

Eigenschaften von bestimmten Integralen

1. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ einer in $[a, b]$ integrierbaren Funktion f ist nur vom Integranden $f(x)$ und den Grenzen a, b abhängig und nicht von der Integrationsvariablen x .

Satz:

Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$$

2. Vertauscht man die Integrationsgrenzen a und b , so wechselt das Integral das Vorzeichen.

Satz:

Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

3. Das bestimmte Integral mit gleicher oberer und unterer Grenze hat den Wert Null.

Satz:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

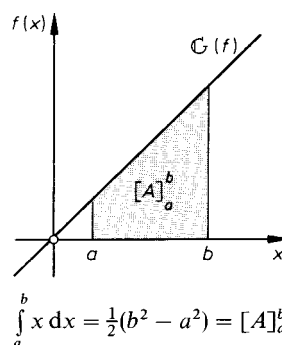
347

Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe einer Stammfunktion

Beispiel: Berechnen Sie $\int_a^b x dx$.

Lösung:

Durch einen Grenzprozeß haben wir für dieses Integral bereits einen Wert ermittelt.



356

Stammfunktionen der Funktion

$f: x \mapsto x; x \in \mathbb{R}$ haben die Gestalt

$F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c, c \in \mathbb{R}$ (vgl. Tabelle).

Die Integralfunktion $F_a: x \mapsto \int_a^x t \, dt$

ist eine spezielle Stammfunktion, also muß gelten: $F_a(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1$.

Da nun $\int_a^a t \, dt = 0$, folgt $c_1 = -\frac{1}{2}a^2$, und wir erhalten $F_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$. Setzen wir für die Variable x die obere Grenze b ein, erhalten wir das gesuchte Integral. Es ergibt sich der schon früher durch Grenzprozeß ermittelte Wert.

allgemeine Gestalt einer Stammfunktion:

$F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c$

spezielle Stammfunktion

$F_a: x \mapsto \int_a^x t \, dt$

$$\Rightarrow \int_a^x t \, dt = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$\int_a^a t \, dt = \frac{1}{2}a^2 + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow F_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$F_a(b) = \int_a^b t \, dt = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Nun sind wir in der Lage, ein bestimmtes Integral einer stetigen Funktion f ohne Grenzwertbestimmungen auszurechnen, wenn uns eine Stammfunktion F von f bekannt ist.

Satz (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

Das bestimmte Integral der stetigen Funktion $f: x \mapsto f(x)$ zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ findet man, indem man eine Stammfunktion F von f bestimmt und die Differenz $F(b) - F(a)$ bildet.

Beweis:

Wir wollen die Integralfunktion F_a von f bestimmen und nehmen an, daß uns eine Stammfunktion F von f bekannt ist. Da auch F_a Stammfunktion von f ist, unterscheiden sich F und F_a nur durch die Konstante c , die wir bestimmen müssen.

Wählen wir im Integral $\int_a^x f(t) \, dt$ für die obere Grenze $x=a$, so wird der Wert des bestimmten Integrals mit gleicher oberer und unterer Grenze gleich Null.

Da $\int_a^a f(t) \, dt = F(a) + c = 0$ erhalten wir für $c = -F(a)$ und setzen dies in die Ausgangsgleichung ein.

Da x jeden beliebigen Wert aus dem Intervall $[a, b]$ annehmen kann, gilt für $x=b$:

Mit der Integrationsvariablen x geschrieben:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Man schreibt auch oft: $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

$$F' = f$$

$$F_a(x) = F(x) + c \quad \text{bzw.}$$

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) + c$$

$$\int_a^a f(t) \, dt = 0$$

$$\int_a^a f(t) \, dt = 0 = F(a) + c$$

$$\Leftrightarrow c = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) - F(a)$$

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_2^5 \frac{4}{9} x^3 dx$.

Lösung:

Wir bestimmen eine Stammfunktion der Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{9} x^3$ und bilden die Differenz der Funktionswerte an der oberen und unteren Grenze.

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{4}{9} x^3 dx &= \left[\frac{4}{9} \frac{x^{3+1}}{3+1} \right]_2^5 = \left[\frac{1}{9} x^4 \right]_2^5 \\ &= \frac{1}{9} 5^4 - \frac{1}{9} 2^4 \\ &= \underline{\underline{67\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften von bestimmten Integralen

Gegeben seien die Funktionen $g: x \mapsto g(x)$ und $f: x \mapsto f(x)$ mit $g(x) = c \cdot f(x)$; f sei stetig im Intervall $[a, b]$, dann ist g dort auch stetig.

Es gilt: $\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$ und
 $\int_a^b c f(x) dx = c F(b) - c F(a).$

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b c f(x) dx \\ &= G(b) - G(a) \\ &= c F(b) - c F(a) \\ &= c (F(b) - F(a)) \\ &= c \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Satz:

Ein konstanter Faktor kann vor das Integral geschrieben werden, wenn f in $[a, b]$ stetig ist.

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Sind F und G Stammfunktionen von f bzw. g , so gilt nach dem Satz S. 357 für das bestimmte Integral einer Summe nebenstehende Beziehung.

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Satz:

Eine Summe $f + g$ von Funktionen darf gliedweise integriert werden, wenn die Funktionen f und g in $[a, b]$ stetig sind.

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Beispiele:

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\int_{-2}^3 (16x^3 + 6x^2) dx$

b) $\int_1^4 \frac{x^2 - 4}{x^4} dx$

Lösung:

a) Unter Berücksichtigung der beiden obigen Sätze bestimmen wir eine Stammfunktion von f und setzen für die Variable x die obere und untere Grenze ein.

b) Durch Kürzen ergibt sich ein vereinfachter Funktionsterm $f(x)$. Wir teilen in zwei Integrale auf und ermitteln für jedes der beiden Integrale einen Funktionsterm der Stammfunktion F . Für die Variable x setzen wir die obere und untere Grenze ein.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 (16x^3 + 6x^2) dx &= 16 \int_{-2}^3 x^3 dx + 6 \int_{-2}^3 x^2 dx \\ &= 16 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^3 + 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 \\ &= 16 \left(\frac{3^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \right) + 6 \left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= 260 + 70 \\ &= \underline{\underline{330}}\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}; x \neq 0$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4} \right) dx &= \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx - \int_1^4 \frac{4}{x^4} dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 - \left[\frac{-4}{3x^3} \right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{1}{4} - (-1) \right) - \left(\frac{-4}{3 \cdot 64} - \frac{-4}{3} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \left(\frac{-1}{48} + \frac{4}{3} \right) \\ &= \underline{\underline{-\frac{27}{48}}}\end{aligned}$$

Beispiel:

Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion $f: x \mapsto 4x^3 - x$, das sich ergibt, wenn man zwischen den äußeren Nullstellen der Funktion f integriert.

Lösung:

Die Nullstelle $x_1 = 0$ erkennen wir unmittelbar, weitere Nullstellen liegen bei $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$, so daß $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$ die Integrationsgrenzen sind.

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &= 4x^3 - x = x(4x^2 - 1) \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4x^3 - x) dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 4x^3 dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx \\ &= [x^4]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

Übungen

10.3

Die Stammfunktion

1. Gegeben seien die Funktionen $f: x \mapsto f(x)$. Bestimmen Sie jeweils den Funktionsterm $F(x)$ einer Stammfunktion

- | | | | |
|-------------------|---------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = x^2$ | b) $f(x) = x^{-2}$ | c) $f(x) = 2x$ | d) $f(x) = 2x^2$ |
| e) $f(x) = -8x^5$ | f) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | g) $f(x) = \frac{x}{4\sqrt{x}}$ | h) $f(x) = \frac{10}{x^4}$ |

2. Untersuchen Sie folgende Funktionen im angegebenen Intervall auf Stetigkeit. Welche der Funktionen besitzen Stammfunktionen? Geben Sie eine Stammfunktion an.

a) $f: x \mapsto 2x; x \in \mathbb{R}$ b) $f: x \mapsto \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x \leq 0 \end{cases}$ c) $f: x \mapsto \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$

d) $f: x \mapsto |x|; x \in [-3, 3]$ e) $f: x \mapsto \begin{cases} 2; & x < 0 \\ x+2; & x \geq 0 \end{cases}$ f) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2}; & x > 1 \\ x; & x \leq 1 \end{cases}$

g) $f: x \mapsto [x]; x \in \mathbb{R}$

Hinweis: $[x]$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

3. Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale, nachdem Sie eine Stammfunktion ermittelt haben.

a) $\int_1^2 \frac{x^2}{3} dx$ b) $\int_{-1}^0 x dx$ c) $\int_{-2}^4 2 dx$

d) $\int_{-6}^6 x^3 dx$ e) $\int_{-2}^2 (3x + 3) dx$ f) $\int_2^3 (6x^2 - x^3) dx$

g) $\int_{-1}^3 (3 - 4x - x^2) dx$ h) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (4x^3 - 3x^5) dx$ i) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{x^4}{4} - x^2 \right) dx$

k) $\int_{-1}^4 \frac{x^3 - x}{4} dx$ l) $\int_{-2}^{-0,5} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^3} \right) dx$ m) $\int_1^4 \frac{4 - 2x}{x^3} dx$

n) $\int_{0,5}^1 \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x^2} \right) dx$ o) $\int_1^3 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx$ p) $\int_2^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2x \right) dx$

4. Bestimmen Sie Funktionen F mit den angegebenen Eigenschaften:

a) $F': x \mapsto 2x - 2; F(2) = 10$ b) $F': x \mapsto 1 - x^2; F(2) = -\frac{8}{3}$

c) $F': x \mapsto x^3 + x^2 + 1; F(-2) = 0$ d) $F': x \mapsto 5 - x - x^2; F(-1) = 10$

5. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und berechnen Sie das bestimmte Integral zwischen den äußeren Nullstellen.

a) $f: x \mapsto 2x^2 - 4$ b) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - x$

c) $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$ d) $f: x \mapsto 0,25x^3 + 0,3^2 - 0,5x$

10.4 Berechnen von Flächeninhalten

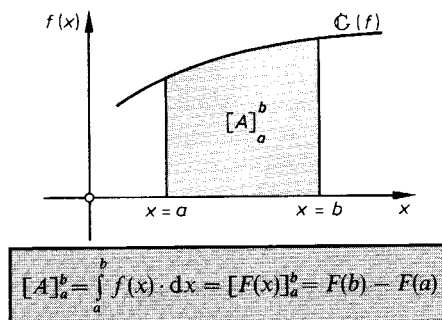
Im Abschnitt 10.1 wurde in Beispielen das bestimmte Integral als Flächeninhalt $[A]_a^b$ interpretiert und berechnet, wobei die Fläche A umschlossen wird von

1. dem Graphen der Funktion f ,
2. der x -Achse,
3. den Parallelen zur $f(x)$ -Achse durch die Stellen $x = a$ und $x = b$.

Die Berechnung erfolgte über einen Grenzwertprozeß.

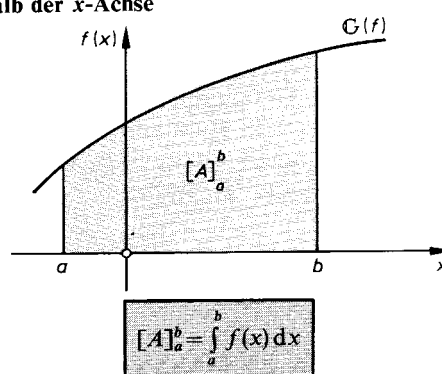
Durch Definition der Begriffe Integral- und Stammfunktion sind wir zu einem Gesetz (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) gekommen, mit denen wir das bestimmte Integral als Fläche ohne Grenzwertprozeß berechnen können.

Je nach Verlauf des bzw. der Graphen der Integrandenfunktionen müssen wir nun vier Fälle unterscheiden.



1. Fläche oberhalb der x-Achse

Ist f eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion und sind die Funktionswerte von f in $[a, b]$ positiv ($f(x) > 0$), so berechnen wir den Flächeninhalt des Flächenstückes, das vom Graphen von f , der x -Achse und den Parallelen zur $f(x)$ -Achse durch die Stellen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, nach nebenstehender Formel.

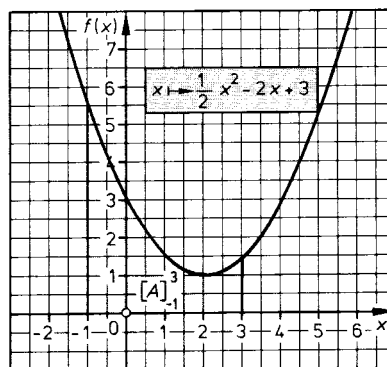


Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das vom Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, der x -Achse und den Parallelen zur $f(x)$ -Achse an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ begrenzt wird.

Lösung:

Das zu berechnende Flächenstück liegt oberhalb der x -Achse.



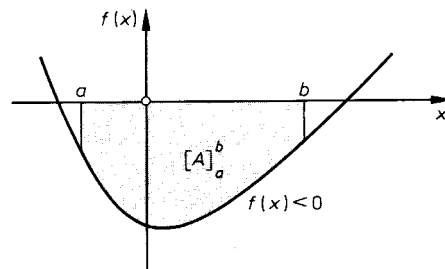
Wir erhalten den Flächeninhalt A durch Bestimmung einer Stammfunktion von f und durch Einsetzen der unteren Grenze -1 sowie der oberen Grenze 3 .

$$\text{Ergebnis: } [A]_{-1}^3 = \frac{52}{6}.$$

$$\begin{aligned} [A]_{-1}^3 &= \int_{-1}^3 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\ &= \frac{27}{6} - 9 + 9 - \left(-\frac{1}{6} - 1 - 3 \right) \\ &= \frac{27}{6} - \left(-\frac{25}{6} \right) \\ [A]_{-1}^3 &= \frac{52}{6} \end{aligned}$$

2. Fläche unterhalb der x-Achse

Sind die Funktionswerte einer in $[a, b]$ stetigen Funktion f nicht positiv, $f(x) \leq 0$, so liegt das vom Graphen von f , von der x -Achse und den Parallelen zur $f(x)$ -Achse an den Stellen $x = a$ und $x = b$ begrenzte Flächenstück unterhalb der x -Achse. Das bestimmte Integral liefert einen negativen Zahlenwert für den Flächeninhalt $[A]_a^b$. Um den Flächeninhalt $[A]_a^b$ eines solchen Flächenstückes ohne Vorzeichen angeben zu können, versehen wir das bestimmte Integral mit Betragsstrichen. (Wir können uns den Graphen $G(f)$ an der x -Achse gespiegelt denken.)



$$[A]_a^b = \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

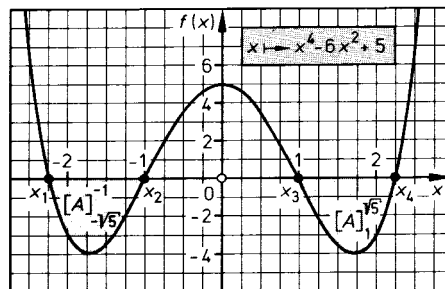
$$[A]_a^b = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Flächenstücke unterhalb der x -Achse, die von dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^4 - 6x^2 + 5$, der x -Achse und den Nullstellen des Graphen umschlossen wird.

Lösung:

Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch. Nullstellen sind $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ und $x_4 = \sqrt{5}$, die wir durch Substitution mit $x^2 = z$ finden können. Es genügt, den Zahlenwert einer der beiden unterhalb der x -Achse befindlichen Flächen zu berechnen, da beide Flächen wegen der Achsensymmetrie des Graphen gleichen Inhalt haben. Wir erhalten A durch Verdoppeln von $[A]_1^{\sqrt{5}}$. Es ist $A = 6,4$.



$$\begin{aligned} [A]_1^{\sqrt{5}} &= \left| \int_1^{\sqrt{5}} (x^4 - 6x^2 + 5) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 5x \right]_1^{\sqrt{5}} \right| \\ &= |0 - 3,2| \\ &= |-3,2| = 3,2 \\ A &= 2 \cdot [A]_1^{\sqrt{5}} = 2 \cdot 3,2 = \underline{\underline{6,4}} \end{aligned}$$

3. Fläche teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse

Beispiel:

Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto 2x - 2$ und der x-Achse in den Grenzen $x = 0$ und $x = 3$, und zwar

1. mit Hilfe der Arithmetik $A = \frac{l \cdot b}{2}$,
2. unter Verwendung der Integralrechnung.

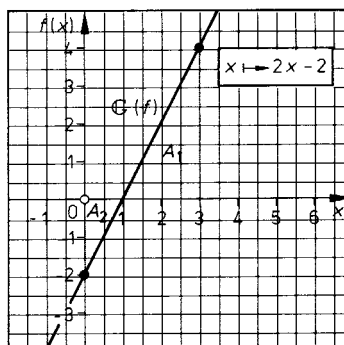
Lösung:

1. Aus der Aufzeichnung bzw. durch Bestimmung der Nullstelle und Einsetzen der Grenzen lassen sich die Seiten der beiden Dreiecke und damit ihre Flächeninhalte berechnen. Die Summe der beiden Flächeninhalte ist gleich dem Inhalt der Fläche über dem Graphen von $x = 0$ bis $x = 1$ und unter dem Graphen von $x = 1$ bis $x = 3$.
2. Integriert man einfach von 0 bis 3, so erhält man einen Wert, der nicht mit der arithmetisch ermittelten Lösung übereinstimmt.

Integriert man die Funktion $f: x \mapsto 2x - 2$ jedoch in zwei Intervallen, indem man neue Grenzen einführt, und zwar von $x = 0$ bis zur Nullstelle $x = 1$ und $x = 1$ bis $x = 3$, so erhält man zwei Inhalte von Flächen, die jeweils nur auf einer Seite der x-Achse liegen. Die Addition ergibt die Gesamtfläche $A = 5$.

Erkenntnis:

Bei der Berechnung von Flächeninhalten mit Hilfe der Integration können sich Teilflächen subtrahieren, wenn innerhalb der Grenzen eine Nullstelle liegt.



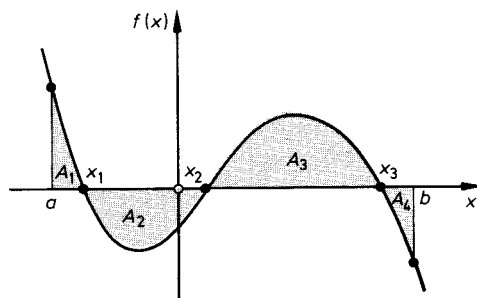
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \frac{l_1 \cdot b_1}{2} + \frac{l_2 \cdot b_2}{2} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} \end{aligned}$$

$$A = 5$$

$$\begin{aligned} &\int_0^3 (2x - 2) \cdot dx \\ &= \left[\frac{2x^2}{2} - 2x \right]_0^3 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 3 \\ &= 3 \neq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A]_0^3 &= \left| \int_0^1 (2x - 2) \cdot dx \right| + \left| \int_1^3 (2x - 2) \cdot dx \right| \\ &= |[x^2 - 2x]_0^1| + |[x^2 - 2x]_1^3| \\ &= |(-1)| + |(9 - 6) - (1 - 2)| \\ &= 1 + 4 \\ A &= [A]_0^3 = 5 \end{aligned}$$

Liegt das von $G(f)$, der x -Achse und $x = a$ und $x = b$ begrenzte Flächenstück einer im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion teilweise unterhalb und teilweise oberhalb der x -Achse, d.h. hat $G(f)$ im Intervall $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle, so sind die Teile dieser Fläche, die unter- bzw. oberhalb der x -Achse liegen, getrennt zu berechnen und dann ist zu addieren.



$$[A]_a^b = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$[A]_a^b = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_3}^b f(x) dx \right|$$

Beispiel:

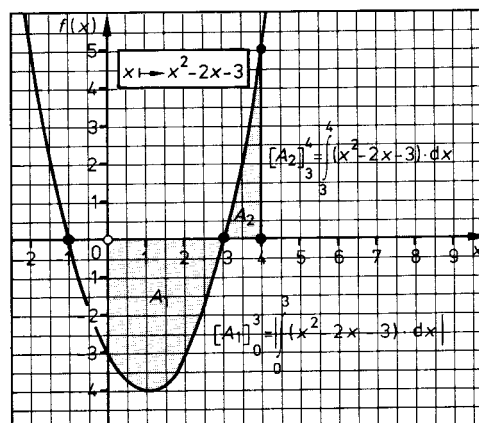
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^2 - 2x - 3$, der x -Achse und den Parallelen zur $f(x)$ -Achse an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ eingeschlossen wird.

Lösung:

Die Funktion f wird auf Nullstellen untersucht. Es ergeben sich Nullstellen bei $x_3 = -1$ und $x_4 = 3$. Die Nullstelle $x_3 = -1$ bleibt unberücksichtigt, da sie außerhalb des Integrationsintervalls liegt.

Da sich die Fläche A_1 unterhalb und die Fläche A_2 oberhalb der x -Achse befindet, müssen wir die Inhalte der Flächen A_1 und A_2 getrennt berechnen. Durch die Nullstelle bei $x_4 = 3$ sind die Teilgrenzen der beiden Integrale bestimmt, nämlich 0 und 3 sowie 3 und 4. Zu den beiden Integralen ermitteln wir eine Stammfunktion und setzen die entsprechenden Grenzen ein.

Die Summe der absoluten Zahlenwerte ergibt den Zahlenwert der Gesamtfläche. Es ist $[A]_0^4 = 11\frac{1}{3}$.



$$[A]_0^4 = [A]_0^3 + [A]_3^4$$

$$[A]_3^4 = \left| \int_0^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| + \left| \int_3^4 (x^2 - 2x - 3) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_0^3 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_3^4 \right|$$

$$= |-9| + \left| \frac{7}{3} \right|$$

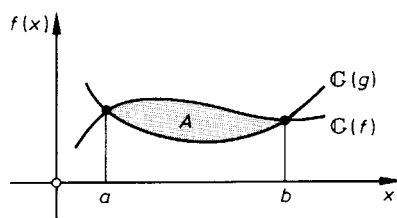
$$[A]_0^4 = 11\frac{1}{3}$$

4. Flächen zwischen den Graphen zweier Funktionen

Sind f und g zwei beliebige in einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktionen, so unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$.

Ist $f(x) \geq g(x)$ bzw. $g(x) \geq f(x)$ so wird die eingeschlossene Fläche aus der Differenz der Einzelflächen zwischen der x -Achse und den Graphen von f und g berechnet. Die Integrationsgrenzen sind in diesem Fall die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen.



$$[A]_a^b = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$[A]_a^b = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad f(x) \geq g(x)$$

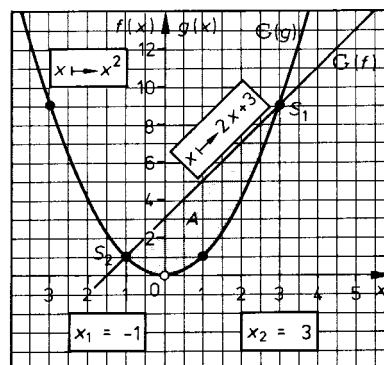
$$[A]_a^b = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \quad g(x) \geq f(x)$$

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 2x + 3$ und $g: x \mapsto x^2$ eingeschlossen wird.

Lösung:

Um die Integrationsgrenzen zu erhalten, in denen die gesuchte Fläche liegt, müssen die Schnittpunkte der Graphen bestimmt werden.



Dies geschieht durch Gleichsetzen der beiden Funktionsterme und Auflösen nach x .

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= x^2 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 3 \\ x_1 &= -1; x_2 = 3 \end{aligned}$$

Wegen $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [-1, 3]$ können wir den Flächeninhalt mit nebenstehender Formel bestimmen.

Es ist $[A]_{-1}^3 = 10\frac{2}{3}$

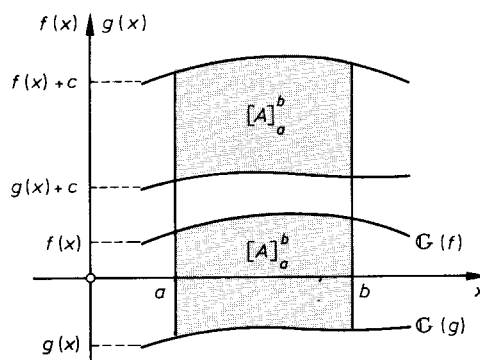
2. $f(a) \neq g(a)$ und $f(b) \neq g(b)$

Dieser Fall tritt ein, wenn entweder die Grenzen a und b so vorgegeben sind oder gewählt werden mußten, weil sich die Graphen nicht schneiden. Die Formel

$$[A]_a^b = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

bleibt gültig. Sie gilt auch, wenn die zu berechnende Fläche ganz unterhalb oder auf beiden Seiten der x -Achse liegt. Durch Übergang zu den Funktionen $f: x \mapsto f(x) + c$ und $g: x \mapsto g(x) + c$ kann die Fläche so verschoben werden, daß sie ganz oberhalb der x -Achse liegt. Der Flächeninhalt ändert sich dadurch nicht.

$$\begin{aligned} [A]_{-1}^3 &= \int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx \\ &= \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3 \\ &= 9 + 9 - 9 - (1 - 3 + \frac{1}{3}) \\ [A]_{-1}^3 &= 10\frac{2}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} [A]_a^b &= \int_a^b (f(x) + c - (g(x) + c)) dx \\ &= \int_a^b (f(x) + c - g(x) - c) dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

Beispiel:

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen den Graphen der Funktionen

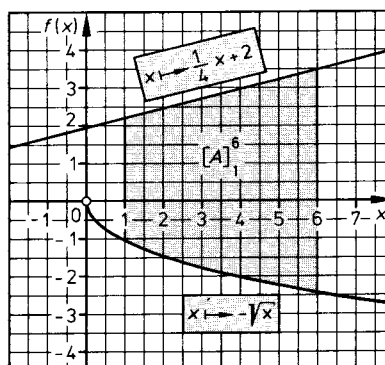
$f: x \mapsto \frac{x}{4} + 2$ und $g: x \mapsto -\sqrt{x}$ und den Grenzen $x = 1$ und $x_2 = 6$ liegt.

Lösung:

Wegen $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [1, 6]$ kommt die Formel

$$[A]_1^6 = \int_1^6 (f(x) - g(x)) dx$$

zur Anwendung, um den verlangten Flächeninhalt zu berechnen.



Dabei gilt

$$\int_1^6 \sqrt{x} \, dx = \int_1^6 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^6,$$

wie wir im nächsten Kapitel noch präzisieren werden.

Es ist $[A]_1^6 = 23,51$

$$\begin{aligned} [A]_1^6 &= \int_1^6 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_1^6 \left(\frac{x}{4} + 2 - (-\sqrt{x}) \right) \, dx \\ &= \int_1^6 \left(\frac{x}{4} + 2 \right) \, dx + \int_1^6 \sqrt{x} \, dx \\ &= \left[\frac{1}{8} x^2 + 2x \right]_1^6 + \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_1^6 \\ &= (16,50 - 2,125) + (9,80 - 0,67) \\ [A]_1^6 &= 23,51 \end{aligned}$$

Übungen

10.4

Berechnen von Flächeninhalten

- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche oberhalb der x -Achse, der vom Graphen der Funktion f , der x -Achse und den Parallelen zur $f(x)$ -Achse durch die Stellen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird:
 - $f: x \mapsto 2x^2 + 2$; $a = -2$, $b = 1$
 - $f: x \mapsto x^2 - x + 1$; $a = -1$, $b = 3$
 - $f: x \mapsto 4x^2 - 4$; $a = 1$, $b = 2$
 - $f: x \mapsto x^3 + x^2 - 4x + 4$; $a = -1$, $b = 1$
 - $f: x \mapsto x^4 - 8x^2 + 16$; $a = 0$, $b = 2$
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche unterhalb der x -Achse, der vom Graphen der Funktion f , der x -Achse und den Grenzen bei $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird.
 - $f: x \mapsto 2x - 4$; $a = -2$, $b = 2$
 - $f: x \mapsto 2x^2 - 2$; $a = -1$, $b = 1$
 - $f: x \mapsto -4 \cdot \sqrt{x}$; $a = 0,5$, $b = 5$
 - $f: x \mapsto \frac{1}{3}(1 - x^2)$; $a = 1$, $b = 4$
- Ermitteln Sie die Inhalte aller Flächen, die von den Graphen der nachstehenden Funktionen und der x -Achse eingeschlossen werden. Als Integrationsgrenzen dienen die Nullstellen der Funktionen, diese müssen berechnet oder durch Probieren ermittelt werden.
 - $f: x \mapsto 2x^3 - x$
 - $f: x \mapsto x^2 - x - 2$
 - $f: x \mapsto x^4 - 6x^2 + 2$
 - $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{5}{6}$
- Die Graphen folgender Funktionen f haben eine Nullstelle. Sie umschließen mit der x -Achse und den Geraden durch die Punkte $(a, 0)$ und $(b, 0)$ parallel zur $f(x)$ -Achse zwei Flächenstücke A_1 und A_2 . Berechnen Sie die Zahlen a und b .
 - $f: x \mapsto x - 2$; $A_1 = A_2 = 3$
 - $f: x \mapsto x^3$; $A_1 = A_2 = 20,25$
 - $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$; $A_1 = A_2 = 1,25$
 - $f: x \mapsto x^2$; $A_1 = A_2 = 6,25$

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Flächenstücke, die von den sich schneidenden Graphen der Funktionen f und g und der x -Achse eingeschlossen werden.
- a) $f: x \mapsto x - 1$; $g: x \mapsto 4 - x$ b) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto 6 - \frac{1}{2}x$
- c) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x$; $g: x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 1$ d) $f: x \mapsto 4$; $g: x \mapsto \frac{x^2}{2} - 1$
6. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen folgender Funktionen f eingeschlossen wird.
- a) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto 4$ b) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto 4 - x^2$
- c) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto x^3$ d) $f: x \mapsto x^2 + 2x - 2$; $g: x \mapsto x + 4$
- e) $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - 35x + 35$; $g: x \mapsto 2x^2 + 2x$
7. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Flächen, die von den Graphen folgender Funktionen sowie den Geraden parallel zur $f(x)$ -Achse durch die Punkte $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden.
- a) $f: x \mapsto x$; $g: x \mapsto \frac{x}{2} + 1$; $a = -1$, $b = 3$ b) $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto x + 1$; $a = 0$, $b = 3$
- c) $f: x \mapsto x^2 + 1$; $g: x \mapsto 1 - x^2$; $a = -2$, $b = 2$
- d) $f: x \mapsto x^3 - 5$; $g: x \mapsto \frac{x^2}{2}$; $a = -2$, $b = 1,71$
8. Berechnen Sie den Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion $f: x^3 - 2x^2 + 1$ und vom Graphen der Funktion der Normalen im Wendepunkt eingeschlossen wird.
9. Berechnen Sie das Volumen pro lfd. m des skizzierten Querschnitts eines unterirdischen Kanals.

