Der Graph der Funktion

$$y = a_2 x^2 \qquad a_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{(quadratische Funktion)}$$

heißt **Parabel.** Wird $a_2 = 1$, nennt man den Graphen Normalparabel.

Beispiele:

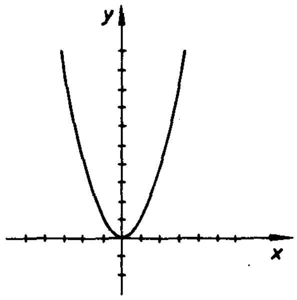

Abb. 4.27. $x \mapsto x^2$

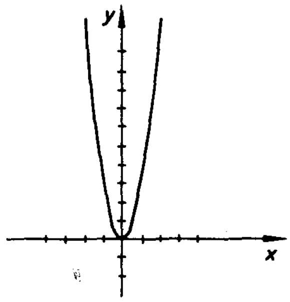

Abb. 4.28. $x \mapsto 3x^2$

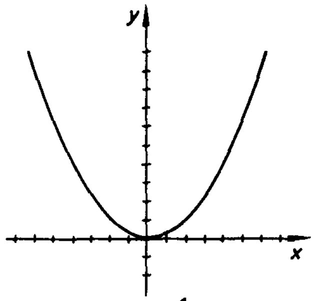

Abb. 4.29. $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$

An den Beispielen Abb. 4.27. bis Abb. 4.29. kann man erkennen, daß der Koeffizient a_2 die Öffnung der Parabel beeinflußt.

Beispiele:

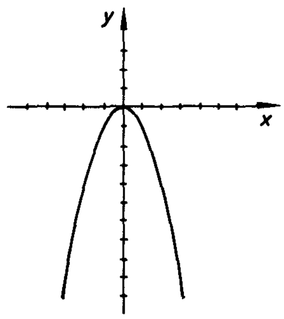

Abb. 4.30. $x \mapsto -x^2$

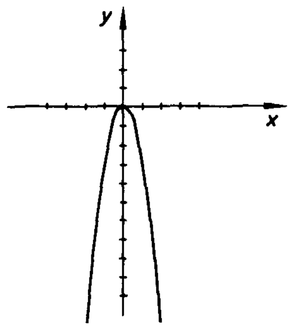

Abb. 4.31. $x \mapsto -3x^2$

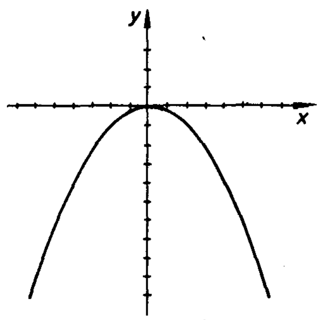

Abb. 4.32. $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2$

Nimmt man die Beispiele Abb. 4.30. bis Abb. 4.32. dazu, so kann man über Form und Lage der Parabel folgendes aussagen:

$|a_2| > 1$ Die Parabel ist gestreckt

$|a_2| < 1$ Die Parabel ist gestaucht

$a_2 > 0$ Die Parabel ist nach oben geöffnet

$a_2 < 0$ Die Parabel ist nach unten geöffnet

Die Bildmenge umfaßt nur $\mathbb{R}_0^+$ (bei $a_2 > 0$) oder $\mathbb{R}_0^-$ (bei $a_2 < 0$).

Die Funktion $y = a_2 x^2 + a_0$ ist ebenfalls durch Addition zweier Grundfunktionen entstanden. Dabei ist der Graph der Grundfunktion $y = a_2 x^2$ um a_0 in y-Richtung verschoben (Abb. 4.44. und 4.45.).

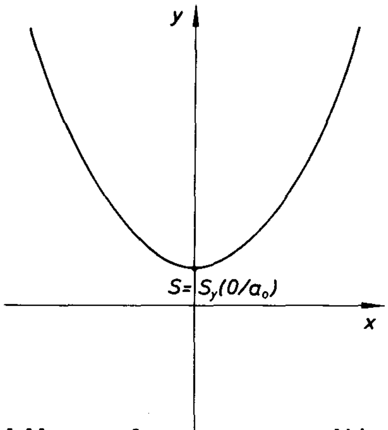

Abb. 4.44. $x \mapsto a_2 x^2 + a_0$

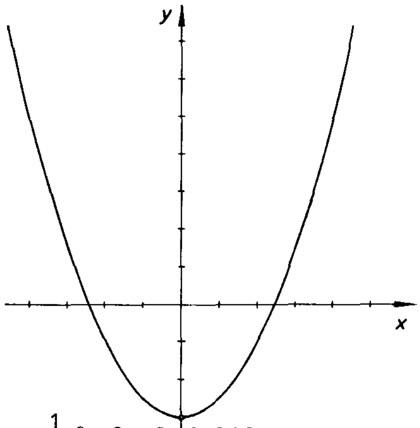

Abb. 4.45. $x \mapsto \frac{1}{2} x^2 - 3$

Der Scheitel S der Parabel liegt auf der y-Achse.

Hat die Funktionsgleichung die Form:

$$y = a \cdot z^2; \quad z = x - c$$

so wird der Scheitel S der Parabel um c in x-Richtung verschoben.

Beispiele:

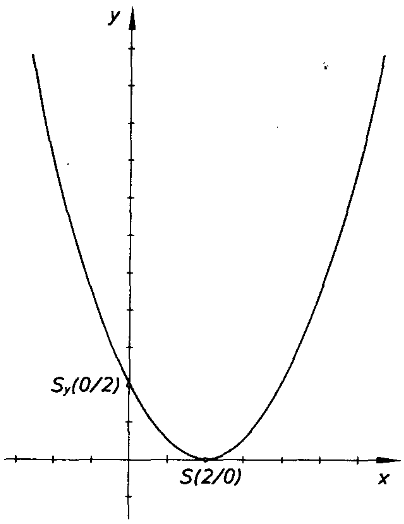

Abb. 4.46. $x \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^2$

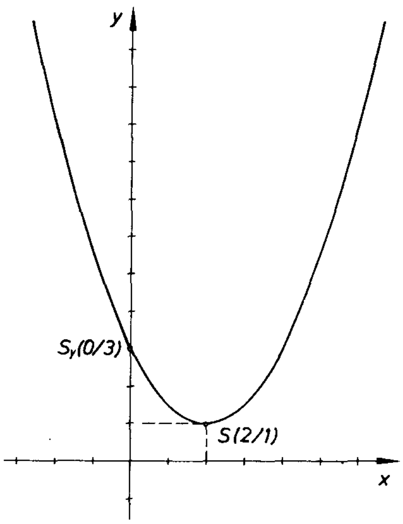

Abb. 4.47. $x \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

Abb. 4.47. zeigt den Graphen einer Funktion der Form $y = a(x-c)^2 + d$. Der Scheitel S ist dabei um c in x-Richtung und d in y-Richtung verschoben. Löst man die Klammern auf, so erhält man im 1. Beispiel die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 2$, im 2. Beispiel

2. Bestimmen Sie von folgenden Funktionen ($x \in \mathbb{R}$):

1. Schnittpunkt mit der y-Achse;
2. Diskriminante und Nullstellen;
3. Scheitelpunkt;
4. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion mit Hilfe der in 1., 2. und 3. berechneten Werte.

a) $x \longmapsto x^2 - x - 6$ **b)** $x \longmapsto 2x^2 - 32x + 28$

c) $x \longmapsto 4x^2 - 12x - 7$ **d)** $x \longmapsto 2x^2 - 4x - 6$

e) $x \longmapsto -2x^2 + 6x + 1$ **f)** $x \longmapsto 2x^2 + 8x - 10$

3. Geben Sie für die in Aufgabe 2 angegebenen Funktionen den maximalen Definitionsbereich an, für den die Funktion injektiv (bijektiv) ist, und ermitteln Sie die Umkehrfunktionen.

4. Wie lauten die quadratischen Funktionen, die folgende Nullstellen besitzen?

a) $x_1 = -3, x_2 = 3$; **b)** $x_1 = -2, x_2 = -1$; **c)** $x_1 = 0, x_2 = 2{,}5$

5. Wie lauten die Funktionen zweiten Grades, die durch folgende Punkte gehen?

a) $P_1(-1, -6)$; $P_2(0, -4)$; $P_3(2, 12)$ **b)** $P_1(1, 2)$; $P_2(-2, 8)$; $P_3(3, 6)$

c) $P_1(-3, 1)$; $P_2(0, 1)$; $P(1, -7)$ **d)** $P_1(1, 6)$; $P_2(-4, 16)$; $P_3(3, 30)$

14. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion mit der Gleichung:

a) $y = x^2 + 1$
b) $y = x^2 - 3$
c) $y = -x^2 + 2$
d) $y = 2x^2 + 2$
e) $y = (x-2)^2$
f) $y = (x+3)^2$
g) $y = -2(x-1)^2$
h) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$
i) $y = -\frac{1}{4}(x-3)^2$
k) $y = (x-1)^2 - 1$
l) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$
m) $y = -2(x+3)^2 - 2$

15. Bestimmen Sie den Scheitel der Parabel und zeichnen Sie dann die Parabel:

a) $y = x^2 - 6x + 8$ c) $y = x^2 + 2x + 3$ e) $y = 2x^2 - 8x + 9$

b) $y = x^2 - 4x + 9$ d) $y = x^2 + 6x + 4$ f) $y = -3x^2 + 12x - 9$

16. Ein Körper wird aus 40 m Höhe mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 3,5 m/s senkrecht nach unten geworfen.

a) Stellen Sie den Weg als Funktion der Zeit dar.
b) Nach welcher Zeit berührt der Körper den Boden?

17. Nach dem Hook'schen Gesetz ist die Ausdehnung s einer Schraubenfeder der Belastung F proportional.

a) Bilden Sie $F = f(s)$ und geben Sie den Definitionsbereich an.
b) Was bedeutet der Proportionalitätsfaktor?
c) Zeichnen Sie die Graphen zweier Federn mit den Federkonstanten $D_1 = 1$ N/cm und $D_2 = 3$ N/cm.

18. Ein Widerstand von 10 Ω ist gegeben.

a) Stellen Sie seine Leistung P als Funktion des Stromes I dar.
b) Geben Sie den Definitionsbereich an.
c) Zeichnen Sie den Funktionsgraph.