslant \eta([OM]) \leqslant \eta([OA(b_m)]).$$

Но $\eta([OA(a_m)]) = a_m$ и $\eta([OA(b_m)]) = b_m$ в силу совпадения $\eta$ и $\xi$ на отрезках, являющихся двоично-рациональными кратными эталонного отрезка $[OE]$. Отсюда

$$\alpha - \frac{1}{2^m} < a_m \leqslant \eta([OM]) \leqslant b_m \leqslant \alpha + \frac{1}{2^m}.$$

Полученные неравенства дают $\eta([OM]) = \alpha = \xi([OM])$ ввиду произвольности $m \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. □

Теорема 7.5. *Если длина отрезка $[AB]$, измеренная относительно эталона $[OE]$, равна $\xi$, а длина эталонного отрезка $[OE]$ относительно другого эталона $[\tilde{O}\tilde{E}]$ равна $\eta$, то длина отрезка $[AB]$, измеренная относительно второго эталона $[\tilde{O}\tilde{E}]$, равна произведению $\tilde{\xi} = \xi \cdot \eta$.*

Упражнение 7.1. *Выведите теорему 7.5 из теоремы 7.4.*

## § 8. Отображения подобия для прямых. Умножение векторов на число.

Пусть на прямой $a$ задана декартова система координат с началом в точке $O$ и базисным вектором $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$. Рассмотрим вторую прямую $b$, на которой задана система координат с началом в точке $Q$ и базисным вектором $\mathbf{h} = \overrightarrow{QH}$. Определим отображение $f : a \to b$ следующим образом. Для точки $X \in a$ найдем ее координату $\xi = \xi(X)$ и поставим ей в соответствие точку $Y$ на второй прямой с точно такой же координатой $\xi$. Иными словами $f$ есть композиция двух отображений

$$\xi\colon a \to \mathbb{R}, \qquad\qquad A\colon \mathbb{R} \to b.$$

Такое отображение $f = A \circ \xi$ называется *отображением подобия.* При этом отношение длин базисных векторов

$$k = |QH|/|OE|$$

называется *коэффициентом подобия.* Любое отображение подобия $f : a \to b$ биективно. Обратное отображение $f^{-1} : b \to a$ также является отображением подобия, коэффициент подобия для него равен $k^{-1}$. Композиция двух отображений подобия $f : a \to b$ и $g : b \to c$ есть отображение подобия $g \circ f : a \to c$. Коэффициент подобия для него равен произведению коэффициентов подобия отображений $f$ и $g$.

Лемма 8.1. *Пусть на прямой $a$ задана система координат с началом в точке $O$ и базисным вектором $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$. Тогда*

(1) *вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен вектору $\overrightarrow{OE}$ тогда и только тогда, когда разность координат точек $B$ и $A$ положительна: $\xi(B) - \xi(A) > 0$;*
(2) *длина отрезка $[AB]$, измеренная по отношению к эталонному отрезку $[OE]$, равна модулю разности координат его концов $|AB| = |\xi(B) - \xi(A)|$.*

Упражнение 8.1. *Рассмотрите различные случаи расположения точек $A$ и $B$ относительно точки $O$ на прямой $a$ и, опираясь на теорему 7.3, докажите лемму 8.1.*

Теорема 8.1. *Пусть $a$ и $b$ — две прямые, на которых заданы вектора $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{QH}$ соответственно. Зададим положительные направления на этих прямых векторами $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{QH}$ и рассмотрим отображение подобия $f\colon a \to b$, определяемое этими векторами. Это отображение*

(1) *сохраняет отношение предшествования, т. е. из $X \prec Y$ вытекает $f(X) \prec f(Y)$;*
(2) *увеличивает длину отрезков в $k$ раз, где $k$ — коэффициент подобия: $|f(X)f(Y)| = k \cdot |XY|$.*

Теорема 8.2. *Пусть $f\colon a \to b$ — отображение подобия. Тогда для точек $A$, $B$, $C$ и $D$ на прямой $a$ и точек $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ и $D' = f(D)$ на прямой $b$ из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ вытекает равенство $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.*

Упражнение 8.2. *Пользуясь теоремой 7.5 и леммой 8.1, докажите теорему 8.1 и выведите из нее теорему 8.2.*

Особый вид отображений подобия возникает при совпадении прямых $a = b$. Пусть на прямой $a$ заданы два вектора $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OH}$. Это определяет на ней две декартовы системы координат с общим началом в точке $O$ и задает отображение подобия $f\colon a \to a$. Такое отображение называется *гомотетией* с центром в точке $O$. Отображение $f$ переводит точку $X$ с координатой $\xi(X)$ в первой системе координат в точку $Y = f(X)$ с координатой $\tilde{\xi}(Y) = \xi(X)$ во второй системе координат. Пользуясь теоремой 8.1, несложно подсчитать координату точки $Y$ в первой системе координат:

$$\xi(Y) = \begin{cases} (|OH|/|OE|) \cdot \xi(X) & \text{for } \overrightarrow{OH} \upuparrows \overrightarrow{OE}, \\ -(|OH|/|OE|) \cdot \xi(X) & \text{for } \overrightarrow{OH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OE}. \end{cases}$$

Ведем в рассмотрение числовой параметр, который называется *коэффициентом гомотетии*:

$$k = \begin{cases} |OH|/|OE| & \text{if} \quad \overrightarrow{OH} \upuparrows \overrightarrow{OE}, \\ -|OH|/|OE| & \text{if} \quad \overrightarrow{OH} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OE}. \end{cases}$$

Тогда отображение гомотетии $f : a \to a$ можно задавать, пользуясь лишь одной декартовой системой координат: точка $X$ с координатой $\xi$ переходит в точку $Y = f(X)$ с координатой $k \cdot \xi$.

Определение 8.1. Пусть на прямой $a$ задан вектор $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{CD}$ на прямой $a$, имеющий длину $|CD| = |k| \cdot |AB|$ назовем *произведением вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на число* $k \neq 0$ и запишем $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, если он сонаправлен с $\overrightarrow{AB}$ в случае $k > 0$ и противонаправлен вектору $\overrightarrow{AB}$ при $k < 0$.

Теорема 8.3. *Точка $Y$ на прямой $a$ есть образ точки $X$ на той же прямой при гомотетии с центром в точке $O$ и коэффициентом $k$ тогда и только тогда, когда ее радиус-вектор $\overrightarrow{OY}$ получается из радиус-вектора $\overrightarrow{OX}$ умножением на число $k$.*

Упражнение 8.3. *Докажите теорему 8.3, выбрав некоторую декартову систему координат на прямой $a$.*

Определение 8.1 не фиксирует жестко положение вектора $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ на прямой, вектор $\overrightarrow{CD}$ определяется с точностью до замены любым другим вектором, равным ему в смысле определения 4.1 из третьей главы. При этом из $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AB}$ вытекает равенство $k \cdot \overrightarrow{GF} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Сказанное означает, что произведение $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ задается определением 8.1 лишь как скользящий вектор $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$, полученный умножением скользящего вектора $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ на число $k$. При $k = 0$ либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ произведение $k \cdot \mathbf{b}$ считают равным нулевому вектору:

$$\begin{aligned} &0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{для любого вектора} \quad \mathbf{b}, \\ &k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{для любого числа} \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорема 8.4. *Операция сложения скользящих векторов на прямой и операция умножения этих векторов на число обладают следующими свойствами:*

(1) *коммутативность сложения:* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
(2) *ассоциативность сложения:* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
(3) *свойство нулевого вектора:* $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
(4) *для любого вектора* $\mathbf{a}$ *существует противоположный вектор* $\mathbf{a}'$, *такой, что* $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$;
(5) *дистрибутивность умножения относительно сложения векторов:* $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$;
(6) *дистрибутивность умножения относительно сложения чисел:* $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$;
(7) *ассоциативность операции умножения векторов на числа:* $(k \cdot q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$;
(8) *свойство числовой единицы:* $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Упражнение 8.4. *Докажите те утверждения теоремы 8.4, которые не были доказаны ранее.*

## § 9. Измерение углов.

Числовая мера углов строится примерно так же, как и длина отрезков. Разница состоит лишь в том, что утверждения, аналогичные аксиоме Архимеда A18 и аксиоме Кантора A19 здесь надо доказывать.

Теорема 9.1. *Пусть* $\{\angle h_n k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — *последовательность углов, лежащих в одной плоскости и имеющих общую вершину* $O$, *и пусть имеют место следующие соотношения:*

$$\angle h_{n+1} k_{n+1} \subset \angle h_n k_n \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Тогда существует луч* $l$, *исходящий из точки* $O$ *и принадлежащий пересечению всех этих углов.*

Док-во. Отметим на луче $h_1$ точку $A_1$, а на луче $k_1$ — точку $B_1$. Соединим их отрезком $[A_1 B_1]$. Согласно лемме 6.2 из второй главы лучи $h_n$ и $k_n$ пересекают отрезок $[A_1B_1]$. Обозначим точки пересечения через $A_n$ и $B_n$ соответственно. Такие точки формируют последовательность вложенных друг в друга отрезков на прямой $A_1B_1$:

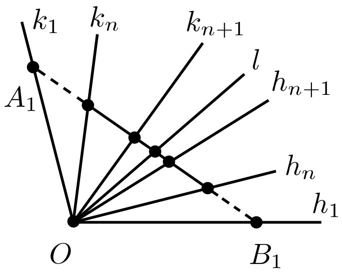



*Рис. 9.1*

$$[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_nB_n].$$

В этой ситуации применима аксиома Кантора A19. Она дает существование точки $X$, принадлежащей сразу всем отрезкам $[A_nB_n]$. Проведем через точку $X$ луч $[OX\rangle$ и обозначим его через $l$. Согласно той же лемме 6.2 из второй главы этот луч лежит в пересечении всех углов $\angle h_nk_n$. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим угол $\angle h_0h_n$ с вершиной в точке $O$. Предположим, что внутри угла $\angle h_0h_n$ проведены лучи $h_1, \dots, h_{n-1}$ так, что образовались углы

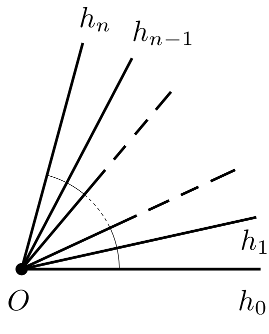



*Рис. 9.2*

$$\angle h_0h_1, \dots, \angle h_{n-1}h_n$$

конгруэнтные друг другу. В этом случае скажем, что угол $\angle h_0h_n$ получен из угла $\angle h_0h_1$ увеличением в $n$ раз:

$$\angle h_0h_n \cong n \cdot \angle h_0h_1.$$

А про угол $\angle h_0h_1$, напротив, скажем, что он получен из угла $\angle h_0h_n$ делением на $n$ одинаковых частей. Запишем это обстоятельство в виде следующего соотношения, связывающего углы $\angle h_0h_1$ и $\angle h_0h_n$:

$$\angle h_0h_1 \cong \frac{1}{n} \cdot \angle h_0h_n.$$

Лемма 9.1. *Пусть в треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AD$. Тогда из $\angle ABC > \angle ACB$ вытекает $[CD] > [BD]$.*

Док-во. Из соотношения $\angle ABC > \angle ACB$, применив теорему 2.4, получаем $[AC] > [AB]$. Отложим на луче $[AC\rangle$ отрезок $[AE]$, конгруэнтный отрезку $[AB]$. В силу $[AC] > [AB]$ полученная при этом точка $E$ будет внутренней точкой отрезка $[AC]$. Из конгруэнтности углов $\angle EAD \cong \angle BAD$ и конгруэнтности сторон $[AE] \cong [AB]$ вытекает конгруэнтность треугольников $EAD$ и $BAD$. Следовательно, $[DE] \cong [DB]$. Угол $\angle CED$ смежен углу $\angle AED$, который конгруэнтен углу $\angle ABC$. Поэтому угол $\angle CED$ конгруэнтен внешнему углу треугольника $ABC$ при вершине $B$. Но согласно теореме 2.3 внутренний угол этого треугольника при вершине $C$ меньше его внешнего угла при вершине $B$. Отсюда получаем $\angle CED > \angle ECD$. Теперь, применив теорему 2.4 к треугольнику $CED$, получаем неравенство $[CD] > [ED]$, что эквивалентно соотношению $[CD] > [BD]$ в силу $[ED] \cong [BD]$. $\square$

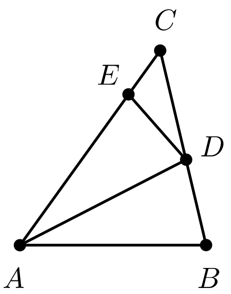



*Рис. 9.3*

Теорема 9.2. *Для любых двух острых углов $\angle hk$ и $\angle lq$ существует число $n$, такое, что*

$$\angle hk < \angle rp \cong n \cdot \angle lq,$$

*где угол $\angle rp$ получен увеличением угла $\angle lq$ в $n$ раз.*

Док-во. Если угол $\angle lq$ больше угла $\angle hk$, то выбор $n = 1$ обеспечивает выполнение требуемого со-

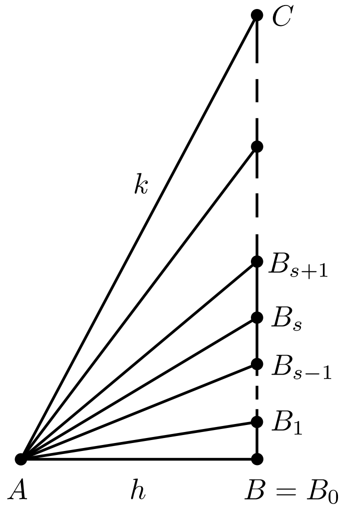



*Рис. 9.4*

отношения $\angle hk < n \cdot \angle lq$. Если же $\angle lq \cong \angle hk$, то достаточно взять $n = 2$. Поэтому рассмотрим случай, когда угол $\angle lq$ меньше угла $\angle hk$. В этом случае, обозначим через $A$ вершину угла $\angle hk$, отметим на луче $k$ точку $C$ и опустим перпендикуляр из точки $C$ на прямую, содержащую луч $h$. Основание такого перпендикуляра лежит на луче $h$, поскольку угол $\angle hk$ острый. Обозначим его через $B$ (см. рисунок 9.4 выше).

Дальнейшее доказательство теоремы проведем методом от противного. Обозначим $h = h_0$ и отложим от луча $h$ в полуплоскости, содержащей луч $k$, лучи $h_1, h_2, \ldots, h_n$, так, чтобы все углы вида $\angle h_s h_{s+1}$ были конгруэнтны углу $\angle lq$. Если допустить, соотношение $\angle hk < n \cdot \angle lq$ не выполнено ни для какого $n \in \mathbb{N}$, то мы сможем провести неограниченное количество лучей $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$, причем все они будут лежать внутри угла $\angle hk$. Обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ точки пересечения этих лучей с отрезком $[BC]$ (существование таких точек пересечения есть следствие леммы 6.2 из второй главы). Рассмотрим треугольник $AB_{s-1}B_{s+1}$. При $s > 1$ угол $\angle AB_{s-1}B_{s+1}$ в этом треугольнике смежен острому углу $\angle AB_{s-1}B$ в прямоугольном треугольнике $ABB_{s-1}$. Поэтому он является тупым. В случае $s = 1$ угол $\angle AB_{s-1}B_{s+1}$ является прямым. В любом из этих случаев имеет место сравнение

$$\angle AB_{s-1}B_{s+1} > \angle AB_{s+1}B_{s-1}.$$

Луч $[AB_s\rangle$ является биссектрисой угла $\angle B_{s-1}AB_{s+1}$. Это позволяет применить лемму 9.1, что дает

$$[B_{s-1}B_s] < [B_sB_{s+1}].$$

То есть длины отрезков $[B_sB_{s+1}]$ образуют строго возрастающую последовательность. Для отрезка $[BB_n]$ это дает соотношение $[BB_n] > n \cdot [BB_1]$. Теперь допущение о том, что соотношение $\angle hk < n \cdot \angle lq$ не выполнено ни для какого $n$, приводит к $n \cdot [BB_1] < [BC]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но это противоречит аксиоме Архимеда A18. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Дальнейшее построение шкалы углов практически ничем не отличается от построения шкалы отрезков на прямой. Имеющееся здесь ограничение (все углы лежат внутри развернутого угла), определяет естественный выбор эталонного угла. Чтобы эталонный угол был острым, развернутый угол дважды делят пополам и полученному углу приписывают числовое значение $\pi/4$, где $\pi = 3.14\dots$ — некоторое специальное иррациональное число, возникающее при вычислении площади единичного круга.

Теорема 9.3. *Каждому углу $\angle hk$ соответствует некоторое вещественное число $\xi(\angle hk) = \widehat{hk}$ из интервала $0 < \xi \leqslant \pi$, причем так, что выполнены следующие условия:*

(1) *развернутому углу соответствует число $\pi$;*
(2) *если $\angle hk \cong \angle lq$, то $\xi(\angle hk) = \xi(\angle lq)$;*
(3) *если луч $l$ лежит внутри угла $\angle hk$ и делит его на два угла, то $\xi(\angle hk) = \xi(\angle hl) + \xi(\angle lk)$.*

Упражнение 9.1. *Пользуясь аналогией с отрезками, восполните детали, необходимые для доказательства теоремы 9.3, и докажите ее.*

ГЛАВА VI

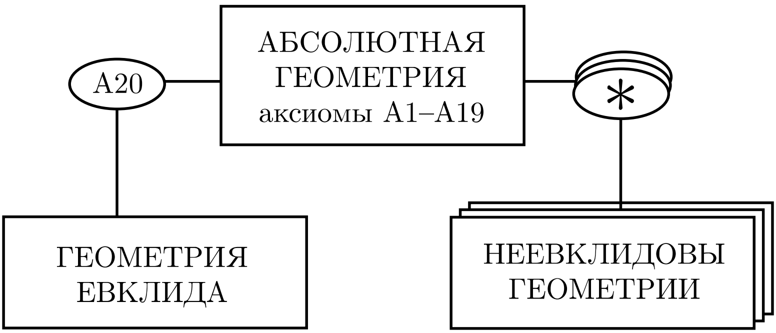
# АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ.

## § 1. Аксиома параллельных и классическая евклидова геометрия.

Пятая группа аксиом Евклида состоит из единственной аксиомы A20. Она формулируется так.

Аксиома A20. *Через любую точку $O$, не лежащую на прямой $a$, проходит ровно одна прямая, параллельная прямой $a$.*

Аксиома A20 сыграла важную роль в развитии геометрии. Многочисленные попытки вывести ее из других аксиом, длившиеся более двух тысяч лет, не привели к желаемому результату. Напротив, отказ от этой аксиомы привел к построению неевклидовых геометрий, отличных от традиционной. Впервые это было сделано Лобачевским, Бояи и Гауссом.



Аксиомы A1–A19 и следствия из них, которые мы рассматривали в предыдущих главах, составляют так называемую «абсолютную геометрию». Они справедливы в классической евклидовой геометрии и остаются справедливыми и в неевклидовых геометриях, которые получаются заменой аксиомы A20 какими-либо другими не эквивалентными ей утверждениями. Эта глава, наоборот, содержит результаты, которые специфичны только для евклидовой геометрии. Рассмотрение неевклидовых геометрий выходит за рамки данной книги.

Теорема 1.1. *Пусть прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости и пересекаются с третьей прямой $c$ в точках $A$ и $B$. Прямые $a$ и $b$ параллельны тогда и только тогда, когда внутренние накрест лежащие углы, возникающие в точках $A$ и $B$, конгруэнтны.*

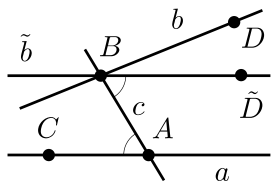



*Рис. 1.1*

Док-во. В одну сторону утверждение этой теоремы было доказано в третьей главе (см. теорему 8.1). Докажем его в обратную сторону. Пусть $a \parallel b$. Прямая $c$ разделяет плоскость на две полуплоскости. Проведем в той из них, которая содержит точку $D$, луч $[B\tilde{D}\rangle$ так, чтобы $\angle AB\tilde{D} \cong \angle BAC$. Применив теорему 8.1 из третьей главы к прямой $\tilde{b} = B\tilde{D}$, получаем $\tilde{b} \parallel a$. Если бы прямая $\tilde{b}$ была отлична от $b$, то мы имели бы две прямые, проходящие через точку $B$ и параллельные прямой $a$, что противоречит аксиоме A20. Значит, $\tilde{b} = b$ и $\angle ABD \cong \angle BAC$. Теорема доказана. □

Теорема 1.2. *Пусть $a \neq b$ — две параллельные прямые, лежащие в плоскости $\alpha$. Если прямая $c \neq b$, лежащая в плоскости $\alpha$, пересекает прямую $b$ в некоторой точке $B$, то она пересекает также и прямую $a$ в некоторой точке $A$.*

Док-во. Если допустить, что $c$ не пересекает $a$, то согласно определению 8.1 из третьей главы $c \parallel a$. В результате мы получаем две прямые $b$ и $c$, проходящие через точку $B$ и параллельные прямой $a$, что противоречит аксиоме A20. Следовательно, $c$ пересекает прямую $a$ в некоторой точке $A \neq B$. $\square$

Теорема 1.3. *Пусть $a$ и $b$ — две параллельные прямые, лежащие в плоскости $\alpha$. Перпендикуляр к прямой $a$, проведенный в плоскости $\alpha$, является одновременно и перпендикуляром к прямой $b$.*

Теорема 1.3 является простым следствием из теорем 1.1 и 1.2. Отдельного доказательства она не требует.

Теорема 1.4. *В евклидовой геометрии отношение параллельности прямых рефлексивно, симметрично и транзитивно, в силу чего является отношением эквивалентности.*

Док-во. Рефлексивность и симметричность отношения параллельности прямых вытекает непосредственно из определения (см. определение 8.1 в третьей главе). Докажем его транзитивность. Пусть $a \parallel b$ и $b \parallel c$. В случае совпадения $a = b$, $b = c$, либо $c = a$, соотношение $a \parallel c$ очевидным образом выполнено. Поэтому сразу рассмотрим случай не совпадающих прямых. Из $a \parallel b$ заключаем, что через прямые $a$ и $b$ можно провести плоскость. Обозначим ее $\alpha$. Плоскость, проведенную через $b$ и $c$, обозначим $\beta$.

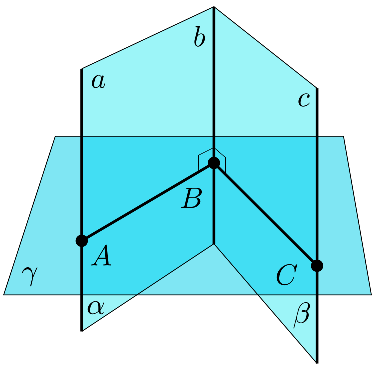



*Рис. 1.2*

Выберем на прямой $b$ точку $B$ и проведем через нее плоскость $\gamma$, перпендикулярную прямой $b$. В пересечении плоскостей $\alpha$ и $\gamma$ мы получим перпендикуляр к прямой $b$, который согласно теореме 1.2 пересекает прямую $a$ в некоторой точке $A$. Согласно теореме 1.3 прямая $AB$ перпендикулярна прямой $a$. Прямая $b$ по построению является перпендикуляром к плоскости $\gamma$, а плоскость $\alpha$ содержит прямую $b$. Отсюда $\alpha \perp \gamma$ (см. определение 3.1 в четвертой главе). Согласно теореме 3.1 из четвертой главы плоскость $\alpha$ содержит перпендикуляр к плоскости $\gamma$, проведенный в точке $A$. Совпадение такого перпендикуляра с прямой $a$ теперь получается из $a \perp AB$ как следствие теоремы 6.3 из третьей главы.

Итак, $a \perp \gamma$. Аналогичная ситуация возникает и в плоскости $\beta$. Прямая $BC$, полученная как пересечение плоскостей $\gamma$ и $\beta$, оказывается перпендикулярной прямым $b$ и $c$. После чего из $b \perp \gamma$ выводим $\beta \perp \gamma$ и $c \perp \gamma$. Но два перпендикуляра к одной плоскости параллельны (см. теорему 3.3 в четвертой главе). Поэтому из $a \perp \gamma$ и $c \perp \gamma$ получаем требуемое соотношение $a \parallel c$.

Отметим, что возможно совпадение плоскостей $\alpha = \beta$. При этом прямая $AB$ совпадет с прямой $BC$. Однако, это никак не нарушает справедливости приведенных выше рассуждений. Теорема доказана. $\square$

## § 2. Параллельность прямой и плоскости.

Определение 2.1. Говорят, что прямая $a$ *параллельна плоскости* $\alpha$, и записывают $a \parallel \alpha$, если $a$ лежит в плоскости $\alpha$, либо если она не имеет общих точек с плоскостью $\alpha$.

Теорема 2.1. *Прямая $a$ параллельна плоскости $\alpha$ тогда и только тогда, когда она параллельна некоторой прямой $b$, лежащей в плоскости $\alpha$.*

Док-во. Случай, когда прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$ тривиален. Здесь можно выбрать $b = a$, после чего оба утверждения теоремы (прямой и обратное) будут выполнены.

Рассмотрим случай, когда прямая $a$ не лежит в плоскости $\alpha$. Пусть $a \parallel \alpha$. Выберем некоторую произвольную точку $A$ на плоскости $\alpha$. Проведем через прямую $a$ и точку $A$ плоскость $\beta$. В пересечении плоскостей $\beta$ и $\alpha$ мы получим прямую $b$. Прямая $b$ не пересекается с прямой $a$, поскольку она лежит в плоскости $\alpha$, которая не имеет общих точек с $a$. С другой стороны, прямая

$b$ лежит в той же плоскости $\beta$, что и прямая $a$. Следовательно, мы имеем $b \parallel a$.

Пусть, наоборот, прямая $a$ параллельна некоторой прямой $b$, лежащей в плоскости $\alpha$. Проведем через эти прямые плоскость $\beta$. Тогда $\alpha \cap \beta = b$. Если бы прямая $a$ пересекалась с плоскостью $\alpha$, то точка пересечения лежала бы на прямой $b$. Но прямые $a$ и $b$ не имеют общих точек в силу их параллельности. Отсюда получаем $a \parallel \alpha$. $\square$

Отметим, что определение 2.1 и теорема 2.1 могут быть сформулированы и в абсолютной геометрии. Доказательство теоремы 2.1 никак не использует аксиомы A20. Однако, все последующие теоремы в этом параграфе уже справедливы только в евклидовой геометрии.

Теорема 2.2. *Для прямых $a$ и $b$ и для плоскости $\alpha$ из условий $a \parallel b$ и $b \parallel \alpha$ вытекает $a \parallel \alpha$.*

Упражнение 2.1. *Выведите теорему 2.2 как следствие теорем 1.4 и 2.1.*

Теорема 2.3. *Пусть $a$ — некоторая прямая, параллельная плоскости $\alpha$, и пусть $O$ — некоторая точка в этой плоскости. Тогда, если прямая $b$ проходит через точку $O$ и если $b \parallel a$, то прямая $b$ лежит в плоскости $\alpha$.*

Док-во. Начнем со случая, когда прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$. Если $O \in a$, то прямые $a$ и $b$ имеют общую точку $O$. В этом случае из $b \parallel a$ вытекает совпадение $b = a$ (см. определение 8.1 в третьей главе), откуда $b \subset \alpha$.

Если $a \subset \alpha$, но $O \notin a$, то прямые $a$ и $b$ не совпадают. Две параллельные прямые $a$ и $b$ согласно определению 8.1 из третьей главы лежат в одной плоскости. Обозначим ее $\beta$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ содержат прямую $a$ и точку $O$, не лежащую на этой прямой. Поэтому они совпадают: $\beta = \alpha$. Отсюда $b \subset \alpha$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда прямая $a$ не лежит в плоскости $\alpha$. В силу $a \parallel \alpha$ она в этом случае не пересекается с $\alpha$. А прямая $b$ имеет с $\alpha$ общую точку $O$. Отсюда $a \neq b$. В силу $b \parallel a$ через $a$ и $b$ проходит некоторая плоскость $\beta$ (см. определение 8.1 в третьей главе), которая теперь отлична от плоскости $\alpha$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют общую точку $O$. Поэтому они пересекаются по некоторой прямой $\tilde{b}$, которая содержит точку $O$ и не имеет общих точек с прямой $a$. Отсюда $\tilde{b} \parallel a$, ибо не пересекающиеся прямые $a$ и $\tilde{b}$ лежат в одной плоскости $\beta$. В качестве последнего шага остается применить аксиому A20, согласно которой через точку $O$ проходит ровно одна прямая, параллельная прямой $a$. Отсюда $b = \tilde{b}$ и $b \subset \alpha$, ибо $\tilde{b} \subset \alpha$ по построению. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $a$ и $b$ — две не параллельные прямые. Тогда через прямую $b$ проходит ровно одна плоскость $\beta$, параллельная прямой $a$.*

Док-во. Докажем сначала существование требуемой плоскости. Из $a \nparallel b$ вытекает $a \neq b$. Выберем на прямой $b$ точку $B$, не лежащую на прямой $a$, и проведем через нее прямую $\tilde{a}$, параллельную прямой $a$. Прямые $\tilde{a}$ и $b$ имеют общую точку $B$, но не совпадают (ибо $\tilde{a} = b$ означало бы $a \parallel b$). Через две такие прямые можно провести плоскость. Обозначим ее $\beta$. Из теоремы 2.1 в силу $\tilde{a} \parallel a$ и $\tilde{a} \subset \beta$ выводим $a \parallel \beta$.

Докажем единственность построенной плоскости $\beta$. Пусть $\tilde{\beta}$ — некоторая плоскость, содержащая прямую $b$ и параллельная прямой $a$. Тогда $B \in \tilde{\beta}$. Прямая $\tilde{a}$ по построению параллельна прямой $a$ и проходит через точку $B$. В силу теоремы 2.3 имеем $\tilde{a} \subset \tilde{\beta}$. Тем самым, плоскость $\tilde{\beta}$ содержит две пересекающиеся в точке $B$, но не совпадающие прямые $\tilde{a}$ и $b$. Следовательно, $\tilde{\beta} = \beta$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть $a$ — некоторая прямая. Если две не совпадающие плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны прямой $a$ и в пересечении дают прямую $b$, то тогда $b \parallel a$.*

Док-во. Пусть $b$ — прямая, лежащая в пересечении плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Тогда по условию теоремы через эту прямую проходят две плоскости, параллельные прямой $a$. Если бы прямая $b$ не была параллельна $a$, то согласно теореме 2.4 через нее могла бы проходить только одна такая плоскость. Эти рассуждения, показывают, что $b \parallel a$. $\square$

## § 3. Параллельность двух плоскостей.

Определение 3.1. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ называются *параллельными*, если они совпадают $\alpha = \beta$, либо если они не имеют общих точек.

В записи бинарного отношения параллельности плоскостей используется тот же знак, что и для обозначения параллельности прямых. Пишут $\alpha \parallel \beta$.

Теорема 3.1. *Пусть плоскость $\alpha$ параллельна плоскости $\beta$. Если плоскость $\gamma$ пересекает плоскости $\alpha$ и $\beta$ по прямым $a$ и $b$ соответственно, то $a \parallel b$.*

Док-во. В случае совпадения $\alpha = \beta$ параллельность прямых $a \parallel b$ вытекает из их совпадения $a = b$.

Пусть $\alpha \neq \beta$. Тогда из $\alpha \parallel \beta$ следует, что плоскости $\alpha$ и $\beta$ не пересекаются. Значит, прямые $a = \alpha \cap \gamma$ и $b = \beta \cap \gamma$ также не пересекаются. Они лежат в одной плоскости $\gamma$ и потому параллельны. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha \neq \beta$ — две плоскости, пересекающие прямую $c$ в точках $A$ и $B$. Тогда из $c \perp \alpha$ и $c \perp \beta$ вытекает параллельность плоскостей $\alpha \parallel \beta$.*

Док-во. В случае совпадения $A = B$ мы имели бы две плоскости $\alpha \neq \beta$, проходящие через точку $A \in c$ и перпендикулярные прямой $c$. Однако, это исключается теоремой 1.2 из четвертой главы. Поэтому $A \neq B$.

Если допустить, что плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются, и если обозначить через $C$ какую-нибудь точку из пересечения $\alpha \cap \beta$, то мы получим два перпендикуляра $[CB]$ и $[CA]$, опущенные из точки $C \notin c$ на прямую $c$. Это противоречит теореме 6.5 из из третьей главы. Следовательно, плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны. Теорема доказана. $\square$

Определение параллельности двух плоскостей может быть сформулировано и в абсолютной геометрии. При этом теоремы 3.1 и 3.2, доказательство которых никак не использует аксиому A20, остаются справедливыми без всяких изменений. А вот последующие теоремы в этом параграфе могут быть доказаны только в евклидовой геометрии.

Теорема 3.3. *Если две пересекающиеся прямые $a$ и $b$ из плоскости $\alpha$ параллельны двум пересекающимся прямым $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ из другой плоскости $\tilde{\alpha}$, то $\alpha \parallel \tilde{\alpha}$.*

Док-во. В случае $\alpha = \tilde{\alpha}$ параллельность плоскостей $\alpha$ и $\tilde{\alpha}$ вытекает из факта их совпадения (см. определение 3.1). Поэтому рассмотрим случай, когда они не совпадают.

Из того, что прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$ вытекает $a \parallel \alpha$ (см. определение 2.1). Параллельность $a \parallel \tilde{\alpha}$ вытекает из параллельности прямых $a$ и $\tilde{a}$ и из того, что прямая $\tilde{a}$ лежит в плоскости $\tilde{\alpha}$ (см. теорему 2.1). Следовательно, $\alpha$ и $\tilde{\alpha}$ — это две не совпадающие плоскости, параллельные прямой $a$. Если допустить, что они пересекаются по прямой $c$, то из теоремы 2.5 получаем $a \parallel c$. Аналогичным образом выводим $b \parallel c$, откуда в силу теоремы 1.4 имеем $a \parallel b$. Однако, две пересекающиеся, но не совпадающие прямые не могут быть параллельны (см. определение 8.1 в третьей главе). Полученное противоречие показывает, что плоскости $\alpha$ и $\tilde{\alpha}$ не пересекаются. Значит, они параллельны. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.4. *Через любую точку $O$, не лежащую на плоскости $\alpha$, проходит ровно одна плоскость, параллельная $\alpha$.*

Док-во. Выберем произвольную точку $B$ на плоскости $\alpha$ и проведем через нее две прямые $a$ и $b$, лежащие в плоскости $\alpha$. Затем через точку $O$ проведем прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, параллельные прямым $a$ и $b$ соответственно. Существование и единственность таких прямых $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ вытекает из аксиомы A20. Через пару пересекающихся в точке $O$, но не совпадающих прямых $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ проходит плоскость $\beta$, которая параллельна плоскости $\alpha$ в силу теоремы 3.3.

Докажем единственность построенной плоскости $\beta$. Рассмотрим некоторую плоскость $\tilde{\beta}$, проходящую через точку $O$ и параллельную плоскости $\alpha$. Такая плоскость не имеет общих точек с плоскостью $\alpha$. Поэтому для прямых $a$ и $b$, лежащих в плоскости $\alpha$ имеем $a \parallel \tilde{\beta}$ и $b \parallel \tilde{\beta}$. Это позволяет применить к плоскости $\tilde{\beta}$, точке $O$ и к прямым $a$ и $\tilde{a}$ теорему 2.3, согласно которой из $\tilde{a} \parallel a$ вытекает $\tilde{a} \subset \tilde{\beta}$. Аналогичным образом получаем $\tilde{b} \subset \tilde{\beta}$. Значит, плоскость $\tilde{\beta}$ проходит через пару прямых $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, которыми задается плоскость $\beta$. Следовательно, $\tilde{\beta} = \beta$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.5. *Пусть $\alpha \neq \beta$ — две параллельные плоскости. Если плоскость $\gamma \neq \beta$ пересекает плоскость $\beta$ по прямой $b$, то она пересекает также и плоскость $\alpha$ по некоторой прямой $a$.*

Док-во. Если допустить, что $\gamma$ не пересекает $\alpha$, то согласно определению 3.1 плоскость $\gamma$ параллельна плоскости $\alpha$. Пусть $B$ — некоторая точка прямой $b$, полученной в пересечении плоскостей $\beta$ и $\gamma$. Тогда через точку $B$ проходят две плоскости $\beta$ и $\gamma$, параллельные плоскости $\alpha$, что противоречит теореме 3.4. Полученное противоречие показывает, что плоскость $\gamma$ пересекает плоскость $\alpha$ по некоторой прямой $a$. $\square$

Теорема 3.6. *Пусть $\alpha \neq \beta$ — две параллельные плоскости. Если прямая $c$ пересекает плоскость $\beta$, но не лежит в ней, то она пересекает также и плоскость $\alpha$.*

Док-во. Обозначим через $B$ точку пересечения плоскости $\beta$ с прямой $c$. Выберем на плоскости $\beta$ некоторую точку $C$, отличную от $B$, и проведем плоскость $\gamma$ через прямую $c$ и точку $C$. В пересечении плоскостей $\beta$ и $\gamma$ мы получим прямую

$b = BC$. Согласно теореме 3.5 плоскость $\gamma$ пересечет плоскость $\alpha$ по некоторой прямой $a$. Из параллельности $\alpha$ и $\beta$, применив теорему 3.1, получаем $a \parallel b$. Прямые $a$, $b$ и $c$ лежат в одной плоскости $\gamma$, что позволяет применить к ним теорему 1.2. Согласно этой теореме прямая $c$, пересекающая прямую $b$ в точке $B$, пересекает также и прямую $a$ в некоторой точке $A$. Но $a \subset \alpha$, следовательно, точка $A$ есть точка пересечения прямой $c$ и плоскости $\alpha$. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть $a \neq b$ — две параллельные прямые. Если плоскость $\gamma$ пересекает прямую $b$, но не содержит ее, то она пересекает также и прямую $a$.*

Упражнение 3.1. *Выведите теорему 3.7 как прямое следствие из теоремы 2.2.*

Теорема 3.8. *Пусть $\alpha \neq \beta$ — две параллельные плоскости. Тогда всякий перпендикуляр к плоскости $\alpha$ является перпендикуляром к плоскости $\beta$.*

Док-во. Пусть прямая $c$ есть перпендикуляр к плоскости $\alpha$ в точке $A$. Согласно теореме 3.7 прямая $c$ пересекает плоскость $\beta$ в некоторой точке $B$.

Докажем перпендикулярность прямой $c$ и плоскости $\beta$. Рассмотрим некоторую произвольную прямую $b$, лежащую в плоскости $\beta$ и проходящую через точку $B$. Через пару прямых $b$ и $c$ проходит плоскость $\gamma$. Она пересекает плоскость $\beta$ по прямой $b$. Обозначим через $a$ прямую, получающуюся в пересечении $\gamma$ с плоскостью $\alpha$. Прямая $a$ проходит через точку $A$. Из теоремы 3.1 получаем $a \parallel b$. Прямые $a$, $b$ и $c$ лежат в одной плоскости $\gamma$, поэтому к ним применима теорема 1.3. Согласно этой теореме из $a \perp c$ вытекает $b \perp c$. Таким образом, прямая $c$ оказывается перпендикулярной произвольной прямой $b$, лежащей в плоскости $\beta$ и проходящей через точку $B$. Это дает требуемый результат $c \perp \beta$. $\square$

Теорема 3.9. *Пусть $\alpha \neq \beta$ — две параллельные плоскости. Если плоскость $\gamma$ перпендикулярна плоскости $\alpha$, то она перпендикулярна также и плоскости $\beta$.*

Упражнение 3.2. *Выведите теорему 3.9 как следствие из теорем 3.5 и 3.8.*

## § 4. Сумма углов треугольника.

Теорема 4.1. *Сумма внутренних углов в любом треугольнике равна развернутому углу.*

Док-во. Выберем некоторый произвольный треугольник $ABC$. Проведем через вершину $B$ в этом треугольнике прямую, параллельную его стороне $AC$. Отметим на этой прямой точки $D$ и $E$ по разные стороны от точки $B$. Точки $A$ и $C$ и весь треугольник $ABC$ в целом лежит по одну сторону от прямой $DE$, поскольку отрезок $[AC]$ лежит на прямой, параллельной $DE$, и не может пересекаться с этой прямой. Применим теорему 1.1 к прямой $AB$, пересекающей две параллельные прямые $AC$ и $DE$. Она дает конгруэнтность углов $\angle DBA \cong \angle CAB$. Аналогичным образом, применение теоремы 1.1 к прямой $CB$ дает $\angle EBC \cong \angle BCA$. Углы $\angle DBA$, $\angle ABC$ и $\angle EBC$ имеют общую вершину и составляют развернутый угол $\angle DBE$. Учитывая полученные выше соотношения конгруэнтности углов мы можем записать

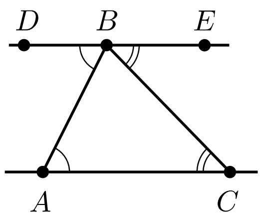



*Рис. 4.1*

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA \cong \angle DBE.$$

Это как раз и означает, что сумма внутренних углов треугольника $ABC$ совпадает с развернутым углом. $\square$

## § 5. Средняя линия треугольника.

Пусть $ABC$ — некоторый треугольник. Отметим середины сторон $[AB]$ и $[BC]$ в этом треугольнике. Обозначим их через $M$ и $N$ соответственно. Отрезок $[MN]$ называется *средней линией* треугольника $ABC$.

Теорема 5.1. *Средняя линия $[MN]$ в треугольнике $ABC$, соединяющая середины сторон $[AB]$ и $[BC]$, параллельна стороне $[AC]$ в этом треугольнике, причем $[AC] \cong 2 \cdot [MN]$.*

Док-во. Пусть $M$ — середина стороны $[AB]$ в треугольнике $ABC$. Через точку $M$ проведем прямую, параллельную стороне $[AC]$. Применив аксиому Паша A12, нетрудно показать, что такая прямая пересечет сторону $[BC]$ в некоторой внутренней точке $N$. Затем проведем через точку $M$ прямую, параллельную стороне $[BC]$. В пересечении этой прямой с отрезком $[AC]$ получим точку $K$, лежащую внутри отрезка $[AC]$. Соединим точки $N$ и $K$ отрезком $[NK]$. На прямых $MN$ и $MK$ отметим точки $D$ и $E$ для удобства обозначений углов.

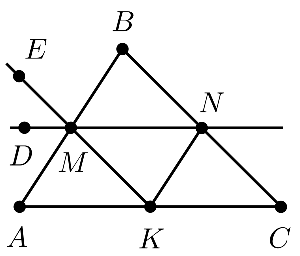



*Рис. 5.1*

Углы $\angle MBN$ и $\angle BME$ являются внутренними накрест лежащими углами в пересечении прямой $AB$ с параллельными прямыми $BC$ и $MK$. А углы $\angle BME$ и $\angle AMK$ являются вертикальными углами. Отсюда, применив теорему 1.1, получаем $\angle MBN \cong \angle AMK$. Далее рассмотрим углы $\angle MAK$ и $\angle DMA$. Они являются внутренними накрест лежащими углами в пересечении прямой $AB$ с параллельными прямыми $AC$ и $MN$. Теперь, если учесть вертикальность углов $\angle DMA$ и $\angle BMN$, получим $\angle MAK \cong \angle BMN$. Из следующих трех соотношений

$$[AM] \cong [MB], \qquad \angle AMK \cong \angle MBN, \qquad \angle MAK \cong \angle BMN$$

вытекает конгруэнтность треугольников $AMK$ и $MBN$ (см. теорему 5.2 из третьей главы). Как следствие этого получаем

$$[AK] \cong [MN], \qquad\qquad [MK] \cong [BN]. \tag{5.1}$$

Дополним (5.1) еще одним соотношением $\angle NMK \cong \angle MNB$, которое вытекает из рассмотрения внутренних накрест лежащих углов в пересечении прямой $MN$ с параллельными прямыми $BC$ и $MK$. Теперь применение теоремы 5.1 из третьей главы дает конгруэнтность треугольников $MBN$ и $NKM$.

В пересечении прямой $NK$ с параллельными прямыми $BC$ и $MK$ получаются внутренние накрест лежащие углы $\angle MKN$ и $\angle KNC$, а в пересечении прямой $NK$ с параллельными прямыми $AC$ и $MN$ получаются внутренние накрест лежащие углы $\angle CKN$ и $\angle KNM$. Теперь из соотношений

$$[NK] \cong [KN], \qquad \angle MKN \cong \angle KNC, \qquad \angle CKN \cong \angle KNM$$

вытекает конгруэнтность треугольников $NKM$ и $KNC$. Итак, все четыре треугольника $AMK$, $MBN$, $NKM$ и $KNC$ на рисунке 5.1 конгруэнтны. Отсюда

$$[BN] \cong [NC], \qquad\qquad [AK] \cong [KC] \cong [MN].$$

Первое из этих соотношений означает, что отрезок $[MN]$, лежащий на прямой, параллельной $AC$, является средней линией треугольника $ABC$. А второе соотношение эквивалентно $[AC] \cong 2 \cdot [MN]$. Теорема доказана. $\square$

В треугольнике $ABC$ можно провести три средние линии $[MN]$, $[NK]$ и $[KM]$, параллельные трем сторонам $[AC]$, $[BA]$ и $[CB]$ этого треугольника. Они разделяют треугольник $ABC$ на четыре конгруэнтных треугольника $BMN$, $NKC$, $MAK$ и $KNM$, стороны которых вдвое меньше соответствующих сторон треугольника $ABC$, а углы конгруэнтны соответствующим углам в треугольнике $ABC$.

## § 6. Средняя линия трапеции.

Пусть на двух параллельных прямых $a \neq b$ отмечены два отрезка $[AB]$ и $[CD]$. Соединим точки $A$, $B$, $C$ и $D$ четырьмя отрезками $[DA]$, $[DB]$, $[CA]$ и $[CB]$. Точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой $CD$, поскольку отрезок $[AB]$ не пересекается с прямой $CD$ (см. § 5 во второй главе). Лучи $[DA\rangle$ и $[DB\rangle$ не могут совпасть, поскольку в этом случае отрезок $[AB]$ лежал бы на прямой $DA$, пересекающей прямую $CD$. Отсюда вывод: один из двух углов $\angle CDA$ и $\angle CDB$ лежит внутри другого. Пусть для определенности $\angle CDB < \angle CDA$, как это изображено на рисунке 6.1. Это позволяет применить лемму 6.2 из второй главы. Из нее следует, что луч $[DB\rangle$ пересекает отрезок $[AC]$ в некоторой его внутренней точке $O$.

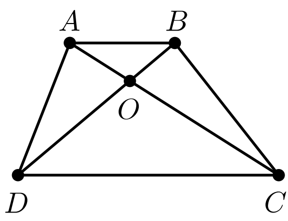



*Рис. 6.1*

Точка $O$ лежит на луче $[DB\rangle$, поэтому возможны следующие варианты взаимного расположения точек $D$, $B$ и $O$ на прямой $DB$:

$$\begin{aligned} &(D \blacktriangleright O \blacktriangleleft B), \\ &(D \blacktriangleright B \blacktriangleleft O). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Совпадение $O = B$ исключается, поскольку в этом случае отрезок $[AB]$ лежал бы на прямой $AC$, которая не параллельна прямой $CD$. Если допустить, что точка $B$ лежит между точками $D$ и $O$, то прямая $AB$ пересекает сторону $[DO]$ в треугольнике $DOC$, но не пересекает сторону $[OC]$. Применение аксиомы Паша A12 в этой ситуации приводит к тому, что прямая $AB$ пересекает сторону $[CD]$ в треугольнике $DOC$, что противоречит параллельности прямых $AB$ и $CD$. Полученное противоречие означает, что реализуется первый вариант расположения точек $D$, $B$ и $O$ в (6.1). То есть точка $O$ является внутренней точкой для обоих отрезков $[AC]$ и $[BD]$.

Теперь нетрудно показать, что отрезки $[DA]$ и $[CB]$ не пересекаются. Для этого достаточно рассмотреть треугольник $DAO$

и прямую $CB$. Прямая $CB$ не пересекает сторон $[DO]$ и $[OA]$ в треугольнике $DAO$. Значит, согласно аксиоме Паша A12 она не может пересечь и третью сторону $[DA]$ этого треугольника. Приведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 6.1. *Для любых двух отрезков $[AB]$ и $[CD]$, лежащих на параллельных прямых $a \neq b$ ровно один из двух отрезков $[DA]$ либо $[DB]$ пересекается ровно с одним из двух отрезков $[CA]$ либо $[CB]$ в некоторой внутренней точке $O$.*

Согласно теореме 6.1 отрезки $[AB]$ и $[CD]$, лежащие на двух параллельных прямых, можно дополнить до замкнутой *ломаной линии* без самопересечений. В ситуации, изображенной на рисунке 6.2, — это ломаная $ABCD$. Она ограничивает часть плоскости, состоящую из двух треугольников $ABC$ и $ADC$, которые пересекаются по их общей стороне $[AC]$. В общем случае всякая замкнутая ломаная без самопересечений на плоскости ограничивает некоторое множество точек плоскости, которое можно представить в виде объединения некоторого конечного числа треугольников, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Этот факт известен как *теорема Жордана.* Его доказательство можно найти в книге [7].

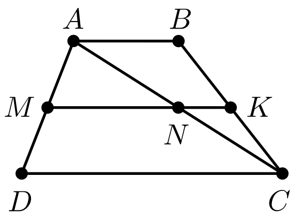


*Рис. 6.2*

Множество точек плоскости, ограниченное замкнутой ломаной, называется *многоугольником.* Звенья ломаной называются *сторонами* многоугольника. По их числу выделяются треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Определение 6.1. Четырехугольник, две стороны которого лежат на параллельных прямых, называется *трапецией.* Параллельные стороны в трапеции называются *основаниями*, а две оставшиеся стороны называются *боковыми сторонами*.

Определение 6.2. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции.

Пусть $ABCD$ — трапеция. Отрезки $[AC]$ и $[BD]$ называются *диагоналями* трапеции. Согласно теореме 6.1 они пересекаются в некоторой точке $O$, лежащей внутри каждого из этих отрезков (см. рисунок 6.1).

Теорема 6.2. *Средняя линия $[MK]$ в трапеции $ABCD$ параллельна ее основаниям $[AB]$ и $[CD]$, причем имеет место соотношение* $2 \cdot [MK] \cong [AB] + [CD]$.

Док-во. Рассмотрим пару треугольников $ABC$ и $CDA$, на которые разбивается трапеция $ABCD$ (см. рисунок 6.2). Проведем в них средние линии $[NK]$ и $[NM]$. Применим к ним теорему 5.1, что дает

$$NK \parallel AB, \qquad\qquad NM \parallel CD.$$

Теперь из $AB \parallel CD$ получаем, что обе прямые $NM$ и $NK$, проходящие через точку $N$, параллельны прямой $CD$. В силу аксиомы A20 такие прямые должны совпасть. То есть точки $M$, $N$ и $K$ лежат на одной прямой $MK$, которая параллельна основаниям трапеции.

Соотношение $2 \cdot [MK] \cong [AB] + [CD]$ вытекает из того, что отрезок $[MK]$ составлен из отрезков $[MN]$ и $[NK]$, для которых из теоремы 5.1 выводим $2 \cdot [MN] \cong [CD]$ и $2 \cdot [NK] \cong [AB]$. Теорема доказана. $\square$

## § 7. Параллелограмм.

Определение 7.1. Трапеция, боковые стороны которой параллельны, называется *параллелограммом*.

Теорема 7.1. *Трапеция является параллелограммом тогда и только тогда, когда ее основания конгруэнтны.*

Док-во. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Ее диагонали $[AC]$ и $[BD]$ пересекаются в некоторой точке $O$, лежащей внутри этих отрезков (см. рисунок 6.1). Из параллельности оснований трапеции $AB \parallel CD$ вытекает конгруэнтность следующих внутренних накрест лежащих углов:

$$\angle BAC \cong \angle ACD, \qquad \angle ABD \cong \angle BDC.$$

Если добавить к этому конгруэнтность оснований трапеции $[AB] \cong [CD]$, то в силу теоремы 5.2 из третьей главы мы получим конгруэнтность треугольников $AOB$ и $COD$. Отсюда

$$[AO] \cong [CO], \qquad [BO] \cong [DO]. \tag{7.1}$$

Углы $\angle AOD$ и $\angle BOC$ конгруэнтны, поскольку они являются вертикальными. Поэтому применение теоремы 5.1 из третьей главы и учет соотношений (7.1) дает конгруэнтность треугольников $AOD$ и $COB$. Отсюда для внутренних накрест лежащих углов $\angle ADB$ и $\angle DBC$ получаем $\angle ADB \cong \angle DBC$, что дает $AD \parallel BC$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

Пусть, наоборот, известно, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Тогда из параллельности прямых $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ вытекает следующие соотношения:

$$\angle BAC \cong \angle ACD, \qquad \angle BCA \cong \angle CAD.$$

Дополнив их тривиальным соотношением $[AC] \cong [CA]$ и применив теорему 5.2 из третьей главы, получим конгруэнтность треугольников $ABC$ и $CDA$. Отсюда имеем $[AB] \cong [CD]$ и $[AD] \cong [BC]$. Теорема доказана. $\square$

В ходе доказательства теоремы 7.1 мы установили следующие два дополнительных факта:

(1) противоположные стороны в любом параллелограмме конгруэнтны, то есть если $ABCD$ — параллелограмм, то $[AB] \cong [CD]$ и $[AD] \cong [BC]$;
(2) диагонали всякого параллелограмма делятся в точке пересечения пополам.

Теорема 7.2. *Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны конгруэнтны, то есть $[AB] \cong [CD]$ и $[AD] \cong [BC]$.*

Теорема 7.3. *Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали $[AC]$ и $[BD]$ пересекаются в некоторой их внутренней точке $O$ и делятся этой точкой пополам.*

Упражнение 7.1. *Рассмотрев различные варианты расположения точек $A$ и $C$ относительно прямой $BD$, докажите теоремы 7.2 и 7.3.*

## § 8. Сонаправленность и равенство векторов в пространстве.

Понятие сонаправленности векторов было введено во второй главе. Оно применялось только для векторов, лежащих на одной прямой. Понятие равенства векторов также относилось только к векторам, лежащим на одной прямой (см. определение mythedefinitionchapter4.22 из второй главы и определение 4.1 в третьей главе).

Определение 8.1. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, не лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если

(1) они лежат на параллельных прямых;
(2) отрезок $[BD]$, соединяющий их концы, не пересекает отрезок $[AC]$, соединяющий начала.

Определение 8.2. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если они сонаправлены и если отрезок $[AB]$ конгруэнтен отрезку $[CD]$.

Определения 8.1 и 8.2 могут быть сформулированы и в абсолютной геометрии. Однако, только в евклидовой геометрии наличие аксиомы A20, которая обеспечивает транзитивность отношения параллельности прямых (см. теорему 1.4), делает эти определения целесообразными.

Нетрудно видеть, что отношение сонаправленности векторов, даваемое определением 8.1 и определением 4.2 из второй главы, рефлексивно и симметрично. Доказательство его транзитивности требует рассмотрения нескольких случаев.

Лемма 8.1. *Пусть $A_0 \prec A_1 \prec A_2 \prec A_3$ — монотонная последовательность точек на прямой $a$. Тогда, если вектор $\overrightarrow{MN}$, лежащий на прямой $b \neq a$, сонаправлен вектору $\overrightarrow{A_1A_3}$, то он сонаправлен с каждым из векторов $\overrightarrow{A_0A_3}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$.*

Док-во. Сонаправленность векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ означает, что четырехугольник $MNA_3A_1$ представляет собой трапецию. Боковые стороны трапеции не пересекаются, поэтому прямая $NA_3$ не имеет общих точек со стороной $[MA_1]$ в треугольнике $MA_1A_2$. Эта прямая не имеет общих точек и со стороной $[A_1A_2]$ в треугольнике $MA_1A_2$. Применив аксиому Паша A12, заключаем, что прямая $NA_3$ не может пересекать и сторону $[MA_2]$ в таком треугольнике. Иными словами, отрезки $[MA_2]$ и $[NA_3]$ не пересекаются, что доказывает сонаправленность векторов $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_2A_3}$. Сонаправленность векторов $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_0A_3}$ устанавливается аналогичным образом из рассмотрения треугольника $MA_0A_1$. Тем самым, лемма доказана. $\square$

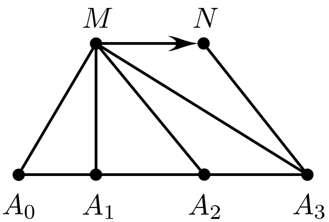



*Рис. 8.1*

Лемма 8.2. *Пусть* $A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec A_4$ *— монотонная последовательность точек на прямой* $a$. *Тогда, если вектор* $\overrightarrow{MN}$, *лежащий на прямой* $b \neq a$, *сонаправлен вектору* $\overrightarrow{A_1A_3}$, *то он сонаправлен с каждым из векторов* $\overrightarrow{A_1A_2}$ *и* $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Упражнение 8.1. *Докажите лемму 8.2, используя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 8.1.*

Лемма 8.3. *Пусть вектор* $\overrightarrow{MN}$ *лежит на прямой* $b$, *а вектора* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *лежат на прямой* $a \neq b$. *Тогда из* $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{AB}$ *и из* $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ *вытекает* $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.

Док-во. Пронумеруем точки $A$, $B$, $C$ и $D$ на прямой $a$ так, чтобы они образовывали монотонную последовательность $A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec A_4$. Пусть $A = A_i$, $B = A_j$, $C = A_p$ и $D = A_q$ и пусть $i < j$. Тогда из $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ следует $p < q$. Обозначим $r = \min\{i, p\}$ и $s = \max\{j, q\}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_iA_j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_rA_j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_rA_s},\\
&\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_rA_s} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_rA_q} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{A_pA_q}.
\end{aligned}
$$

Эта цепочка рассуждений есть результат последовательного применения лемм 8.1 и 8.2 с учетом неравенств $r \leqslant i < j \leqslant s$ и $r \leqslant p < q \leqslant s$. В конце ее мы получили требуемое соотношение $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{CD}$. Лемма доказана. □

Лемма 8.4. *Пусть вектор* $\overrightarrow{MN}$ *лежит на прямой* $b$, *а вектора* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *лежат на прямой* $a \neq b$. *Тогда из* $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{MN}$ *и из* $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ *вытекает* $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.

Док-во. Докажем лемму методом от противного. Допустим, что условия $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ выполнены, а условие $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ не выполнено. Тогда вектор $\overrightarrow{CD}$ сонаправлен вектору $\overrightarrow{BA}$, который является противоположным для вектора $\overrightarrow{AB}$. Из $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{BA}$, применив лемму 8.3, получаем

$\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{BA}$. Но одновременное выполнение двух соотношений $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MN} \upuparrows \overrightarrow{BA}$ противоречит теореме 6.1. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Теорема 8.1. *Отношение сонаправленности векторов в пространстве транзитивно, то есть из $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{EF}$ вытекает $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{EF}$.*

Док-во. Случай, когда все три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ лежат на одной прямой, был рассмотрен в § 2 второй главы. Случай, когда какие-то два из трех векторов лежат на одной прямой, описывается леммами 8.3 и 8.4. Остается случай общего положения, когда три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ лежат на трех различных прямых $a$, $b$ и $c$. В этом случае из соотношений $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{EF}$ вытекает параллельность соответствующих прямых $a \parallel b$ и $b \parallel c$, откуда в силу теоремы 1.4 следует паралклельность $a \parallel c$.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$, лежащий на прямой $a$. Через точку $A$ проведем плоскость $\alpha$, перпендикулярную прямой $a$. Согласно теореме 3.7 эта плоскость пересекает прямые $b$ и $c$. Обозначим соответствующие точки пересечения через $C'$ и $E'$. Аналогичным образом, через точку $B$ проведем плоскость $\beta \perp a$ и в пересечении плоскости $\beta$ с прямыми $b$ и $c$ получим точки $D'$ и $F'$. В силу теоремы 3.2 плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны. Поэтому отрезок $[AC']$ не пересекается с $[BD']$, отрезок $[C'E']$ не пересекается с $[D'F']$, а отрезок $[AE']$ не пересекается с $[BF']$. Это приводит к следующим соотношениям:

$$\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{C'D'}, \qquad \overrightarrow{C'D'} \upuparrows \overrightarrow{E'F'}, \qquad \overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{E'F'}. \tag{8.1}$$

Соединим условие $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ с первым соотношением (8.1) и учтем, что вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ лежат на одной прямой $b$. Применение леммы 8.4 дает $\overrightarrow{C'D'} \upuparrows \overrightarrow{CD}$. Соединим это со вторым соотношением (8.1) и применим лемму 8.3. В результате получится $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{E'F'}$, что вместе с $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{EF}$ после применения леммы 8.4 дает $\overrightarrow{EF} \upuparrows \overrightarrow{E'F'}$. Последний шаг состоит в том, чтобы соединить $\overrightarrow{EF} \upuparrows \overrightarrow{E'F'}$ с третьим соотношением (8.1) и применить лемму 8.3. В итоге получим требуемое соотношение $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{EF}$. Теорема доказана. $\square$

Итак, мы установили, что отношение сонаправленности векторов в пространстве рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть оно является отношением эквивалентности. Отношение конгруэнтности отрезков также обладает этими свойствами. Теперь из определения 8.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 8.2. *Отношение равенства векторов в евклидовой геометрии рефлексивно, симметрично и транзитивно, в силу чего оно является отношением эквивалентности.*

Классы равных друг другу векторов в евклидовой геометрии называются *свободными векторами.* Геометрические вектора, составляющие тот или иной класс, называются *геометрическими реализациями* свободного вектора.

Теорема 8.3. *Для всякого свободного вектора* $\mathbf{a}$ *и произвольной точки* $A$ *существует геометрическая реализация* $\overrightarrow{AB}$ *вектора* $\mathbf{a}$ *с началом в точке* $A$.

Теорема 8.3 оправдывает выбранную терминологию. Свободный вектор назван «свободным», поскольку он может быть реализован в любой точке пространства без ограничений.

Упражнение 8.2. *Пусть* $\overrightarrow{CD}$ *некоторая геометрическая реализация свободного вектора* $\mathbf{a}$. *Докажите теорему 8.3, указав явный способ построения требуемой геометрической реализации* $\overrightarrow{AB}$ *с началом в точке* $A$.

Определение 8.3. Свободные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют *коллинеарными* и записывают $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, если некоторые их геометрические реализации $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых. Если $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{AB}$, то говорят, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены. В случае, когда вектора **a** и **b** коллинеарны, но не сонаправлены, говорят, что они противонаправлены.

Упражнение 8.3. *Докажите корректность сформулированного выше определения 8.3, показав, что понятия коллинеарности и сонаправленности свободных векторов* **a** *и* **b** *не зависят от того или иного конкретного выбора их геометрических реализаций* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$.

Теорема 8.4. *Для любых четырех точек $A$, $B$, $C$ и $D$ из* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ *вытекает* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ *и, наоборот, из* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ *вытекает* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Док-во. В случае, когда точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на одной прямой, теорема 8.4 сводится к теореме 4.1 из третьей главы. Поэтому рассмотрим случай, когда точки $A$, $B$, $C$ и $D$ не лежат на одной прямой. Условие $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ дает

$$AB \parallel CD, \qquad\qquad [AB]\cong[CD],$$

причем отрезки $[AC]$ и $[BD]$ не пересекаются. В этом ситуации применима теорема 7.1, в силу которой четырехугольник $ACDB$ является параллелограммом. Отсюда на основе теоремы 7.2 получаем $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Соотношение $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ из $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ выводится аналогично. $\square$

## § 9. Вектора и параллельные переносы.

Отображения сдвига на вектор вдоль прямых были определены в § 14 четвертой главы. В евклидовой геометрии наличие аксиомы A20 позволяет существенно уточнить свойства таких отображений, сделав их описание более подробным.

Теорема 9.1. *Если* **c** *— скользящий вектор на прямой $a$ и если* $\overrightarrow{AB}$ *— некоторая его геометрическая реализация, лежащая на прямой $a$, то соотношение* $p_{a\mathbf{c}}(C)=D$ *выполняется в том и* *только в том случае, когда вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны в смысле определения 8.2.*

Док-во. Если точка $C$ лежит на прямой $a$, то точка $D$ также лежит на прямой $a$. В этом случае теорема 9.1 сводится к теореме 4.2 из третьей главы.

Рассмотрим случай, когда точка $C$ не лежит на прямой $a$. Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат в одной плоскости (см. теорему 14.1 в четвертой главе). Обозначим эту плоскость через $\alpha$. Учтем, что $B = p_{a\mathbf{c}}(A)$, и отметим на прямой $a$ дополнительную точку $F = p_{a\mathbf{c}}(B)$. Проведем в плоскости $\alpha$ прямые $AC$ и $BD$ и отметим на прямой $BD$ точку $E$ как показано на рисунке 9.1. Тогда из соотношений

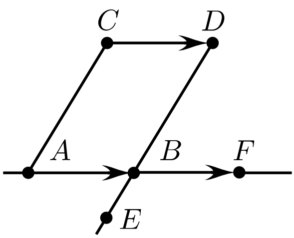



*Рис. 9.1*

$$
\begin{aligned}
p_{a\mathbf{c}}(A) &= B, \\
p_{a\mathbf{c}}(C) &= D, \\
p_{a\mathbf{c}}(B) &= F
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

в силу того, что сдвиг $p_{a\mathbf{c}}$ является отображением конгруэнтного перенесения, вытекает конгруэнтность углов $\angle CAB \cong \angle DBF$ и конгруэнтность отрезков $[AC] \cong [BD]$. Долее, используя конгруэнтность вертикальных углов $\angle DBF$ и $\angle ABE$, получаем $\angle CAB \cong \angle ABE$. Но углы $\angle CAB$ и $\angle DBF$ — это внутренние накрест лежащие углы, получающиеся в пересечении прямых $AC$ и $BD$ прямой $a$. Следовательно, из $\angle CAB \cong \angle ABE$ вытекает параллельность прямых $AC \parallel BD$. По построению отображения $p_{a\mathbf{c}}$ точки $C$ и $D$ лежат по одну сторону от прямой $a$ (см. § 14 в четвертой главе). Поэтому отрезки $[AB]$ и $[CD]$ не пересекаются, в силу чего четырехугольник $ACDB$ является трапецией с основаниями $[AC]$ и $[BD]$. Учтем дополнительно соотношение $[AC] \cong [BD]$, выведенное из (9.1), и применим теорему 7.1. Согласно этой теореме четырехугольник $ACDB$ является параллелограммом. Отсюда сразу же получаем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Пусть, наоборот, известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Тогда четырехугольник $ACDB$ является параллелограммом, в силу чего $[AC] \cong [BD]$ и $\angle CAB \cong \angle DBF$. Вспомним, что отображение $p_{a\mathbf{c}}$ получается путем продолжения отображения $p_{\mathbf{c}}: a \to a$ с прямой на плоскость $\alpha$ и последующего продолжения до отображения всего пространства (см. § 14 в четвертой главе). Оно переводит полуплоскости $a_+$ в $a_+$ и $a_-$ в $a_-$. Тогда из

$$
\begin{aligned}
&[AC] \cong [BD], && \angle CAB \cong \angle DBF,\\
&p_{a\mathbf{c}}(A) = B, && p_{a\mathbf{c}}(B) = F
\end{aligned}
$$

и из того, что точки $C$ и $D$ лежат по одну сторону от прямой $a$, получаем $p_{a\mathbf{c}}(C) = D$. Теорема доказана в обе стороны. □

Теорема 9.2. *Пусть $\overrightarrow{AB}$ — геометрическая реализация скользящего вектора $\mathbf{c}$ на прямой $a$ и пусть $\overrightarrow{CD}$ геометрическая реализация вектора $\mathbf{d}$ на прямой $b$. Тогда равенство $p_{a\mathbf{c}} = p_{b\mathbf{d}}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Теорема 9.2 легко выводится из теоремы 9.1, если учесть симметричность и транзитивность отношения равенства векторов. Она показывает, что в евклидовой геометрии прямая $a$ играет лишь вспомогательную роль при построении отображения сдвига $p_{a\mathbf{c}}$. Ее можно заменить любой другой прямой $b$, параллельной $a$, если скользящий вектор $\mathbf{c}$ заменить на свободный вектор $\mathbf{c}$. Поэтому отображение $p_{a\mathbf{c}}$ обозначают $p_{\mathbf{c}}$ и называют *параллельным переносом* на вектор $c$.

Теорема 9.3. *Для любых двух точек $A$ и $B$ в пространстве существует ровно один параллельный перенос $p_{\mathbf{c}}$, переводящий точку $A$ в точку $B$.*

Док-во. Для доказательства существования требуемого параллельного переноса $p_{\mathbf{c}}$ достаточно взять свободный вектор $\mathbf{c}$, геометрической реализацией которого является вектор $\overrightarrow{AB}$. Теперь, если допустить, что $p_{\mathbf{d}}(A) = B$ для некоторого свободного вектора с геометрической реализацией $\overrightarrow{CD}$, то из теоремы 9.1 получим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Следовательно, $\mathbf{c} = \mathbf{d}$, что доказывает единственность параллельного переноса $p_{\mathbf{c}}$. $\square$

Теорема 9.3 позволяет использовать обозначение $p_{AB}$ для обозначения параллельного переноса $p_{\mathbf{c}}$, переводящего точку $A$ в точку $B$. При этом $\overrightarrow{AB}$ есть геометрическая реализация для свободного вектора $\mathbf{c}$.

## § 10. Группа параллельных переносов.

Теорема 10.1. *Отображение $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ является параллельным переносом тогда и только тогда, когда для любых двух точек $X$ и $Y$ имеет место равенство $\overrightarrow{X f(X)} = \overrightarrow{Y f(Y)}$.*

Док-во. Если $f = p_{\mathbf{c}}$ — параллельный перенос на некоторый вектор $\mathbf{c}$, переводящий точку $A$ в точку $B$, то равенство $\overrightarrow{X f(X)} = \overrightarrow{Y f(Y)}$ вытекает из равенств

$$\overrightarrow{X f(X)} = \overrightarrow{AB}, \qquad\qquad \overrightarrow{Y f(Y)} = \overrightarrow{AB},$$

которые, в свою очередь, являются следствиями теоремы 9.1.

Пусть, наоборот, $f$ — такое отображение, что для любых двух точек $X$ и $Y$ выполняется равенство $\overrightarrow{X f(X)} = \overrightarrow{Y f(Y)}$. Фиксируем некоторую точку $A$ и обозначим $B = f(A)$. Пусть $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$. Тогда для любой точки $X \in \mathbb{E}$ имеем

$$\overrightarrow{X f(X)} = \overrightarrow{AB}, \qquad\qquad \overrightarrow{X p_{\mathbf{c}}(X)} = \overrightarrow{AB}. \tag{10.1}$$

Первое из соотношений (10.1) вытекает из $\overrightarrow{X f(X)} = \overrightarrow{Y f(Y)}$ при подстановке $Y = A$, а второе является следствием теоремы 9.1. Из (10.1) выводим $\overrightarrow{X f(X)} = \overrightarrow{X p_{\mathbf{c}}(X)}$, что дает $f(X) = p_{\mathbf{c}}(X)$ для всех $X \in \mathbb{E}$. То есть отображения $f$ и $p_{\mathbf{c}}$ совпадают. $\square$

Теорема 10.2. *Композиция двух параллельных переносов есть параллельный перенос.*

Док-во. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два свободных вектора, задающих параллельные переносы $p_{\mathbf{a}}$ и $p_{\mathbf{b}}$, и пусть $X$ и $X'$ — некоторые две произвольные точки в пространстве. Введем обозначения

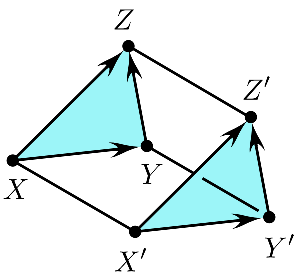



*Рис. 10.1*

$$Y = p_{\mathbf{a}}(X), \qquad Z = p_{\mathbf{b}}(Y),$$
$$Y' = p_{\mathbf{a}}(X'), \qquad Z' = p_{\mathbf{b}}(Y').$$

Тогда, если $f = p_{\mathbf{b}} \circ p_{\mathbf{a}}$, то $Z = f(X)$ и $Z' = f(X')$. Применим теорему 10.1 к отображению $p_{\mathbf{a}}$. Это приводит к равенству $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$. Аналогичным образом, применение теоремы 10.1 к отображению $p_{\mathbf{b}}$ дает $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{Y'Z'}$. Теперь воспользуемся теоремой 8.4. В силу этой теоремы из $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$ следует $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}$, а из $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{Y'Z'}$ следует $\overrightarrow{YY'} = \overrightarrow{ZZ'}$. Пользуясь транзитивностью бинарного отношения равенства векторов, получаем $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{ZZ'}$. Применив теорему 8.4 еще раз, выводим соотношение $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{X'Z'}$, которое запишем в следующем виде

$$\overrightarrow{Xf(X)} = \overrightarrow{X'f(X')}. \tag{10.2}$$

Теперь в силу произвольности точек $X$ и $X'$ применение теоремы 10.1 к соотношению (10.2) показывает, что отображение $f = p_{\mathbf{b}} \circ p_{\mathbf{a}}$ есть параллельный перенос. □

Теорема 10.3. *Любые два отображения параллельного переноса перестановочны:* $p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{b}} = p_{\mathbf{b}} \circ p_{\mathbf{a}}$.

Док-во. Выберем некоторую точку $A$ в пространстве и положим $B = p_{\mathbf{b}}(A)$, $D = p_{\mathbf{a}}(B)$ и $C = p_{\mathbf{a}}(A)$. Применение теоремы 10.1 к отображению $p_{\mathbf{a}}$ дает $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, что, в свою очередь, позволяет применить теорему 8.4. Из этой теоремы получаем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $p_{\mathbf{b}}(C) = D$, что вытекает из теоремы 9.1. В результате для отображений $p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{b}}$ и $p_{\mathbf{b}} \circ p_{\mathbf{a}}$ получаем

$$p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{b}}(A) = D, \qquad\qquad p_{\mathbf{b}} \circ p_{\mathbf{a}}(A) = D. \tag{10.3}$$

Согласно теореме 10.3 композиции $p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{b}}$ и $p_{\mathbf{b}} \circ p_{\mathbf{a}}$ являются параллельными переносами, причем, как это видно из (10.3), они переводят точку $A$ в точку $D$. В силу теоремы 9.3 они должны совпасть: $p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{b}} = p_{\mathbf{b}} \circ p_{\mathbf{a}}$. $\square$

Теорема 10.2 показывает, что в евклидовой геометрии множество параллельных переносов замкнуто относительно операции взятия композиции. Оно является группой относительно этой операции (см. определение 4.2 в третьей главе). Единичным элементом в группе параллельных переносов служит тождественное отображение $\mathrm{id} = p_{\mathbf{0}}$, интерпретируемое как перенос на нулевой вектор. Согласно теореме 10.3 группа параллельных переносов абелева.

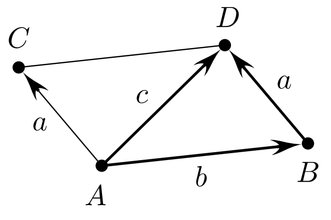



*Рис. 10.2*

Теоремы 9.1, 9.2 и 9.3, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между свободными векторами и параллельными переносами, позволяют задать операцию сложения векторов по формуле

$$p_{\mathbf{a}} \circ p_{\mathbf{b}} = p_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

В силу перестановочности $p_{\mathbf{a}}$ и $p_{\mathbf{b}}$ сложение векторов коммутативно, то есть $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Переходя от свободных векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ к их геометрическим реализациям $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$, получим

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}, \tag{10.4}$$

где $\overrightarrow{AD}$ — геометрическая реализация вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Соотношение (10.4) называют *правилом треугольника* для сложения векторов. Треугольник $ABC$ на рисунке 10.2 можно достроить до параллелограмма, что позволяет записать

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}. \tag{10.5}$$

Соотношение (10.5) называется *правилом параллелограмма* для сложения векторов.

В четвертой главе мы сформулировали три теоремы, касающиеся свойств композиции отображений сдвига на вектор вдоль прямых в абсолютной геометрии. Это теоремы 14.3, 14.4 и 14.5. В евклидовой геометрии они формулируются так.

Теорема 10.4. *Пусть $p_{\mathbf{c}}$ и $p_{\mathbf{d}}$ — два параллельных переноса. Если их композиция $f = p_{\mathbf{c}} \circ p_{\mathbf{d}}$ имеет неподвижную точку $O$, то она есть тождественное отображение: $f = \mathrm{id}$.*

Теорема 10.5. *Если композиция трех либо большего числа параллельных переносов имеет неподвижную точку, то она является тождественным отображением.*

Повороты, о которых говорится в теоремах 14.3, 14.4 и 14.5 в евклидовой геометрии вырождаются в тривиальный поворот на нулевой угол, совпадающий с тождественным отображением. Доказательство теорем 10.4 и 10.5 очевидно, поскольку композиция любого числа параллельных переносов есть параллельный перенос. А параллельный перенос, имеющий неподвижную точку, есть перенос на нулевой вектор. Он совпадает с тождественным отображением.

## § 11. Гомотетия и подобие.

Отображение гомотетии и отображения подобия для прямых были определены в § 8 пятой главы. Отображение гомотетии можно определить и на всем пространстве. Выберем некоторую точку $O$, которую назовем *центром гомотетии*, и некоторое вещественное число $k$, которое назовем *коэффициентом гомотетии.* Определим тображение $h_{kO}\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ так:

(1) для точки $O$ положим $h_{kO}(O) = O$;
(2) если $X \neq O$, то проведем прямую $OX$, возьмем вектор $\overrightarrow{OX}$, умножим его на число $k$ и отложим на прямой $OX$ вектор $\overrightarrow{OY} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, после чего положим $Y = h_{kO}(X)$.

Построения, задающие отображение гомотетии, можно выполнить как в евклидовой, так и в абсолютной геометрии. Однако, в абсолютной геометрии мы не смогли бы доказать каких-либо свойств отображения гомотетии всего пространства, которые делали бы его заслуживающим внимания.

Пусть $h_{kO}$ — отображение гомотетии с центром в точке $O$ и коэффициентом $k$. При $k = 1$ это отображение совпадает с тождественным отображением $h_{kO} = \mathrm{id}$, а при $k = -1$ оно переходит в отображение инверсии $h_{kO} = i_O$. Кроме того, если $k = p \cdot q$, то $h_{kO} = h_{pO} \circ h_{qO}$. В частности, при $k = -q$ имеем $h_{kO} = h_{qO} \circ i_O$, что часто позволяет ограничиваться рассмотрением отображений гомотетии с коэффициентом $k > 0$.

Теорема 11.1. *Пусть $f = h_{kO}$ — гомотетия с центром в точке $O$ и с коэффициентом $k$. Тогда для любых двух точек $X$ и $Y$ выполнено соотношение $|f(X)f(Y)| = |k| \cdot |XY|$, причем прямая, соединяющая точки $f(X)$ и $f(Y)$, параллельна прямой, проведенной через точки $X$ и $Y$.*

Док-во. Для случая, когда точки $X$, $Y$ и $O$ лежат на одной прямой, утверждение теоремы 11.1 есть следствие теоремы 8.1 из пятой главы.

Рассмотрим случай, когда точки $X$ и $Y$ не лежат на одной прямой. Проведем прямые $OX$ и $OY$. Каждому вещественному числу $k$ поставим в соответствие точки $X(k)$ и $Y(k)$, определив их следующим образом:

$$X(k) = h_{kO}(X), \qquad\qquad Y(k) = h_{kO}(Y).$$

Тогда $X = X(1)$ и $Y = Y(1)$. Рассмотрим сначала целочисленные значения $k = 1, 2, 4, 8, \ldots$, являющиеся степенями двойки, а также рациональные значения $k = 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$, являющиеся отрицательными целыми степенями двойки. Заметим, что

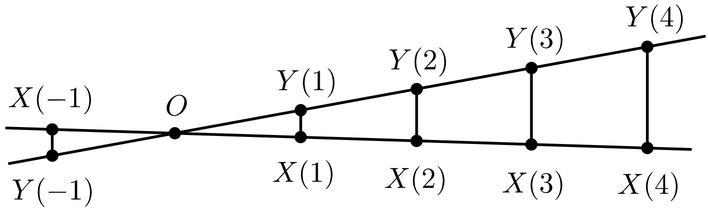



*Рис. 11.1*

отрезок $[X(1/2)Y(1/2)]$ является средней линией в треугольнике $XOY$, отрезок $[XY]$ есть средняя линия в треугольнике $X(2)OY(2)$, отрезок $[X(2)Y(2)]$ есть средняя линия в треугольнике $X(4)OY(4)$ и т. д. Следовательно, отрезки вида $[X(2^q)Y(2^q)]$ параллельны, а длины таких отрезков вычисляются по формуле $|X(2^q)Y(2^q)| = 2^q \cdot |XY|$. Другими словами, утверждение теоремы выполнено для гомотетии с коэффициентом $k = 2^q$, где $q \in \mathbb{Z}$.

В качестве второго шага докажем утверждение теоремы для всех положительных двоично-рациональных значений $k$. Всякое такое $k$ представляется в виде $k = 2^q \cdot n$, где $n$ — некоторое нечетное натуральное число. Рассмотрим запись числа $n$ в двоичной системе счисления:

$$n = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0.$$

Здесь $a_0 = 1$, а числа $a_1, \ldots, a_m$ принимают значения 0 или 1. Обозначим через $\mu(n)$ число единиц в двоичной записи числа $n$ и проведем доказательство утверждения теоремы индукцией по числу $\mu(n)$. Если $\mu(n) = 1$, то в силу нечетности $n = 1$. Тогда

$k = 2^q$, а для этого случая утверждение теоремы уже доказано.

Предположим, что утверждение теоремы доказано для всех $k = 2^q \cdot n$, таких, что $\mu(n) < s$. Рассмотрим некоторое нечетное натуральное $n$, для которого $\mu(n) = s$. Тогда

$$n = 2^p \cdot \tilde{n} + 1 = \frac{2^{p+1} \cdot \tilde{n} + 2}{2}, \tag{11.1}$$

где $p > 0$, а $\tilde{n}$ нечетно и $\mu(\tilde{n}) = s - 1$. Обозначим $k_1 = 2^{q+1} \cdot 1$ и $k_2 = 2^{q+p+1} \cdot \tilde{n}$. Для числа $k$ из (11.1) выводим

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{11.2}$$

Для чисел $k_1$ и $k_2$ утверждение теоремы выполнено по предположению индукции. Из этого и в силу (11.2) заключаем, что отрезок $[X(k)Y(k)]$ является средней линией в трапеции $X(k_1)X(k_2)Y(k_2)Y(k_1)$. Тогда прямая $X(k)Y(k)$ параллельна $XY$, а длина отрезка $[X(k)Y(k)]$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} |X(k)Y(k)| &= \frac{|X(k_1)Y(k_1)| + |X(k_2)Y(k_2)|}{2} = \\ &= \frac{k_1 \cdot |XY| + k_2 \cdot |XY|}{2} = \frac{(k_1 + k_2) \cdot |XY|}{2}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Из (11.2) и (11.3) выводим $|X(k)Y(k)| = k \cdot |XY|$. Таким образом, индукционный переход от $\mu(n) < s$ к $\mu(n) = s$ выполнен и утверждение теоремы доказано для всех положительных двоично-рациональных значений $k$.

Теперь рассмотрим положительное вещественное число $k$. Пусть $a_m$ и $b_m$ — двоично рациональные приближения для $k$:

$$\frac{p_m}{2^m} = a_m \leqslant k < b_m = \frac{p_m + 1}{2^m}. \tag{11.4}$$

Тогда для $|X(k)Y(k)|$ из неравенства треугольника получим

$$|X(k)Y(k)| < |X(k)X(b_m)| + |X(b_m)Y(b_m)| + |Y(b_m)Y(k)|$$

(см. теорему 2.5 в пятой главе). Но длины отрезков в правой части полученного неравенства вычисляются явно:

$$\begin{aligned} &|X(k)X(b_m)| = (b_m - k) \cdot |OX|,\\ &|X(b_m)Y(b_m)| = b_m \cdot |XY|, \\ &|Y(b_m)Y(k)| = (b_m - k) \cdot |OY|. \end{aligned} \tag{11.5}$$

В силу (11.4) имеем $b_m - k < 2^{-m}$. Это вместе с (11.5) позволяет преобразовать оценку для $|X(k)Y(k)|$ к виду

$$|X(k)Y(k)| < k \cdot |XY| + 2^{-m} \cdot (|OX| + |XY| + |YO|).$$

Аналогичным образом из неравенства треугольника получаем

$$|X(a_m)Y(a_m)| \leqslant |X(a_m)X(k)| + |X(k)Y(k)| + |Y(k)Y(a_m)|,$$

что можно преобразовать к следующему виду:

$$|X(k)Y(k)| \geqslant k \cdot |XY| - 2^{-m} \cdot (|OX| + |XY| + |YO|).$$

Теперь учтем произвольность натурального параметра $m$ в оценках для $|X(k)Y(k)|$. Это дает требующееся нам соотношение $|X(k)Y(k)| = k \cdot |XY|$.

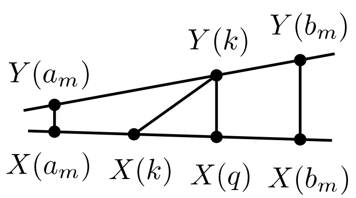



*Рис. 11.2*

Остается доказать, что прямые $X(k)Y(k)$ и $XY$ параллельны. Сделаем это методом от противного. Допустим, что прямые $X(k)Y(k)$ и $XY$ не параллельны. Проведем через точку $Y(k)$ прямую $a$, параллельную прямой $XY$, и обозначим через $\tilde{X}$ точку пересечения прямой $a$ с прямой $OX$. Точке $\tilde{X}$ соответствует число $q$, такое, что $\tilde{X} = X(q)$. Из неравенств (11.4) следует, что точки $X(k)$ и $Y(k)$ лежат на боковых сторонах трапеции $X(a_m)X(b_m)Y(b_m)Y(a_m)$. Прямая $a$, параллельная основаниям такой трапеции и пересекающая боковую строну $[Y(b_m)Y(a_m)]$, обязательно пересекает и другую боковую сторону $[X(a_m)X(b_m)]$, что вытекает из аксиомы Паша A12, примененной к треугольникам $Y(a_m)X(b_m)Y(b_m)$ и $X(a_m)Y(a_m)X(b_m)$. Следовательно, точка $X(q)$ так же, как и точка $X(k)$, лежит внутри отрезка $[X(a_m)X(b_m)]$. Отсюда

$$|X(k)X(q)| \leqslant |X(a_m)X(b_m)| = 2^{-m} \cdot |OX|.$$

Если наше допущение верно, то $X(k) \neq X(q)$ и мы приходим к противоречию с теоремой 5.1 из пятой главы. Полученное противоречие доказывает совпадение $X(q) = X(k)$, откуда вытекает параллельность $X(k)Y(k) \parallel XY$.

Итак, мы доказали теорему 11.1 для всех вещественных $k > 0$. Распространение ее на случай $k < 0$ не составляет труда, поскольку для $k = -q$ гомотетия $h_{kO}$ с отрицательным коэффициентом $k < 0$ есть композиция гомотетии $h_{qO}$ и отображения инверсии $i_O$. $\square$

Теорема 11.2. *Пусть $f = h_{kO}$ — гомотетия с центром в точке $O$ и коэффициентом $k$. Тогда*

(1) *если точки $X$, $Y$ и $Z$ лежат на одной прямой, то и их образы $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ лежат на одной прямой, причем из $(X \blacktriangleright Y \blacktriangleleft Z)$ вытекает $(f(X) \blacktriangleright f(Y) \blacktriangleleft f(Z))$;*

(2) *если точки $X$, $Y$ и $Z$ не лежат на одной прямой, то и точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ не лежат на одной прямой.*

Док-во. Пусть точки $X$, $Y$ и $Z$ лежат на одной прямой, причем пусть для определенности $(X \blacktriangleright Y \blacktriangleleft Z)$. Тогда имеет место равенство $|XY| + |YZ| = |XZ|$, что является следствием теоремы 7.3 в пятой главе. Применив теорему 11.1, отсюда выводим равенство $|f(X)f(Y)| + |f(Y)f(Z)| = |f(X)f(Z)|$. Если допустить, что точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ не лежат на одной прямой, то мы получаем неравенство треугольника $|f(X)f(Y)| + |f(Y)f(Z)| > |f(X)f(Z)|$, которое несовместимо с равенством $|f(X)f(Y)| + |f(Y)f(Z)| = |f(X)f(Z)|$.

Докажем, что из соотношения $(X \blacktriangleright Y \blacktriangleleft Z)$ вытекает аналогичное соотношение $(f(X) \blacktriangleright f(Y) \blacktriangleleft f(Z))$. Если это не так, то возможны следующие два варианта расположения точек:

$$(f(Y) \blacktriangleright f(X) \blacktriangleleft f(Z)), \qquad (f(X) \blacktriangleright f(Z) \blacktriangleleft f(Y)).$$

В первом из этих случаев имеем $|f(X)f(Z)| < |f(Y)f(Z)|$, а во втором — $|f(X)f(Z)| < |f(X)f(Y)|$. Легко видеть, что ни одно из этих неравенств не может быть выполнено одновременно с равенством $|f(X)f(Y)|+|f(Y)f(Z)| = |f(X)f(Z)|$, которое вытекает из $(X \blacktriangleright Y \blacktriangleleft Z)$. Поэтому имеет место требуемый вариант расположения точек, когда $(f(X) \blacktriangleright f(Y) \blacktriangleleft f(Z))$.

Пусть теперь, наоборот, точки $X$, $Y$ и $Z$ не лежат на одной прямой. Допустим, что их образы $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ лежат на одной прямой и положим $(f(X) \blacktriangleright f(Y) \blacktriangleleft f(Z))$ для определенности. Тогда $|f(X)f(Y)| + |f(Y)f(Z)| = |f(X)f(Z)|$. Теперь соотношения $|f(X)f(Y)| = |k| \cdot |XY|$, $|f(Y)f(Z)| = |k| \cdot |YZ|$, $|f(X)f(Z)| = |k| \cdot |XZ|$, вытекающие из теоремы 11.1, для исходных точек $X$, $Y$ и $Z$ дают $|XY| + |YZ| = |XZ|$. Однако, точки $X$, $Y$ и $Z$ не лежат на одной прямой, поэтому для них имеет место неравенство треугольника $|XY| + |YZ| > |XZ|$, которое противоречит равенству $|XY| + |YZ| = |XZ|$. Полученное противоречие доказывает, что точки $f(X)$, $f(Y)$ и $f(Z)$ не лежат на одной прямой. $\square$

Теорема 11.3. *Пусть $f = h_{kO}$ — гомотетия с центром в точке $O$ и коэффициентом $k$. Тогда, если точки $X$, $Y$ и $Z$ не лежат на одной прямой, то $\angle XYZ \cong \angle f(X)f(Y)f(Z)$.*

Док-во. Пусть $k > 0$. Проведем из центра гомотетии некоторый произвольный луч $h$ и отметим на нем точку $A$, так, чтобы было выполнено соотношение $[OA] \cong [XY]$. Затем из точки $O$ проведем еще один луч $q$, такой, что $\angle hq \cong \angle XYZ$. Отметим на луче $k$ точку $B$, удовлетворяющую условию $[OB] \cong [YZ]$. Три точки $O$, $A$ и $B$ образуют треугольник $AOB$, конгруэнтный треугольнику $XYZ$ (см. теорему 5.1 в третьей главе). Из этого вытекают следующие соотношения:

$$|XY| = |OA|, \qquad |YZ| = |OB|, \qquad |XZ| = |AB|. \tag{11.6}$$

Применим отображение гомотетии $f = h_{kO}$ ко всем точкам $O$, $A$, $B$, $X$, $Y$ и $Z$. При этом точка $O$ остается на месте, то есть $f(O) = O$, а точки $A$ и $B$ переходят в точки $f(A)$ и $f(B)$, лежащие на тех же лучах $h$ и $k$, что и точки $A$ и $B$. Отсюда для углов получаются следующие соотношения:

$$\angle f(A)Of(B) = \angle hk = \angle AOB \cong \angle XYZ. \tag{11.7}$$

Образы точек $X$, $Y$ и $Z$ образуют треугольник $f(X)f(Y)f(Z)$, стороны которого конгруэнтны соответствующим сторонам в треугольнике $f(A)Of(B)$. Это вытекает из соотношений

$$\begin{aligned}
|f(X)f(Y)| &= |f(A)O|,\\
|f(Y)f(Z)| &= |f(B)O|,\\
|f(X)f(Z)| &= |f(A)f(B)|,
\end{aligned}$$

которые, в свою очередь, получаются в результате применения теоремы 11.1 к соотношениям (11.6). Теперь применение теоремы 5.5 из третьей главы дает конгруэнтность треугольников $f(X)f(Y)f(Z)$ и $f(A)Of(B)$, откуда вытекает конгруэнтность углов $\angle f(X)f(Y)f(Z) \cong \angle f(A)Of(B)$. Соединив это с (11.7), получаем соотношение $\angle f(X)f(Y)f(Z) \cong \angle XYZ$, которое и требовалось доказать.

Случай $k < 0$ сводится к случаю $k > 0$, ибо для $k = -q$ выполнено соотношение $h_{kO} = h_{qO} \circ i_O$, где $i_O$ — отображение инверсии, которое сохраняет углы. $\square$

Теоремы 11.1, 11.2 и 11.3 показывают, что при гомотетии прямые переходят в прямые (причем параллельные исходным), отрезки переходят в отрезки и лучи переходят в лучи. При этом величины углов сохраняются. Следовательно, сохраняется и перпендикулярность прямых. Применение теоремы 1.5 из четвертой главы теперь позволяет доказать, что при гомотетии плоскость переходит в плоскость, полуплоскость — в полуплоскость и полупространство — в полупространство. Перечисленные свойства гомотетии идентичны соответствующим свойствам отображений конгруэнтного перенесения.

Отметим, что отображение $f = h_{kO}$ биективно, обратным отображением $f^{-1}$ для него является гомотетия $h_{qO}$ с коэффициентом $q = 1/k$.

Определение 11.1. Отображение $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ называется *отображением подобия*, если оно допускает разложение $f = h_{kO} \circ \varphi$, где $\varphi$ — некоторое отображение конгруэнтного перенесения, а $h_{kO}$ — гомотетия с коэффициентом $k \neq 0$. Число $|k|$ называется *коэффициентом подобия*.

Упражнение 11.1. *Покажите, что композиция двух отображений подобия есть отображение.*

Упражнение 11.2. *Покажите, что отображение, обратное отображению подобия, есть отображение подобия.*

Определение 11.2. Две геометрические фигуры $\Phi_1$ и $\Phi_2$ называются *подобными*, если существует отображение подобия $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, осуществляющее взаимно однозначное соответствие между точками этих фигур.

Теорема 11.4. *Если для треугольников $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ выполнены условия $|AB| : |\tilde{A}\tilde{B}| = |AC| : |\tilde{A}\tilde{C}|$ и $\angle BAC \cong \angle\tilde{B}\tilde{A}\tilde{C}$, то треугольник $ABC$ подобен треугольнику $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.*

Теорема 11.5. *Если какие-то два угла треугольника $ABC$ конгруэнтны соответствующим углам треугольника $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, то треугольник $ABC$ подобен треугольнику $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.*

Теорема 11.6. *Если для треугольников $ABC$ и $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ выполнены условия $|AB| : |\tilde{A}\tilde{B}| = |AC| : |\tilde{A}\tilde{C}| = |BC| : |\tilde{B}\tilde{C}|$, то треугольник $ABC$ подобен треугольнику $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.*

Упражнение 11.3. *Теоремы 11.4, 11.5 и 11.6 известны как признаки подобия треугольников. Докажите эти теоремы, основываясь на теоремах 5.1, 5.2 и 5.5 из третьей главы.*

## § 12. Умножение векторов на число.

Умножение скользящих векторов на число задается определением 8.1 из пятой главы. В евклидовой геометрии эту операцию можно распространить на множество свободных векторов.

Определение 12.1. Пусть задан геометрический вектор $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{CD}$, имеющий длину $|CD| = |k| \cdot |AB|$ назовем *произведением вектора $\overrightarrow{AB}$ на число* $k \neq 0$ и запишем $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, если он сонаправлен с $\overrightarrow{AB}$ в случае $k > 0$ и противонаправлен вектору $\overrightarrow{AB}$ при $k < 0$.

Результат умножения вектора $\overrightarrow{AB}$ на число $k$ неоднозначен, поскольку определение 12.1 не фиксирует положение вектора $\overrightarrow{CD}$ в пространстве. Однако, имеет место следующая теорема.

Теорема 12.1. *Если два вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ получены умножением вектора $\overrightarrow{AB}$ на число $k$, то они равны в смысле определения 8.2.*

Док-во. Действительно, длины отрезков $[CD]$ и $[C'D']$ равны, поскольку $|CD| = |k| \cdot |AB|$ и $|C'D'| = |k| \cdot |AB|$. Отсюда вытекает конгруэнтность отрезков $[CD] \cong [C'D']$.

При $k > 0$ мы имеем $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{C'D'}$, откуда вытекает $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{C'D'}$. При $k < 0$ из $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{C'D'}$

получаем $\overrightarrow{BA} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BA} \upuparrows \overrightarrow{C'D'}$, откуда также вытекает сонаправленность векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$. А условия $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{C'D'}$ и $[CD] \cong [C'D']$ как раз и означают равенство векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ в смысле определения 8.2. $\square$

Теорема 12.2. *Из $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ вытекает равенство векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$, полученных умножением $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ на число $k$.*

Док-во. Равенство векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ означает их сонаправленность и равенство их длин

$$\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{A'B'}, \qquad\qquad |AB| = |A'B'|. \tag{12.1}$$

Из соотношений $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C'D'} = k \cdot \overrightarrow{A'B'}$ при $k > 0$ для векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ получаем

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{AB}, &&|CD| = |k| \cdot |AB|,\\ &\overrightarrow{C'D'} \upuparrows \overrightarrow{A'B'}, &&|C'D'| = |k| \cdot |A'B'|. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Из (12.1) и (12.2) вытекает сонаправленность векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{C'D'}$, а также равенство их длин, что дает $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'}$. Случай $k < 0$ отличается от рассмотренного только тем, что вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ в (12.2) заменяются противоположными векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{B'A'}$. Теорема доказана. $\square$

Теоремы 12.1 и 12.2 показывают, что умножение на число является корректно определенной однозначной операцией на множестве свободных векторов. Вектору $\mathbf{b}$ и числу $k \in \mathbb{R}$, она сопоставляет вектор $\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{b}$. При $k = 0$ либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ произведение $k \cdot \mathbf{b}$ считают равным нулевому вектору:

$$\begin{aligned} &0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \ \text{ для любого вектора } \ \mathbf{b},\\ &k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \text{ для любого числа } \ k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорема 12.3. *Операция сложения свободных векторов и операция умножения этих векторов на число обладают следующими свойствами:*

1. *коммутативность сложения:* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
2. *ассоциативность сложения:* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
3. *свойство нулевого вектора:* $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
4. *для любого вектора* $\mathbf{a}$ *существует противоположный вектор* $\mathbf{a}'$, *такой, что* $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$;
5. *дистрибутивность умножения относительно сложения векторов:* $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$;
6. *дистрибутивность умножения относительно сложения чисел:* $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$;
7. *ассоциативность операции умножения векторов на числа:* $(k \cdot q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$;
8. *свойство числовой единицы:* $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Упражнение 12.1. *Докажите утверждения теоремы 12.3, которые еще не были доказаны ранее.*

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.


1. Бакельман И. Я., *Высшая геометрия*, Издательство «Просвещение», Москва, 1967.
2. Ефимов Н. В., *Высшая геометрия*, Изд-во «Наука», Москва, 1971.
3. Погорелов А. В., *Геометрия*, Изд-во «Просвещение», Москва, 1993.
4. Хилтон П., Уайли С., *Теория гомологий.*, Изд-во «Мир», Москва, 1966.
5. Кострикин А. И., *Введение в алгебру*, Изд-во «Наука», Москва, 1977.
6. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа, т. I, II*, Издательство «Высшая школа», Москва, 1985.
7. Александров А. Д., *Выпуклые многогранники*, Изд-во «Гостехиздат», Москва, 1950.

## КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.

**Адркс:**

Руслан Шарипов,
Математический факультет
БашГосУниверситета,
ул. Фрунзе 32,
450074 Уфа, Россия

**Домашний адрес:**

Руслан Шарипов,
ул. Рабочая, дом 5,
450003 Уфа, Россия

**Телефоон:**

+7-(347)-273-67-18 (рабочий)
+7-(917)-476-93-48 (сотовый)

**Электронная почта:**

r-sharipov@mail.ru
R_Sharipov@ic.bashedu.ru

**Интернет-сайты:**

http://www.geocities.com/r-sharipov
http://www.freetextbooks.boom.ru
http://sovlit2.narod.ru

# ПРИЛОЖЕНИЕ.

## Список публикаций автора за период с 1986-го по 2006-ой годы.

### Часть 1. Теория солитонов.


1. Шарипов Р. А., *Конечнозонные аналоги $N$-мультиплетных решений уравнения КдФ*, Успехи Мат. Наук **41** (1986), № 5, 203–204.
2. Шарипов Р. А., *Солитонные мультиплеты уравнения Кортевега-де Фриза*, Доклады АН СССР **292** (1987), № 6, 1356–1359.
3. Шарипов Р. А., *Мультиплетные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили на конечнозонном фоне*, Успехи Мат. Наук **42** (1987), № 5, 221–222.
4. Bikbaev R. F. & Sharipov R. A., *Magnetization waves in Landau-Lifshits model*, Physics Letters A **134** (1988), № 2, 105-108; see solv-int/9905008.
5. Бикбаев Р. Ф. & Шарипов Р. А., *Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \to \pm\infty$*, ТМФ **78** (1989), № 3, 345–356.
6. Шарипов Р. А., *Об интегрировании цепочек Богоявленского*, Мат. заметки **47** (1990), № 1, 157–160.
7. Черданцев И. Ю. & Шарипов Р. А., *Конечнозонные решения уравнения Булло-Додда-Жибера-Шабата*, ТМФ **82** (1990), № 1, 155–160.
8. Cherdantsev I. Yu. & Sharipov R. A., *Solitons on a finite-gap background in Bullough-Dodd-Jiber-Shabat model*, International. Journ. of Modern Physics A **5** (1990), № 5, 3021–3027; see math-ph/0112045.
9. Sharipov R. A. & Yamilov R. I., *Backlund transformations and the construction of the integrable boundary value problem for the equation $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$*, «Задачи математической физики и асимптотика их решений», Институт Математики БНЦ УрО АН СССР, Уфа, 1991, Стр. 66–77; см. solv-int/9412001.

10. Шарипов Р. А., *Минимальные торы в пятимерной сфере в* $\mathbb{C}^3$, ТМФ **87** (1991), № 1, 48–56; см. math.DG/0204253.
11. Сафин С. С. & Шарипов Р. А., *Автопреобразование Бэклунда для уравнения* $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$, ТМФ **95** (1993), № 1, 146–159.
12. Boldin A. Yu. & Safin S. S. & Sharipov R. A., *On an old paper of Tzitzeika and the inverse scattering method*, Journal of Mathematical Physics **34** (1993), № 12, 5801–5809.
13. Павлов М. В. & Свинолупов С. И. & Шарипов Р. А., *Инвариантный критерий интегрируемости для систем уравнений гидродинамического типа*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 27–48; см. Функц. Анализ и Прил. **30** (1996), № 1, 18–29; см. также solv-int/9407003.
14. Ферапонтов Е. В. & Шарипов Р. А., *О законах сохранения первого порядка для систем уравнений гидродинамического типа*, ТМФ **108** (1996), № 1, 109–128.


**Часть 2. Геометрия нормального сдвига.**


1. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **97** (1993), № 3, 386–395; см. chao-dyn/9403003.
2. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Доклады РАН **334** (1994), № 2, 165–167.
3. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *Многомерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **100** (1994), № 2, 264–269; см. patt-sol/9404001.
4. Шарипов Р. А., *Проблема метризуемости для динамических систем, допускающих нормальный сдвиг*, ТМФ **101** (1994), № 1, 85–93; см. solv-int/9404003.
5. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Успехи Мат. Наук **49** (1994), № 4, 105; см. solv-int/9404002.
6. Boldin A. Yu. & Dmitrieva V. V. & Safin S. S. & Sharipov R. A., *Dynamical systems accepting the normal shift on an arbitrary Riemannian manifold*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, Ufa, 1994, pp. 4–19; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 256–266 и hep-th/9405021.
7. Boldin A. Yu. & Bronnikov A. A. & Dmitrieva V. V. & Sharipov R. A., *Complete normality conditions for the dynamical systems on Riemannian manifolds*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 20–30; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 267–275 и astro-ph/9405049.
8. Sharipov R. A., *Higher dynamical systems accepting the normal shift*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 41–65.

9. Bronnikov A. A. & Sharipov R. A., *Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in* $\mathbb{R}^n$, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 62–69
10. Sharipov R. A., *Metrizability by means of a conformally equivalent metric for the dynamical systems*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 80–90; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 276–282.
11. Болдин А. Ю. & Шарипов Р. А., *О решении уравнений нормальности в размерности* $n \geqslant 3$, Алгебра и анализ **10** (1998), № 4, 31–61; см. также solve-int/9610006.
12. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг,* Диссертация на соискание ученой степени доктора наук[1] в России, math.DG/0002202, Electronic archive http://arXiv.org, 2000, pp. 1–219.
13. Шарипов Р. А., *Ньютоновский нормальный сдвиг в многомерной римановой геометрии*, Мат. Сборник **192** (2001), № 6, 105–144; см. также math.DG/0006125.
14. Шарипов Р. А., *Ньютоновские динамические системы, допускающие нормальное раздутие точек*, Зап. семинаров ПОМИ **280** (2001), 278–298; см. также math.DG/0008081.
15. Sharipov R. A., *On the solutions of the weak normality equations in multidimensional case*, math.DG/0012110 in Electronic archive http:// arxiv.org (2000), 1–16.
16. Sharipov R. A., *First problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **30** (2002), № 9, 541–557; see also math.DG/0101150.
17. Sharipov R. A., *Second problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, math.DG /0102141 in Electronic archive http://arXiv.org (2001), 1–21.
18. Sharipov R. A., *A note on Newtonian, Lagrangian, and Hamiltonian dynamical systems in Riemannian manifolds*, math.DG/0107212 in Electronic archive http://arXiv.org (2001), 1–21.
19. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг, и волновые уравнения*, ТМФ **131** (2002), № 2, 244–260; см. также math.DG/0108158.
20. Sharipov R. A., *Normal shift in general Lagrangian dynamics*, math.DG /0112089 in Electronic archive http://arXiv.org (2001), 1–27.


[1] Текст диссертации был готов к сентябрю 1999-го года. Однако, на настоящий момент — декабрь 2006-го года она не только не защищена, но и не принята к защите. Причины оставляю без комментариев.

21. Sharipov R. A, *Comparative analysis for a pair of dynamical systems one of which is Lagrangian*, math.DG/0204161 in Electronic archive http://arxiv.org (2002), 1–40.
22. Sharipov R. A., *On the concept of a normal shift in non-metric geometry*, math.DG/0208029 in Electronic archive http://arXiv.org (2002), 1–47.
23. Sharipov R. A., *$V$-representation for the normality equations in geometry of generalized Legendre transformation*, math.DG/0210216 in Electronic archive http://arXiv.org (2002), 1–32.
24. Sharipov R. A., *On a subset of the normality equations describing a generalized Legendre transformation*, math.DG/0212059 in Electronic archive (2002), 1–19.

**Часть 3. Фкнкции многих комплексных переменных.**

1. Sharipov R. A. & Sukhov A. B. On $CR$-mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and the separate algebraicity for holomorphic functions, Trans. of American Math. Society **348** (1996), № 2, 767–780; см. также Доклады РАН **350** (1996), № 4, 453–454.
2. Sharipov R. A. & Tsyganov E. N. On the separate algebraicity along families of algebraic curves, *Preprint of Baskir State University*, Ufa, 1996, pp. 1-7; см. также Мат. Заметки **68** (2000), № 2, 294–302.

**Часть 4. Симметрии и инварианты.**

1. Dmitrieva V. V. & Sharipov R. A., *On the point transformations for the second order differential equations*, solv-int/9703003 in Electronic archive http://arXiv.org (1997), 1–14.
2. Sharipov R. A., *On the point transformations for the equation $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,{y'}^2 + S\,{y'}^3$*, solv-int/9706003 in Electronic archive http://arxiv.org (1997), 1–35; см. также Вестник БашГУ **1(I)** (1998), 5–8.
3. Михайлов О. Н. & Шарипов Р. А., *О точечном расширении одного класса дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифф. уравнения **36** (2000), № 10, 1331–1335; см. также solv-int/9712001.
4. Sharipov R. A., *Effective procedure of point-classification for the equation $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,{y'}^2 + S\,{y'}^3$*, math.DG/9802027 in Electronic archive http://arXiv.org (1998), 1–35.
5. Дмитриева В. В. & Гладков А. В. & Шарипов Р. А., *О некоторых уравнениях, сводящихся к уравнениям диффузионного типа*, ТМФ **123** (2000), № 1, 26–37; см. также math.AP/9904080.
6. Dmitrieva V. V. & Neufeld E. G. & Sharipov R. A. & Tsaregorodtsev A. A., *On a point symmetry analysis for generalized diffusion type equations*, math.AP/9907130 in Electronic archive http://arXiv.org (1999), 1–52.

**Часть 5. Общая алгебра.**


1. Sharipov R. A, *Orthogonal matrices with rational components in composing tests for High School students*, math.GM/0006230 in Electronic archive http://arXiv.org (2000), 1–10.
2. Sharipov R. A., *On the rational extension of Heisenberg algebra*, math. RA/0009194 in Electronic archive http://arXiv.org (2000), 1–12.
3. Sharipov R. A, *An algorithm for generating orthogonal matrices with rational elements*, cs.MS/0201007 in Electronic archive http://arXiv.org (2002), 1–7.


**Часть 6. Физика твердого тела.**


1. Lyuksyutov S. F. & Sharipov R. A., *Note on kinematics, dynamics, and thermodynamics of plastic glassy media*, cond-mat/0304190 in Electronic archive http://arXiv.org (2003), 1–19.
2. Lyuksyutov S. F. & Sharipov R. A. & Sigalov G. & Paramonov P. B., *Exact analytical solution for electrostatic field produced by biased atomic force microscope tip dwelling above dielectric-conductor bilayer*, cond-mat /0408247 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–6.
3. Lyuksyutov S. F. & Sharipov R. A., *Separation of plastic deformations in polymers based on elements of general nonlinear theory*, cond-mat /0408433 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–4.
4. Comer J. & Sharipov R. A., *A note on the kinematics of dislocations in crystals*, math-ph/0410006 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–15.
5. Sharipov R. A., *Gauge or not gauge?* cond-mat/0410552 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–12.
6. Sharipov R. A., *Burgers space versus real space in the nonlinear theory of dislocations*, cond-mat/0411148 in Electronic archive http://arXiv.org (2004), 1–10.
7. Comer J. & Sharipov R. A., *On the geometry of a dislocated medium*, math-ph/0502007 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–17.
8. Sharipov R. A., *A note on the dynamics and thermodynamics of dislocated crystals*, cond-mat/0504180 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–18.
9. Lyuksyutov S. F. & Paramonov P. B. & Sharipov R. A. & Sigalov G., *Induced nanoscale deformations in polymers using atomic force microscopy*, Phys. Rev. B **70** (2004), № 174110.

**Часть 7. Тензорный анализ.**

1. Sharipov R. A., *Tensor functions of tensors and the concept of extended tensor fields*, math/0503332 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–43.
2. Sharipov R. A., *Spinor functions of spinors and the concept of extended spinor fields*, math.DG/0511350 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1–56.
3. Sharipov R. A., *Commutation relationships and curvature spin-tensors for extended spinor connections*, math.DG/0512396 in Electronic archive http://arXiv.org (2005), 1-22.

**Часть 8. Частицы и поля.**

1. Sharipov R. A., *A note on Dirac spinors in a non-flat space-time of general relativity*, math.DG/0601262 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–22.
2. Sharipov R. A., *A note on metric connections for chiral and Dirac spinors*, math.DG/0602359 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–40.
3. Sharipov R. A., *On the Dirac equation in a gravitation field and the secondary quantization*, math.DG/0603367 in Electronic archive http:// arxiv.org (2006), 1–10.
4. Sharipov R. A., *The electro-weak and color bundles for the Standard Model in a gravitation field*, math.DG/0603611 in Electronic archive http:// arxiv.org (2006), 1–8.
5. Sharipov R. A., *A note on connections of the Standard Model in a gravitation field*, math.DG/0604145 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–11.
6. Sharipov R. A., *A note on the Standard Model in a gravitation field*, math .DG/0605709 in Electronic archive http://arXiv.org (2006), 1–36.

**Часть 9. Учебники.**

1. Шарипов Р. А., *Теория представлений конечных групп*, БашНИИСтрой, Уфа, 1995; см. также math.HO/0612104.
2. Шарипов Р. А., *Курс линейной алгебры и многомерной геометрии*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также math.HO/0405323.
3. Шарипов Р. А., *Курс дифференциальной геометрии*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также math.HO/0412421.
4. Шарипов Р. А., *Классическая электродинамика и теория относительности*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также physics/0311011.
5. Шарипов Р. А., *Основания геометрии для студентов и школьников*, БашГУ, Уфа, 1998; см. также math.HO/0702029.
6. Шарипов Р. А., *Быстрое введение в тензорный анализ*, бесплатный on-line учебник, 2004; см. также math.HO/0403252.