6. Reelle Funktionen und ihre graphische Darstellung

6.1 Rationale Funktionen

6.1.1 Lineare Funktionen

Definition:

Eine Funktion der Form

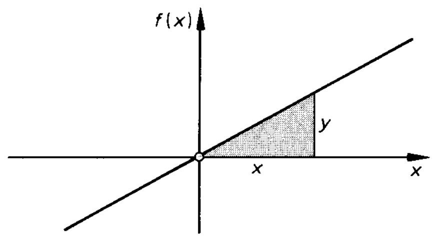
$$\boxed{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto a_1 x + a_0;\ a_1, a_0 \in \mathbb{R}}$$

heißt lineare Funktion

Eine lineare Funktion hat also die Funktionsgleichung $y = a_1 x + a_0$. Bei der Darstellung des Graphen einer linearen Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem erhalten wir eine Gerade. Im Spezialfall $a_0 = 0$ geht diese Gerade durch den Koordinatenursprung.

$f(x) = a_1 x + a_0$	$a_0 = 0$	$\Rightarrow$	$f(x) = a_1 x$

$\mathbb{G}(f)$: Nullpunktsgerade



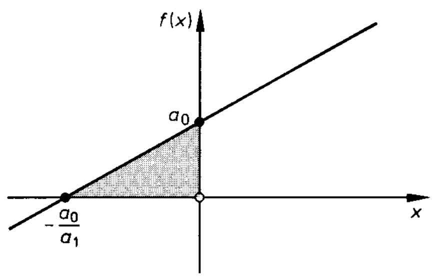
Wir wollen nun einige spezielle Werte zusammenstellen, die eine lineare Funktion bzw. ihren Graphen kennzeichnen.

1. *Schnittpunkt mit der y-Achse*

$f(x) = a_1 x + a_0$	$x = 0$	$\Rightarrow$	$f(0) = a_0$

2. *Schnittpunkt mit der x-Achse*

$f(x) = a_1 x + a_0$	$f(x) = 0$	$\Rightarrow$	$x = -\dfrac{a_0}{a_1}$



3. *Steigung*

   Für die Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zweier beliebiger Punkte des Graphen $\mathbb{G}(f)$ einer linearen Funktion gilt:

   $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a_1 \quad \textit{(Steigung)}$$

   Wir werden dies im folgenden Beispiel nachweisen.

   $a_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ heißt *Steigung*

Beispiel:

Vom Graph einer linearen Funktion sind zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ bekannt.

a) Berechnen Sie die Steigung a_1.

b) Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung:

a) Die Koordinaten beider Punkte müssen die Funktionsgleichung erfüllen.

$$y_2 = a_1 x_2 + a_0 \Leftrightarrow a_0 = y_2 - a_1 x_2$$
$$y_1 = a_1 x_1 + a_0 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 x_1$$

Wir erhalten daraus:

$$y_2 - a_1 x_2 = y_1 - a_1 x_1$$
$$y_2 - y_1 = a_1 x_2 - a_1 x_1$$
$$a_1(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

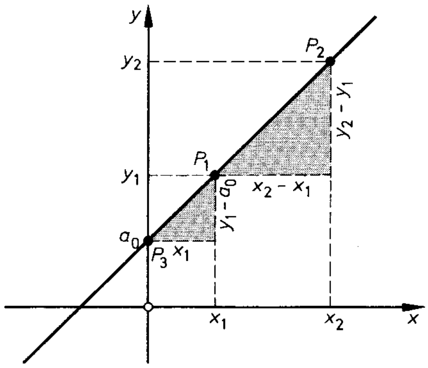
Die Steigung lautet:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

b) Von $y = a_1 x + a_0$ muß noch a_0 bestimmt werden. Wir bestimmen a_0 als Koordinate des Punktes $P_3(0, a_0)$ mit Hilfe des Punktes P_1.

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - 0} \Rightarrow \underline{\underline{a_0 = y_1 - a_1 x_1}}$$

$$\text{mit } a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Bestimmung der Funktionsgleichung einer Geraden aus zwei Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$: $y = a_1 x + a_0$,

$a_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	und	$a_0 = y_1 - a_1 x_1$

Beispiel:

Vom Graph einer linearen Funktion seien zwei Punkte bekannt: $P_1(-8, -3)$, $P_2(4, 6)$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion und bestimmen Sie:

a) die Steigung a_1,

b) den Schnittpunkt P_3 mit der y-Achse,

c) die Funktionsgleichung,

d) den Schnittpunkt P_4 mit der x-Achse.

Lösung: **a)** $a_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6 - (-3)}{4 - (-8)} = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$

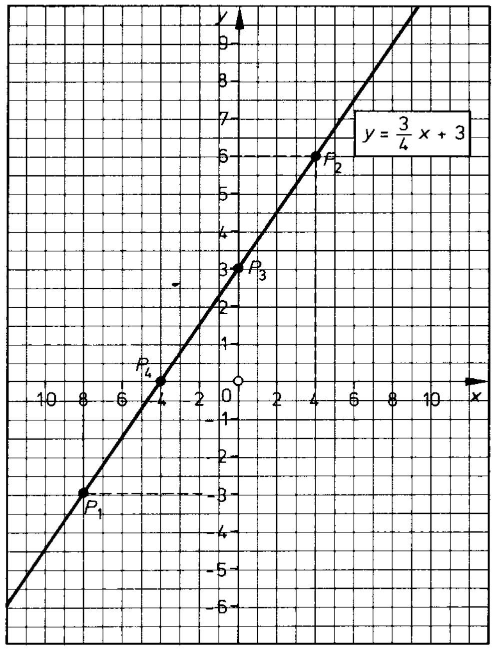
b) Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt P_3. Dieser Punkt hat die Koordinaten $x_3 = 0$ und y_3. Die Gleichung für den Steigungsfaktor a_1 – auf die beiden Punkte P_2 und P_3 angewendet – lautet:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}.$$

Setzen wir die bekannten Zahlenwerte ein, so erhalten wir:

$$\frac{3}{4} = \frac{6 - y_3}{4 - 0}; \quad y_3 = 6 - 3 = 3.$$

Es ist also $\underline{\underline{P_3(0,3)}}$.



c) Die Variable a_0 der Funktionsgleichung $y = a_1 x + a_0$ gibt an, an welcher Stelle der Graph der Funktion die y-Achse schneidet.

$y = a_1 x + a_0$

$\underline{\underline{y = \frac{3}{4}x + 3}}$ Funktionsgleichung

d) An der Stelle, an der der Graph der Funktion die x-Achse schneidet, hat die Funktion den Funktionswert $y = 0$.

$$0 = \frac{3}{4}x + 3$$

$$x = -\frac{3 \cdot 4}{3} = -4$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Koordinaten: $\underline{\underline{P_4(-4,0)}}$

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a_1 x + a_0$ ist *injektiv*, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Aus diesem Grunde ist die Funktion f umkehrbar.

Satz:

Zu jeder linearen Funktion f existiert eine Umkehrfunktion f^{-1}.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a_1 x + a_0$ $\Rightarrow f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{f(x)}{a_1} - \frac{a_0}{a_1}$
$a_1 \neq 0$

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion f: $x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 1$; $x \in [-2, 6]$.

a) Bilden Sie die Umkehrfunktion f^{-1}, und bestimmen Sie $D(f^{-1})$ und $W(f^{-1})$.

b) Zeichnen Sie die Graphen von f und f^{-1}.

Lösung:

a) Bei Umbenennung der Variablen gilt:
$D(f^{-1}) = W(f)$ und $W(f^{-1}) = D(f)$.
Die Umkehrfunktion f^{-1} erhalten wir durch Umstellen der Gleichung von f nach x und durch Umbenennen der Variablen.

$D(f) = [-2, 6]$; $\quad W(f) = [-2, 2]$

$D(f^{-1}) = [-2, 2]$; $\quad W(f^{-1}) = [-2, 6]$

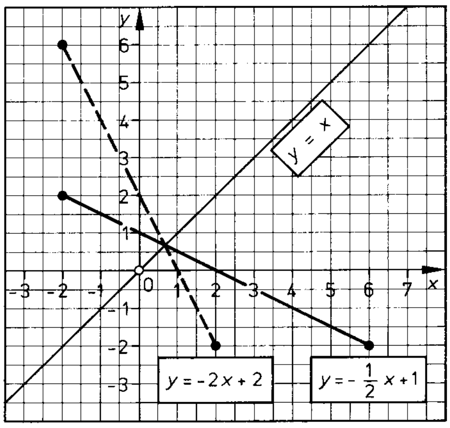
f: $y = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = -2y + 2 \Rightarrow f^{-1}$: $y = -2x + 2$

f^{-1}: $[-2, 2] \longrightarrow [-2, 6]$; $x \longmapsto -2x + 2$

b) Die Graphen von f und f^{-1} spiegeln sich an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Wertetabelle:

	x	-2	0	2	6
f	$y = -\frac{1}{2}x + 1$	2	1	0	-2
f^{-1}	$y = -2x + 2$	6	2	-2	-10



Aufgaben:

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion:

a) $y=\frac{1}{2}x-2$ c) $y=\frac{1}{2}x+3$ e) $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

b) $y=\frac{1}{2}x+1$ d) $y=2x+3$ f) $y=-\frac{2}{5}x+\frac{3}{2}$

2. Geben Sie die Steigung der Geraden und die Schnittpunkte der Geraden mit der x- und y-Achse aus Aufgabe 1. an.

3. Geben Sie die Steigung der Geraden an, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht.

a) $P_1(1/3)$; $P_2(2/5)$ d) $P_1(-4/-2)$; $P_2(-2/-6)$

b) $P_1(-1/1)$; $P_2(0/-4)$ e) $P_1(-12/-18)$; $P_2(-8/+8)$

c) $P_1(-2/-1)$; $P_2(1/1)$ f) $P_1(1/6)$; $P_2(0/0)$

4. Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden an, deren Schnittpunkte S_x und S_y mit der x- und y-Achse bekannt sind:

a) $S_x(-\frac{1}{2}/0)$; $S_y(0/1)$ d) $S_x(-\frac{1}{3}/0)$; $S_y(0/-\frac{1}{2})$

b) $S_x(-4/0)$; $S_y(0/\frac{1}{2})$ e) $S_x(-12/0)$; $S_y(0/6)$

c) $S_x(\frac{2}{5}/0)$; $S_y(0/2)$ f) $S_x(\frac{2}{3}/0)$; $S_y(0/-2)$

5. Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden an, die durch Punkte P_1 und P_2 aus Aufgabe 3. festgelegt sind.

6. Ein Motorradfahrer fährt um 9 Uhr von einem Ort ab; er hält eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 km/h. $1\frac{1}{4}$ Stunde später fährt ein zweiter Motorradfahrer mit 60 km/h vom selben Ort in der gleichen Richtung los.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen $s_1=f(t)$ und $s_2=g(t)$ auf.
b) Zeichnen Sie die Weg-Zeit-Diagramme.
c) Wo und wann treffen sich die beiden Motorradfahrer?

7. Zwei Pkw-Fahrer fahren von zwei Orten, deren Entfernung 150 km beträgt, einander entgegen. Der erste legt 60 km/h zurück, der zweite 75 km/h.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen $s_1=f(t)$ und $s_2=g(t)$ auf.
b) Zeichnen Sie die Weg-Zeit-Diagramme.
c) Wo treffen sich die beiden Wagen?

1. Bestimmen Sie die Steigung der Funktion, die Gleichungen von Funktion und Umkehrfunktion 1. Grades, wenn jeweils zwei Punkte gegeben sind. Zeichnen Sie die Graphen; $x \in \mathbb{R}$:

a) $P_1(1,3)$; $P_2(-4,-2)$ **b)** $P_1(-1,-1)$; $P_2(3,-5)$

c) $P_1(0,4)$; $P_2(3,10)$ **d)** $P_1(0{,}5;0)$; $P_2(-2,1\frac{1}{4})$

e) $P_1(4,4)$; $P_2(-4,4)$ **f)** $P_1(3,6)$; $P_2(3,0)$