5.3.3. Die unendliche geometrische Folge und Reihe

Die Beträge der Glieder einer GF: $\langle a_n \rangle = \langle a_1 \cdot q^{n-1} \rangle$ werden für $|q| > 1$ immer größer und übersteigen bei genügend hohem Index n jede Grenze:

$$\langle a_n \rangle = \langle 1; 10; 100; 1\,000; 10000; \ldots 10^n; \ldots \rangle$$

Für $|q| < 1$ werden die Beträge der Glieder immer kleiner:

$$\langle a_n \rangle = \langle 1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10000}; \ldots \frac{1}{10^n}; \ldots \rangle$$

Im folgenden sollen nur die geometrischen Folgen und Reihen behandelt werden, für die $|q| < 1$ ist.

Betrachten wir eine fallende GF, so können wir feststellen, daß die Glieder dem Betrage nach immer kleiner werden, immer näher an Null heranrücken, ohne jedoch im Endlichen Null zu erreichen. Ein solcher Wert, dem sich die Glieder einer Folge beliebig nähern, heißt **Grenzwert.** Man schreibt, wenn a der Grenzwert einer unendlichen Folge $\langle a_n \rangle$ ist:

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*)} \langle a_n \rangle = a^{**)}$$

Die Glieder einer fallenden geometrischen Folge streben gegen den Grenzwert Null. Man nennt Folgen, die den Grenzwert Null haben, **Nullfolgen.**

Es muß nun die Frage gestellt werden, ob der Summenwert einer unendlichen geometrischen Reihe endlich sein kann.

Vom Sophisten Zenon von Elea (um 500 v. Chr.) stammt folgende Argumentation:
Achilles, als schneller Läufer bekannt, macht ein Wettrennen mit einer Schildkröte. Achilles, der zwölfmal so schnell läuft wie die Schildkröte, gibt dieser einen Vorsprung von einem Stadion***). Beide beginnen zu laufen. Wenn Achilles 1 Stadion zurückgelegt hat, hat die Schildkröte $\frac{1}{12}$ Stadion zurückgelegt. Läuft nun Achilles $\frac{1}{12}$ Stadion, ist die Schildkröte bereits $\frac{1}{144}$ Stadion weiter usw. Demnach kann Achilles die Schildkröte nie einholen, wie Zenon zu beweisen geglaubt hatte.

Nun weiß man aber, daß Achilles die Schildkröte mit Sicherheit einholt. Das bedeutet jedoch, daß der Summenwert der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144} + \ldots + \frac{1}{12^k} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$ endlich sein muß.

---

*) limes (lat.): Grenze

**) Gelesen: „Limes a_n für n gegen Unendlich gleich a".
∞ ist keine Zahl, sondern symbolisiert nur, daß die Anzahl der Glieder über alle Grenzen steigt.

***) 1 Stadion (altes gr. Längenmaß) ist eine Länge von ca. 180 m.

An noch einem anderen Beispiel können wir uns klar machen, daß unendliche geometrische Reihen einen endlichen Summenwert haben können:

Neben ein Quadrat mit der Seitenlänge l wird ein zweites gezeichnet mit der Seitenlänge $\frac{l}{2}$, daneben ein weiteres mit der Seitenlänge $\frac{l}{4}$ usw. (Abb. 5.5.).

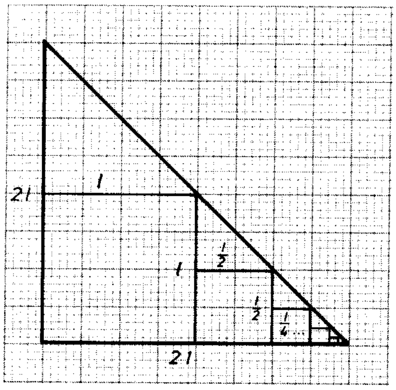

Abb. 5.5. Folge von Quadraten

Die Fläche aller so entstandenen Quadrate ist:

$$l^2+\frac{1}{4}\,l^2+\frac{1}{16}\,l^2+\frac{1}{64}\,l^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} l^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Der Summenwert ist jedoch mit Sicherheit kleiner als die Fläche des roten Dreiecks, wie aus Abb. 5.5. klar ersichtlich ist.

Es gilt: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<2\,l^2$

Ebenso: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<l^2+\frac{1}{2}\,l^2=1\frac{1}{2}\,l^2$

Ebenso: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}<l^2+\frac{1}{4}\,l^2+\frac{1}{8}\,l^2=1\frac{3}{8}\,l^2$

usw.

Aus diesen Beispielen folgt: unendliche geometrische Reihen mit $|q|<1$ haben einen endlichen Summenwert.

Es soll ermittelt werden, wie groß dieser Summenwert ist. Wir gehen aus von

$$s_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a_1-a_1\cdot q^n}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1\,q^n}{1-q}$$

Mit $a_n\,q=a_1\,q^n$ ergibt sich:

$$s_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_n\cdot q}{1-q}$$

Für $|q|<1$ gilt jedoch, wie zu Beginn dieses Kapitels gezeigt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \quad \text{(Nullfolge)}$$

Damit ergibt sich für den Summenwert die

Formel: $\displaystyle s=\sum_{n=1}^{\infty} a_1\cdot q^{n-1}=\frac{a_1}{1-q}$ für $|q|<1$

Aufgaben:

1. Wie groß ist die Fläche sämtlicher Quadrate aus Aufgabe 8. in 5.3.2.?

2. Der Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied a_1 und dem Quotienten q ist zu ermitteln:

   a) $a_1 = 5;\ q = \frac{1}{5}$ b) $a_1 = 7;\ q = \frac{14}{15}$ c) $a_1 = 2;\ q = -\frac{2}{3}$ d) $a_1 = 15;\ q = -\frac{30}{31}$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert:

   a) $0{,}\overline{1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$

   b) $1{,}\overline{03} = 1 + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \ldots = \frac{34}{33}$

   c) $0{,}\overline{74}$; d) $0{,}\overline{01}$; e) $1{,}0\overline{37}$; f) $3{,}\overline{141}$; g) $1{,}34\overline{72}$

4. Nach welcher Strecke hat Achilles die Schildkröte eingeholt? (siehe Einführungsbeispiel)

5. Die Zeiger einer Uhr stehen auf 6.00 Uhr [9.00 Uhr; 12.00 Uhr]. Nach welcher Zeit stehen die beiden Zeiger genau übereinander? Welchen Winkel hat dann der Minutenzeiger zurückgelegt?

6. Ein Auto und ein Motorrad fahren auf einer Rennstrecke gleichzeitig los. Das Motorrad hat einen Vorsprung von 200 m. Das Auto hat eine Geschwindigkeit von 216 km/h, und das Motorrad hat eine Geschwindigkeit von 180 km/h. Wie lange dauert es und welchen Weg hat das Auto zurückgelegt, wenn es das Motorrad überholt?

7. Ein Auto, das mit einer Geschwindigkeit von 108 km/h fährt, wird von einem anderen Auto mit einer Geschwindigkeit von 126 km/h überholt. Der Überholvorgang beginnt 30 m hinter und endet 30 m vor dem überholten Auto. Wie lange dauert der Überholvorgang und welche Strecke legt das überholende Auto dabei zurück?

8. Eine Stahlkugel fällt aus einer Höhe von 5 m auf eine Stahlplatte. Die Steiggeschwindigkeit nach jedem Aufprall beträgt 90% der Aufprallgeschwindigkeit.
   a) Nach welcher Zeit bleibt die Kugel liegen?
   b) Welchen Weg hat sie dann zurückgelegt?
   c) Wie lange dauert der Vorgang und welcher Weg würde zurückgelegt, wenn jeweils 10% der Energie beim Aufprall in Wärme umgewandelt wird?

5.3.3.

1. 200 F. E.

2. a) $\frac{25}{4}$ b) 105 c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{465}{61}$

3. c) $\frac{74}{99}$ d) $\frac{1}{99}$ e) $\frac{1027}{990}$ f) $\frac{1046}{333}$ g) $\frac{741}{550}$

4. $\frac{12}{11}$ Stadion

5. $\frac{360}{11}$ min; $6 \cdot \frac{360}{11}$ Grad [$\frac{540}{11}$ min; ca. 294,5°|$\frac{720}{11}$ min; ca. 393°]

6. 20s; 1200 m

7. 12s; 420 m

8. a) 19 s b) 47,63 m c) 37,97 s; 95 m

1. Schreiben Sie folgende unendliche periodische Dezimalbrüche zuerst als unendliche Reihe und dann als gemeinen Bruch.

a) $0,\overline{3}$ b) $0,\overline{05}$ c) $0,0\overline{5}$ d) $3,\overline{147}$
e) $2,15\overline{1}$ f) $0,64\overline{538}$ g) $1,4\overline{9}$

2. Wie groß ist die Abweichung vom exakten Wert, wenn man bei folgenden periodischen Dezimalzahlen nach der 8. Dezimalstelle abbricht?

a) $0,003\overline{41}$ b) $2,\overline{41}$ c) $0,\overline{9}$ d) $0,04\overline{9}$ e) $32,8\overline{875}$

3. Verwandeln Sie die folgenden periodischen Dezimalzahlen mit Hilfe von unendlichen geometrischen Reihen in Brüche:

a) $0,\overline{1}$ **b)** $0,\overline{54}$ **c)** $0,\overline{612}$ **d)** $3,\overline{141}$

Beispiel:

Verwandeln Sie die vorperiodische Dezimalzahl $0,35\overline{27}$ in eine Bruchzahl.

Lösung:

Die vorperiodische Dezimalzahl kann als Summe der Zahl $\frac{35}{100}$ und der unendlichen geometrischen Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{27}{10^{2n}}$ dargestellt werden. Wegen $|q| < 1$, hat diese Reihe die Summe $\frac{27}{9900}$.

$$0,35\overline{27} = 0,352727\ldots$$

$$0,35\overline{27} = \frac{35}{10^2} + \underbrace{\frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \cdots + \frac{27}{10^{2n}} + \cdots}_{\textit{unendliche geometrische Reihe}}$$

$$0,35\overline{27} = \frac{35}{10^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{27}{10^{2n}}$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{10^2}; \quad a_1 = \frac{27}{10^4}$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{27}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{27}{9900}$$

$$\Rightarrow 0,35\overline{27} = \frac{35}{10^2} + \frac{27}{9900} = 0,35\overline{27} = \underline{\underline{\frac{97}{275}}}$$

Wir können also $0,35\overline{27}$ als Bruchzahl $\frac{97}{275}$ darstellen.