4.7. Die trigonometrischen Funktionen

4.7.1. Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

Die **trigonometrischen Funktionen** oder Winkelfunktionen stellen die Beziehung zwischen Winkeln und Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck dar.

Zuerst sollen einige wichtige Begriffe am rechtwinkligen Dreieck erklärt werden.

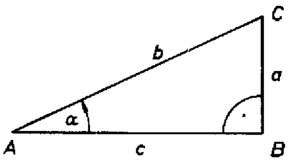


Abb. 4.72. Rechtwinkliges Dreieck

$b = \overline{AC}$ = Hypotenuse
$a = \overline{BC}$ = Gegenkathete
$c = \overline{AB}$ = Ankathete

Allgemein gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (\text{Sinus } \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (\text{Kosinus } \alpha)$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Tangens } \alpha)$$

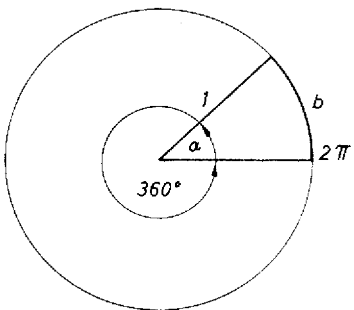
$$\cot\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \quad (\text{Kotangens } \alpha)$$

Definition:
Die Abbildung $\alpha \rightarrow \sin\alpha$ heißt Sinusfunktion, $\alpha \rightarrow \cos\alpha$ Kosinusfunktion, $\alpha \rightarrow \tan\alpha$ Tangensfunktion, $\alpha \rightarrow \cot\alpha$ Kotangensfunktion.

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{D} = \{\alpha \mid 0 \leqq \alpha \leqq 90°\}$, da der Winkel α im rechtwinkligen Dreieck nicht größer als 90° werden kann.

Der Wertebereich ist $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \leqq y \leqq 1\}_{\mathbb{R}}$.

Der Winkel wird in Gradmaß (1 Grad = 1°) oder Bogenmaß (1 Radiant = 1 rad) gemessen, die man leicht ineinander umrechnen kann. Nach den geometrischen Beziehungen am Einheitskreis gilt:



$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2\pi\,\text{rad}}$$

$$b = \frac{\alpha \cdot 2\pi\,\text{rad}}{360°}$$

$$\alpha = \frac{b \cdot 360°}{2\pi\,\text{rad}}$$

Abb. 4.73. Gradmaß und Bogenmaß

Beispiele: $90° = \frac{\pi}{2}$ rad*) $\qquad 180° = \pi$ rad

$45° = \frac{\pi}{4}$ rad $\qquad 360° = 2\pi$ rad

Die am rechtwinkligen Dreieck eingeführten Winkelfunktionen sind nur definiert für Winkel zwischen 0° und 90°. Wir wollen die Winkel zwischen 0° und 360° erfassen und definieren daher die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis.

4.7.2. Die Sinusfunktion

Definition:
Unter der Sinusfunktion $\alpha \mapsto \sin\alpha$ versteht man die Zuordnung des Winkels α zur Ordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis.

Es gilt: $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$

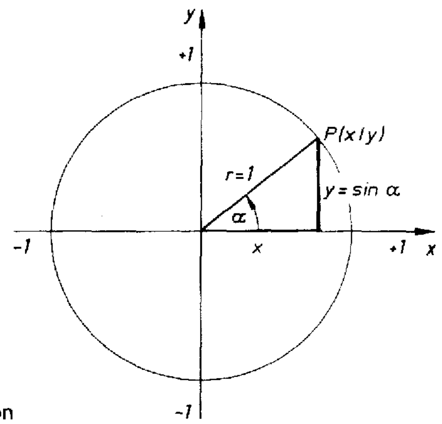


Abb. 4.74. Sinusfunktion

Wertetafel:

α in°	0	30	60	90	135	180	270	360
α in rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	0,5	0,866	1	0,707	0	−1	0

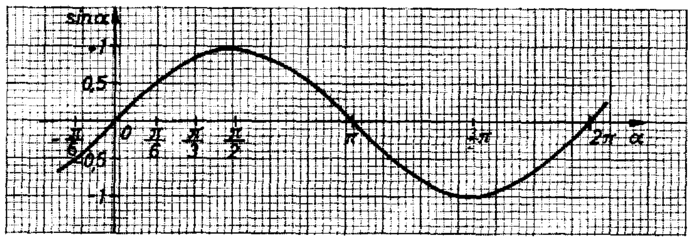


Abb. 4.75. $\alpha \mapsto \sin\alpha$

*) Die Einheit rad wird häufig auch weggelassen.

Einem Umlauf entspricht die Definitionsmenge $\mathbb{D}_1 = \{\alpha \mid 0 \leqq \alpha \leqq 2\pi\}$. Durch beliebig viele Umläufe in beiden Richtungen erweitert sich die Definitionsmenge von $\mathbb{D}_1$ auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}$:

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich: $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leqq y \leqq +1\}_{\mathbb{R}}$.

Die Sinusfunktion ist **periodisch**, nach 2π oder 360° kehren alle Werte gleichmäßig wieder.
Die größte Schwingungsweite, die **Amplitude**, beträgt 1.

4.7.3. Die Kosinusfunktion

Definition:
Unter der Kosinusfunktion $\alpha \mapsto \cos\alpha$ versteht man die Zuordnung des Winkels α zur Abszisse des Punktes P auf dem Einheitskreis.

Es gilt: $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$

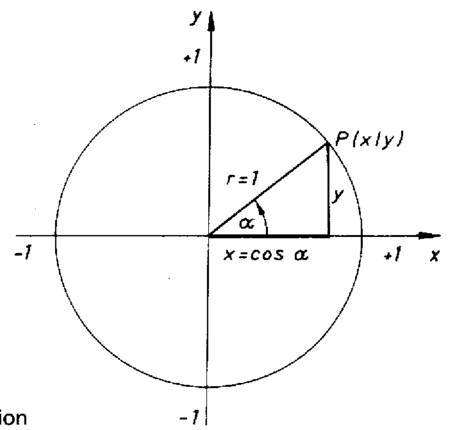


Abb. 4.76. Kosinusfunktion

Wertetafel:

α in°	0	30	60	90	135	180	270	360
α in rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos α	1	0,866	0,5	0	−0,707	−1	0	1

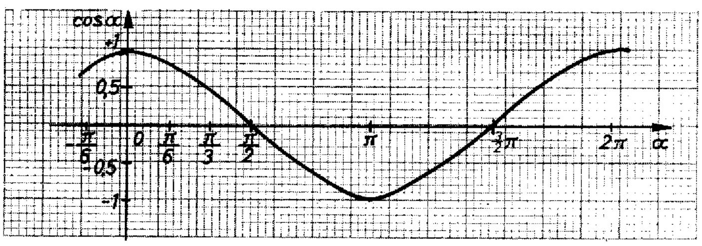


Abb. 4.77. $\alpha \mapsto \cos\alpha$

Wie bei der Sinusfunktion ergibt sich:

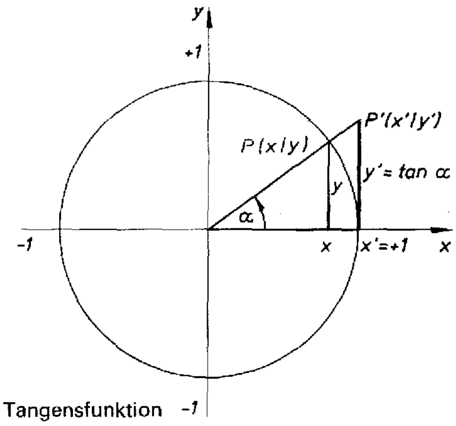
Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich: $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leqq y \leqq +1\}_{\mathbb{R}}$.

Die Kosinusfunktion ist **periodisch** nach 360° und hat die **Amplitude** 1.

4.7.4. Die Tangensfunktion

Definition:
Unter der Tangensfunktion $\alpha \mapsto \tan \alpha$ versteht man die Zuordnung des Winkels α zum Quotienten aus Ordinate und Abszisse des Punktes P auf dem Einheitskreis.

Es gilt: $\tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$



$\tan \alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{y'}{+1};$

$0° \leqq \alpha < 90° \vee 270° < \alpha \leqq 360°$

$\tan \alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{y'}{-1};$

$90° < \alpha < 270°$

Abb. 4.78. Tangensfunktion

Wertetafel:

α in °	0	30	45	60	90	135	180	270	360
α in rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\tan \alpha$	0	0,577	1	1,73	–	−1	0	–	0

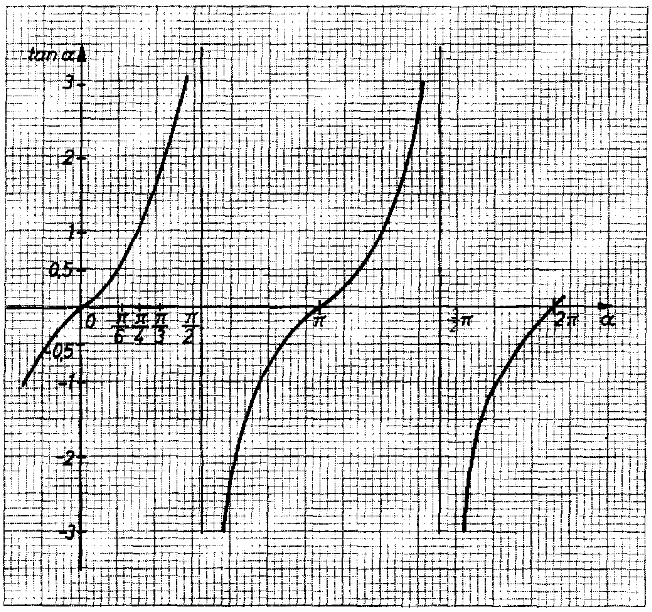


Abb. 4.79. $\alpha \mapsto \tan \alpha$

Wie bei der Sinusfunktion ergibt sich:

Definitionsmenge: $D = R \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}; \pm\frac{5\pi}{2}; \ldots\}$

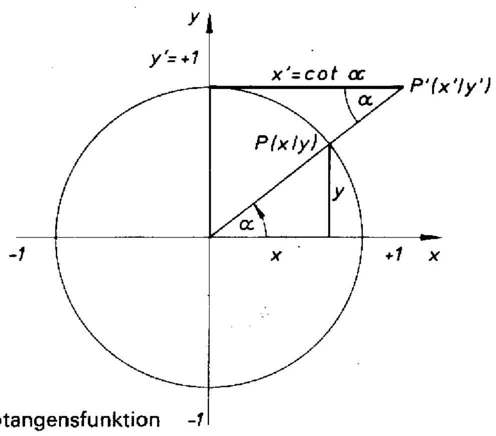
Wertebereich: $W = R$.

Die Tangensfunktion ist **periodisch**; nach π oder 180° kehren alle Werte wieder.

4.7.5. Die Kotangensfunktion

Definition:
Unter der Kotangensfunktion $\alpha \mapsto \cot\alpha$ versteht man die Zuordnung des Winkels α zum Quotienten aus Abszisse und Ordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis.

Es gilt: $\cot\alpha = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$



$\cot\alpha = \frac{x'}{y'} = \frac{x'}{+1}$; $0° < \alpha < 180°$

$\cot\alpha = \frac{x'}{y'} = \frac{x'}{-1}$; $180° < \alpha < 360°$

Abb. 4.80. Kotangensfunktion

Wertetafel:

α in°	0	30	45	60	90	135	180	270	360
α in rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cot\alpha$	–	1,73	1	0,577	0	–1	–	0	–

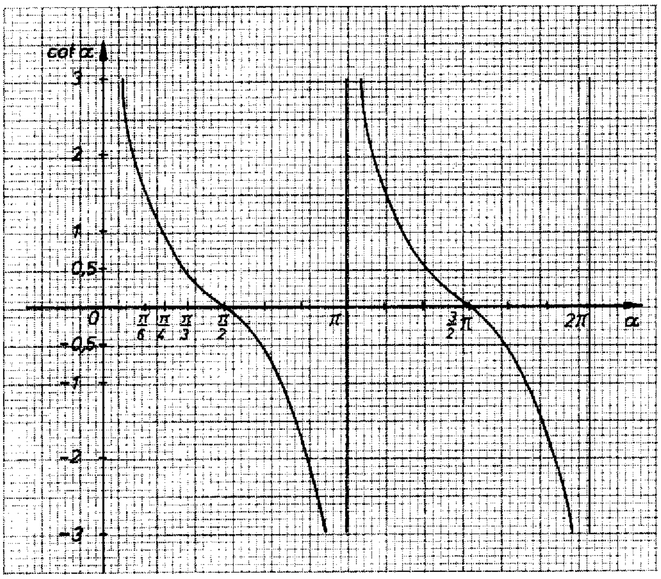


Abb. 4.81. $\alpha \mapsto \cot \alpha$

Wie bei der Sinusfunktion ergibt sich:

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm \ldots\}$
Wertebereich: $W = \mathbb{R}$.

Die Kotangensfunktion ist **periodisch** wie die Tangensfunktion.

4.7.6. Einfache trigonometrische Gesetze

Wenn man die Werte einer Winkelfunktion kennt, kann man die der anderen berechnen.

4.7.6.1. Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus

Aus den Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion (Abb. 4.73. und 4.75.) erkennt man leicht die Gültigkeit folgender Beziehungen:

1. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\quad D = \mathbb{R}$
2. $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\quad D = \mathbb{R}$
3. $\sin(-x) = -\sin x$ $\quad D = \mathbb{R}$
4. $\cos(-x) = \cos x$ $\quad D = \mathbb{R}$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

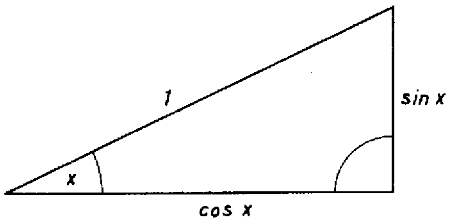


Abb. 4.82.

4.7.6.2. Beziehungen zwischen Tangens und Kotangens

Aus den Graphen der Tangens- und Kotangensfunktion (Abb. 4.79. und 4.81.) erkennt man leicht die Richtigkeit folgender Gleichungen:

1. $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\quad D = R \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\}$

2. $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\quad D = R \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$

3. $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ $\quad D = R \setminus \{0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \ldots\}$

4.7.6.3. Beziehungen zwischen Tangens, Sinus, Kosinus und Kotangens

1. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$ $\quad D = R \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\}$

2. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ $\quad D = R \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$

4.7.7. Die Additionstheoreme

Die Additionstheoreme*) gestatten es, die Funktionswerte von Winkelsummen zu berechnen. Wir legen wieder den Einheitskreis zugrunde.

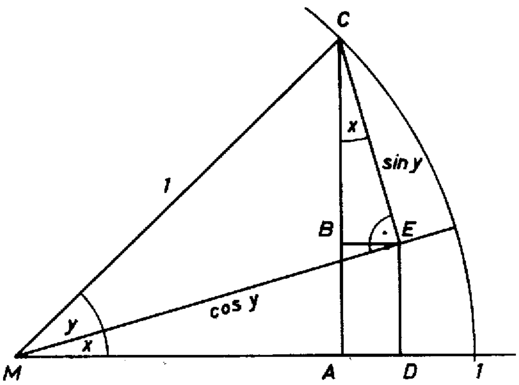


Abb. 4.83. Winkelsummen am Einheitskreis

1. Aus Abb. 4.81. folgt:

$$\sin(x+y) = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DE} + \overline{BC} \qquad \overline{AB} = \overline{DE}$$

$$\sin x = \frac{\overline{DE}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{AB}}{\cos y} \qquad \overline{AB} = \sin x \cdot \cos y$$

$$\cos x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BC}}{\sin y} \qquad \overline{BC} = \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \qquad x, y \in R$$

---

*) Formel zur Berechnung des Funktionswertes einer Summe aus den Funktionswerten der Summanden.

2. Aus Abb. 4.83. folgt:

$$\cos(x+y) = \frac{\overline{MA}}{1} = \overline{MA} = \overline{MD} - \overline{AD} = \overline{MD} - \overline{BE} \qquad \overline{AD} = \overline{BE}$$

$$\cos x = \frac{\overline{MD}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MD}}{\cos y} \qquad \overline{MD} = \cos x \cdot \cos y$$

$$\sin x = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BE}}{\sin y} \qquad \overline{BE} = \sin x \cdot \cos y = \overline{AD}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

3. Aus 1, 2 und 4.7.6.3. folgt:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \qquad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm \ldots\}$$

4. Analog zu 3:

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \qquad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi\}$$

4.7.8. Zusammengesetzte Winkelfunktionen

4.7.8.1. Phasenverschobene Kurven

Die trigonometrische Funktion $y = f(x)$ unterscheidet sich von $y = f(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$ durch eine Phasenverschiebung der Kurve $y = f(x)$ in Richtung von a.

Beispiel:

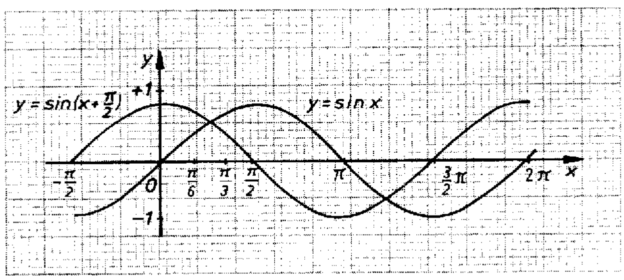


Abb. 4.84. $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \sin x$ eilt $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ um $\frac{\pi}{2}$ nach.

4.7.8.2. Amplitude

Die trigonometrische Funktion $y = f(x)$ unterscheidet sich von $y = a \cdot f(x)$, $a \in R$ durch ihre Schwingungsweite.

Beispiel:

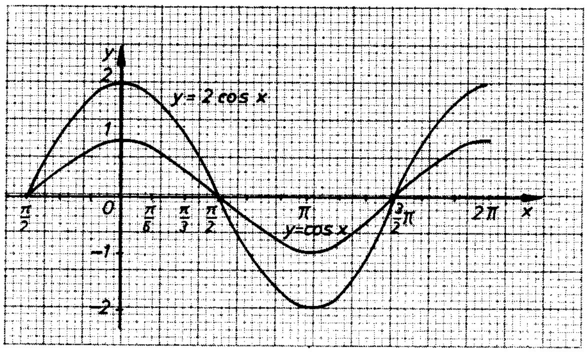


Abb. 4.85. $x \mapsto \cos x$ und $x \mapsto 2\cos x$

4.7.8.3. Die Winkelfunktion $y = f(ax)$

Die Winkelfunktion $y = f(x)$ unterscheidet sich von $y = f(ax)$ durch die Anzahl der Nullstellen.

Beispiel:

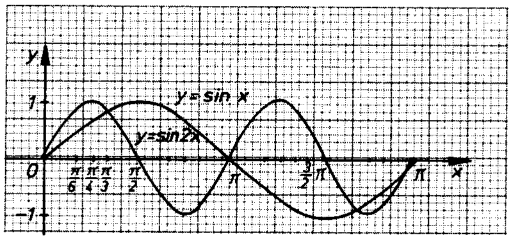


Abb. 4.86. $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \sin 2x$

4.7.8.4. Die Funktion $y = \sin^2 x$

In der Physik ist die Funktion $y = \sin^2 x$ von großer Bedeutung (Effektivwert).

Definitionsmenge: $D = R$
Wertebereich: $W = R_0^+$
Periode: π

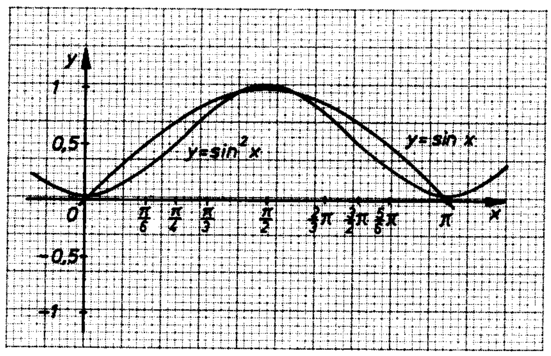


Abb. 4.87. $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \sin^2 x$

Aufgaben:

1. Zeichnen Sie die Graphen folgender Winkelfunktionen:

a) $y = \sin x$ $D = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 2\pi\}$

b) $x \mapsto \cos x$ $D = \{x \mid -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}\}$

c) $x \mapsto \tan x$ $D = \{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}\}$

d) $y = \cot x$ $D = \{x \mid 0 < x < \pi\}$

Bestimmen Sie die entsprechenden Wertebereiche.

2. Berechnen Sie am rechtwinkligen Dreieck:

a) $\sin x$ für $x = 30°, 45°, 60°$

b) $\cos x$ für $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$

c) $\tan x$ für $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

d) $\cot x$ für $x = \frac{\pi}{4}$

Wie kann man $\cos 51°$ bestimmen?

3. Drücken Sie aus:

a) $\sin x$ durch $\cos x$

b) $\tan x$ durch $\sin x$

c) $\cos x$ durch $\tan x$

d) $\cot x$ durch $\sin x$

4. Zeigen Sie mit Hilfe der Sätze 1 und 2 aus 4.7.7.:

a) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

b) $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

5. Zeigen Sie mit Hilfe der Sätze 1 und 2 aus 4.7.7.:

a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

6. Wie lauten die Additionstheoreme für

a) $\sin(x-y)$

b) $\cos(x-y)$

c) $\tan(x-y)$

d) $\cot(x-y)$

7. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen:

a) $y = \sin x$ und $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $D = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 2\pi\}$

b) $y = \cos x$ und $y = 3 \cos x$ $D = \{x \mid 0 \leqq x \leqq \pi\}$

c) $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ und $y = \sin 3x$ $D = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 2\pi\}$

d) $y = \sin^2 x$ $D = \{x \mid 0 \leqq x \leqq \pi\}$

8. Zeichnen Sie die Graphen für die folgenden harmonischen Bewegungsabläufe:

a) $s(t) = 2\,\mathrm{m} \sin[0{,}6\,\mathrm{s}^{-1}(t - 2\,\mathrm{s})]$

b) $a(t) = -0{,}5\,\mathrm{ms}^{-2} \sin[0{,}2\,\mathrm{s}^{-1}(t + 1\,\mathrm{s})]$

c) $v(t) = 3\,\mathrm{ms}^{-1} \sin[0{,}6\,\mathrm{s}^{-1}(t + 2\,\mathrm{s})]$

9. Eine Kugel, die an einer Schraubenfeder aufgehängt ist, vollführt eine sinusförmige Schwingung. Der Unterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt beträgt 20 cm, eine Schwingung dauert 0,5 s.

a) Wie groß sind Amplitude und Kreisfrequenz?

b) Stellen Sie den Weg der Kugel als Funktion der Zeit dar.

c) Zeichnen Sie den Graphen.

10. Ein Wechselstromgenerator erzeugt eine sinusförmige Spannung mit dem Effektivwert $U = 10\,\mathrm{V}$.

a) Stellen Sie den Augenblickswert u als Funktion des Drehwinkels α für eine Periode dar: $u = f(\alpha)$.

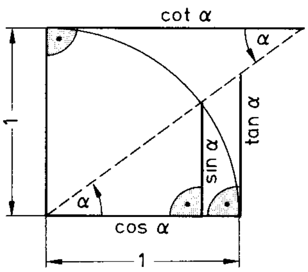
b) Graph.

c) Bilden Sie die Augenblicksspannung u als Funktion der Zeit t: $u = f(t)$, wenn die Kreisfrequenz $\omega = 50\,\mathrm{Hz}$ beträgt.

d) Graph.

Beziehungen zwischen den Funktionswerten der Winkelfunktionen

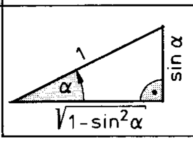
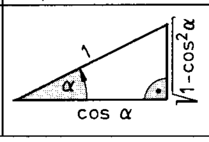
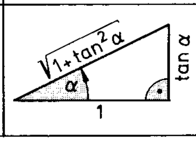
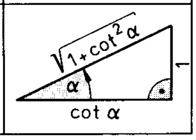
Die vier Funktionswerte der Winkelfunktionen können auch wie nebenstehend am Einheitskreis dargestellt werden. Daraus ergeben sich leicht folgende Grundformeln:



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{\text{Ggk.}}{\text{Ank.}} \cdot \frac{\text{Ank.}}{\text{Ggk.}} = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \vee \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Beziehungen zwischen den Funktionswerten der Winkelfunktionen				
Gegeben: / Gesucht:	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha =$	–	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	–	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	–
				

Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen desselben Winkels

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\tan\alpha\,\cot\alpha = 1$
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cot\alpha}$	$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$	$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Berechnung einer Funktion durch eine andere Funktion desselben Winkels

	sin	cos	tan	cot
$\sin\alpha =$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha =$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\dfrac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha =$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$	—

Bei beliebigen Winkeln α entscheidet der Quadrant des Winkels über das Vorzeichen der Wurzel.

ADDITIONSTHEOREME

Funktionen der Summe und Differenz zweier Winkel

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\cot\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Goniometrische Gleichungen und Funktionen

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen. Probe ist notwendig!

$$0 \le x \le 2\pi$$

$$5\sin x - 3\cos x = 3$$

$$\tan^2 x + 2\tan x = 0$$

$$\tan^2 x + 2\tan x = 2$$

$$\sin 2x = \sin x$$

$$17\sin^2 x - 3\cos^2 x = 2$$

$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$2\cos x + \cos 2x = 0$$

Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion:

$$f(x) = 2\sin x\cos x - \tan x$$

$$f(x) = 3\cos x + \sin 3x$$