4.4.4. Polynome und Linearfaktoren

Beim Berechnen der Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion ist eine Bestimmungsgleichung n-ten Grades zu lösen.

Zu einigen Fällen – bei $n=1$, $n=2$ und den Grundfunktionen – ist die Berechnung der Nullstellen direkt möglich.

Schwieriger wird es für die Funktionen, deren Grad $n \geq 3$ ist. Dabei kann die **Zerlegung in Linearfaktoren** oft eine Hilfe sein. Der Term auf der rechten Seite der Funktionsgleichung

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

heißt **Polynom.**

Ein Polynom n-ten Grades hat also die Form

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Wird für x eine Zahl aus der Definitionsmenge eingesetzt, so ergibt sich für das Polynom ein bestimmter Zahlenwert.

Nehmen wir den Fall, daß der Wert des Polynoms 0 ist. Das bedeutet, daß für x nur einige Werte eingesetzt werden können, und zwar die Lösungen $x_{01}, x_{02}, x_{03} \ldots x_{0n}$ der entsprechenden Bestimmungsgleichung.

Die Bestimmungsgleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ habe die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{x_{01}, x_{02}, x_{03} \ldots x_{0n}\}$$

Die Gleichung $a_n \cdot (x-x_{01}) \cdot (x-x_{02}) \cdot (x-x_{03}) \cdot \ldots \cdot (x-x_{0n}) = 0$ hat dieselbe Lösungsmenge.

Offensichtlich sind also die beiden Gleichungen identisch. Der Unterschied liegt lediglich in der Schreibweise.

Die Terme $(x-x_{01})$, $(x-x_{02})$ usw., allgemein $(x-x_{0i})$ sind Polynome 1. Grades, die **Linearfaktoren** genannt werden.

Ein Polynom n-ten Grades kann als Produkt von n Linearfaktoren geschrieben werden*).

Beispiele: 1. $p_2(x) = 2x^2 - 8x + 6$

Nullstellen: $x_{01} = 1$; $x_{02} = 3$

$$p_2(x) = 2(x-1)(x-3)$$
$$= 2x^2 - 8x + 6$$

2. $p_3(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x - 10$

Nullstellen: $x_{01} = 1$; $x_{02} = -1$; $x_{03} = -2$

$$p_3(x) = 5(x-1)(x+1)(x+2)$$
$$= 5(x-1)(x^2+3x+2)$$
$$= 5(x^3+2x^2-x-2)$$
$$= 5x^3+10x^2-5x-10$$

An diesem letzten Beispiel kann folgendes eingesehen werden: Ist x_{0i} eine Nullstelle des Polynoms $p_n(x)$, dann kann das Polynom dargestellt werden durch das Produkt des Linearfaktors $(x-x_{0i})$ mit einem Restpolynom, das um einen Grad niedriger ist als das ursprüngliche Polynom**):

$$p_3(x) = 5 \cdot (x-1) \cdot (x^2+3x+2) \qquad \text{(s. o.)}$$

Satz:

Das Polynom $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ läßt sich schreiben als Produkt eines Linearfaktors und eines Restpolynoms vom Grad $n-1$:

$$p_n(x) = a_n (x-x_{01}) \cdot p_{n-1}(x) \qquad \text{falls } p_n(x_{01}) = 0 \text{ gilt.}$$

Diese Erkenntnis läßt sich anwenden beim Lösen von Bestimmungsgleichungen. Eine Bestimmungsgleichung kann aufgefaßt werden als ein Polynom, dessen Wert 0 sein soll.

---

*) Allgemein gültig nur in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

**) Unbeschränkt ist das Abspalten eines Linearfaktors nur möglich in $\mathbb{C}$.

Ist eine Lösung bekannt, so kann ein Linearfaktor abgespalten werden. Es müssen dann nur noch die Nullstellen des Restpolynoms gesucht werden.

Beispiel: $p_3(x) = 3x^3 - 18x^2 + 33x - 18$
Nullstelle: $x_{01} = 1$ (Wertetabelle)
Linearfaktor: $(x-1)$

Das Polynom läßt sich jetzt folgendermaßen schreiben:

$p_3(x) = 3(x-1) \cdot p_2(x)$

Restpolynom:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -5x^2 + 11x \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad\qquad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{-(6x-6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$p_3(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x^2 - 5x + 6)$

Die restlichen Nullstellen lassen sich berechnen durch das Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$\mathbb{L} = \{1, 2, 3\}$

Aufgaben:

1. Spalten Sie von den folgenden Polynomen einen Linearfaktor ab und schreiben Sie als Produkt:
a) $p(x) = x^5 - 32$ b) $p(x) = x^8 - 256$ c) $p(x) = x^6 - 729$ d) $p(x) = x^4 - 625$

2. Stellen Sie folgende Polynome als Produkt von Linearfaktoren dar:
a) $p(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
b) $p(x) = 2x^2 - 2x - 4$ d) $p(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$

3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen mit den Gleichungen:
a) $y = x^3 - 13x + 12$ c) $y = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$
b) $y = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$ d) $y = -2x^5 + 10x^3 - 8x$

4. Wie heißt die Gleichung der Funktion n-ten Grades, bei welcher die n Nullstellen und ein Koeffizient gegeben sind?
a) $1; -2; 3; a_3 = 5$ e) $-5; -3; 2; a_1 = -1$
b) $1; 2; -2; a_3 = -1$ f) $1; 3; 5; a_0 = 2$
c) $2; 3; 5; a_2 = 1$ g) $1; 3; 5; 7; a_2 = 4$
d) $2; -2; 4; a_1 = 1$ h) $-2; 0; 2; 4; 8; a_3 = -7$

5. Der Graph einer Funktion 3. Grades wird von einer Geraden g an den Stellen x_1; x_2; x_3 geschnitten. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion! ($a_3 = 1$)
a) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; g: $y = 2x + 1$
b) $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; g: $y = \frac{1}{2}x - 2$
c) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; g: $y = -x + \frac{1}{3}$

3. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen (kein Näherungsverfahren!).

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

c) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

e) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$

f) $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 21x + 270 = 0$

g) $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0$

7. Bestimmen Sie alle Nullstellen folgender Funktionen, und geben Sie den Funktionsterm von f als Produkt von Linearfaktoren an; $x \in \mathbb{R}$.

a) $x \mapsto 3x^2 + 4x - 4$

b) $x \mapsto x^3 - 3x - 18$

c) $x \mapsto x^3 - 1{,}5x^2 - x$

d) $x \mapsto x^3 + 5x + 6$

e) $x \mapsto x^3 - 3x + 2$

f) $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

g) $x \mapsto x^3 - x^2 - 12x$

h) $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

i) $x \mapsto x^4 - 8x^2 + 16$ (setzen Sie $x^2 = z$)

k) $x \mapsto x^4 - 10x^2 + 9$