8. Integralrechnung

8.1. Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

8.1.1. Der Begriff der Stammfunktion

Bei der Betrachtung der Operationen haben wir gesehen, daß es für viele Operationen eine Umkehrung gibt. So ist zum Beispiel die Umkehrung der Addition die Subtraktion, die der Multiplikation die Division. Das Potenzieren liefert als Umkehrung die Wurzelrechnung bzw. das Logarithmieren.

Gibt es auch zum Differenzieren eine solche Umkehrung?

Das läuft auf die Frage hinaus: Gibt es zu einer gegebenen Funktion eine andere Funktion, deren Ableitung gleich der gegebenen ist?

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$ mit der Definitionsmenge $D = R$. Sie ist die Ableitung der Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ mit $D = R$ da $F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$ ist. Sie ist aber auch Ableitung der Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ in $D = R$ mit $C \in R$, da die Ableitung des Summanden C immer Null wird.

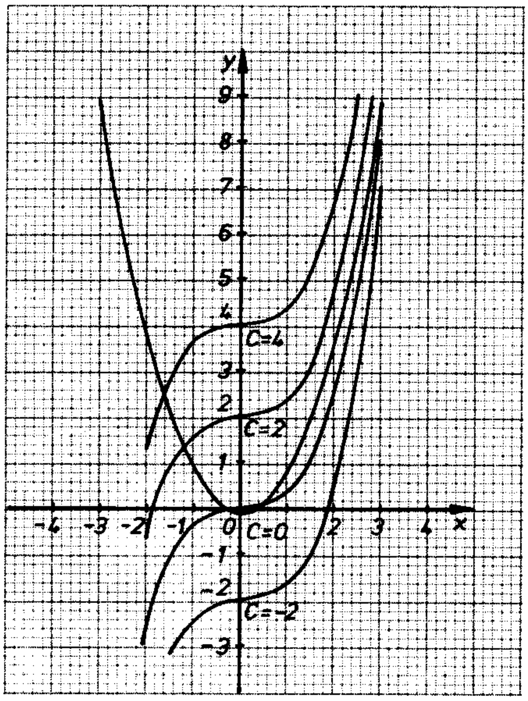

Abb. 8.1. $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

Dieser Sachverhalt führt auf den Begriff der Stammfunktion.

Definition:
Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, falls $F'(x) = f(x)$ ist mit $x \in D$ für f.

Da die Ableitung einer additiven Konstante immer Null ergibt, folgt

Satz:

Wenn $x \mapsto F(x)$ eine Stammfunktion ist, so auch $x \mapsto F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Falls eine Funktion eine Stammfunktion besitzt, so hat sie unendlich viele, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

Hat nun jede Funktion eine Stammfunktion?

Wir betrachten die Vorzeichenfunktion $y = \operatorname{sign} x$ mit $D = \mathbb{R}$ (vgl. 4.8.3.).

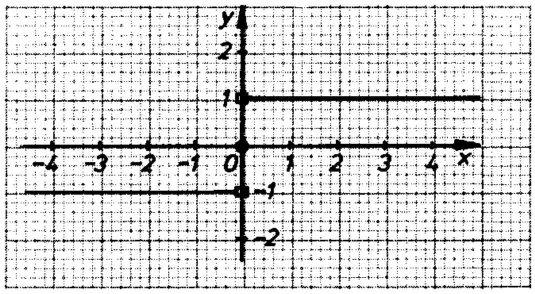

Abb. 8.2. $x \mapsto \operatorname{sign} x$

Für $x > 0$ ergibt sich $F(x) = x + C_1$, da $F'(x) = 1$.

Für $x < 0$ ergibt sich $F(x) = -x + C_2$, da $F'(x) = -1$.

Da F als Stammfunktion differenzierbar und damit stetig ist, folgt:

$F(0) = 0 + C_1 = 0 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$.

Die Stammfunktion wäre also $F(x) = |x| + C_1$.

Diese Funktion ist aber an der Stelle Null nicht differenzierbar. Das ist ein Widerspruch, da jede Stammfunktion eine Ableitung besitzt.

Die Vorzeichenfunktion hat in $D = \mathbb{R}$ keine Stammfunktion.
Es gilt also nicht, daß jede Funktion eine Stammfunktion besitzt. Man muß jeden Einzelfall untersuchen.

8.1.2. Stammfunktionen der Grundfunktionen

In Kapitel 7. über die Differentialrechnung haben wir verschiedene Ableitungen gebildet. Von hier lassen sich einige Stammfunktionen direkt übernehmen.

Funktion f	**Stammfunktion F**
1. $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$
2. $f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$
3. $f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$
4. $f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$
5. $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
6. $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
7. $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$F(x) = \ln x + C$ mit $D = \mathbb{R}^+$
8. $f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
9. $f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$

Die Ableitung der Stammfunktion F liefert in jedem Fall die gegebene Funktion f.

8.1.3. Stammfunktionen der ganzen rationalen Funktionen

In 4.4.2. haben wir die ganzen rationalen Funktionen als Summe der Potenzfunktionen $y = ax^n$ eingeführt.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_0$

In 8.1.2. haben wir als Stammfunktion von $f(x) = x^n$ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ gefunden.

Wie heißt die Stammfunktion von $f(x) = ax^n$ mit $a \in \mathbb{R}$? Dazu benötigen wir folgenden

Satz:

Ist $x \mapsto F(x)$ Stammfunktion von $x \mapsto f(x)$, so ist $x \mapsto c \cdot F(x)$ Stammfunktion von $x \mapsto c \cdot f(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt: $F'(x) = f(x)$.
Dann ist $[c \cdot F(x)]' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$.
Daraus folgt die Behauptung.

Damit gilt für die Stammfunktion von $f(x) = ax^n$: $F(x) = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$.

Die ganzen rationalen Funktionen bestehen nun aus Summen von Potenzfunktionen obiger Form. Wie findet man die Stammfunktion der Summe zweier Funktionen, wenn man die Stammfunktion der einzelnen Summanden kennt?

Satz:

Ist F_1 Stammfunktion von f_1 und F_2 Stammfunktion von f_2, so ist $F_1 + F_2$ Stammfunktion von $f_1 + f_2$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $F_1'(x) = f_1(x)$ und $F_2'(x) = f_2(x)$.
Dann gilt: $[F_1(x) + F_2(x)]' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Daraus folgt die Behauptung.

Nach den vorhergehenden Sätzen können wir dann die Stammfunktion der ganzen rationalen Funktion hinschreiben.

$$F(x) = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \ldots + \frac{a_1 x^2}{2} + a_0 x + C$$

Beispiel: Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 1x + C = x^3 + x^2 + x + C.$$

8.1.4. Die Stammfunktion als unbestimmtes Integral

Definition:

Ist $F'(x) = f(x)$, so nennt man die Funktion mit $y = F(x) + C$ ein unbestimmtes Integral von $f(x)$. Man schreibt $\int f(x)\,dx = F(x) + C$*). $C \in \mathbb{R}$ heißt Integrationskonstante, $f(x)$ heißt Integrand.

Für die Stammfunktion von $f(x) = 3x^2 + 5$ läßt sich also auch schreiben:

$\int (3x^2 + 5)\,dx = F(x) + C = x^3 + 5x + C$.

*) Das Zeichen $\int$ wurde von Leibniz eingeführt und bedeutet soviel wie Summe.

Aufgaben:

1. Suchen Sie die zugehörigen Stammfunktionen F, wenn die Funktion $y = f(x)$ mit $D = R$ gegeben ist. Bestätigen Sie die Richtigkeit durch Ableiten.
   a) $y = 4$
   b) $y = -3{,}5$
   c) $y = \pi$
   d) $y = 3x^2$
   e) $y = \frac{1}{5}x^5$
   f) $y = \sqrt{2x}$
   g) $y = 2x^2 + 7x - 1$
   h) $y = x^4 + 2x^2$
   i) $y = \frac{1}{3}x - \sqrt{3}$
   k) $y = \cos x$
   l) $y = 2 \sin x$
   m) $y = a \cos x$
   n) $y = 2 \sin x + \cos x$
   o) $y = 3e^x$
   p) $y = \frac{3}{x^2}\, x \neq 0$
2. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:
   a) $\int 1\, dx$
   b) $\int x\, dx$
   c) $\int x^4\, dx$
   d) $\int 3t\, dt$
   e) $\int at\, dt$
   f) $\int \sin\alpha\, d\alpha$
   g) $\int (3t^2 + t)\, dt$
   h) $\int (\cos\alpha + \sin\alpha)\, d\alpha$
   i) $\int \frac{2}{x} dx$

   Was gilt für die Definitionsmenge D der Stammfunktionen?
3. Zeichnen Sie die Graphen von Funktion und Stammfunktion
   a) $f(x) = x$ mit $D = R$; $C = 1, 2, 3$
   b) $f(x) = x^2$ mit $D = R^+$; $C = 0, -1, 1$
   c) $f(x) = \sin x$ mit $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$; $C = 1, 2, 3$

   Wieviel Stammfunktionen gibt es zu jeder gegebenen Funktion?

8.2. Das bestimmte Integral als Fläche

8.2.1. Fläche zwischen Kurve und x-Achse

Die Bestimmung des Flächeninhalts ist geometrisch nur lösbar bei geradlinig begrenzten Flächen: Jedes ebene Vieleck läßt sich in Dreiecke zerlegen. Bei krummliniger Begrenzung muß eine andere Methode der Flächenbestimmung gefunden werden.

Wir gehen davon aus, daß die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse bestimmt werden soll. Dabei sollen zunächst die Funktionswerte f(x) positiv sein, so daß der Graph der Funktion oberhalb der x-Achse verläuft. Als nächstes machen wir die Annahme, daß die Fläche F von einem beliebigen aber festen Anfangspunkt aus bis zu jeder beliebigen Stelle x bereits ausgemessen wurde (z. B. durch Auszählen der Kästchen bei Millimeterpapier). Damit ist es möglich, die Fläche F als Funktion von x darzustellen. In Abb. 8.3. ist der Graph der Funktion f und darunter der Graph der Flächenfunktion F dargestellt.

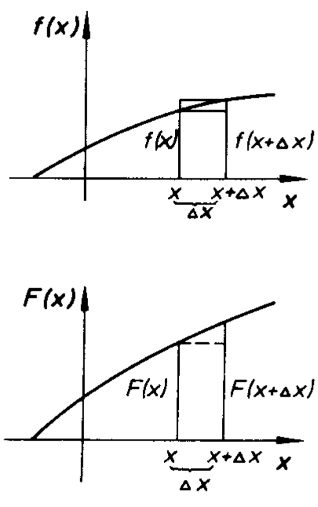

Abb. 8.3. $x \mapsto f(x)$; $x \mapsto F(x)$

Wir wollen nun die Fläche unter dem Graphen der Funktion f zwischen den Stellen x und $x+\Delta x$ betrachten. Offensichtlich ist das unterhalb der Kurve liegende Rechteck $f(x)\cdot\Delta x$ kleiner als die gesuchte Fläche und das oberhalb der Kurve liegende Rechteck $f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$ größer als die gesuchte Fläche. Am Graphen der Funktion F ist zu erkennen, daß die gesuchte Fläche die Differenz der Funktionswerte an den Stellen $x+\Delta x$ und x ist.

Die Flächenzunahme ist also $F(x+\Delta x)-F(x)$.

Damit läßt sich die Ungleichungskette schreiben:

$$f(x)\cdot\Delta x \leqq F(x+\Delta x)-F(x) \leqq f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Nach Division der Ungleichung durch den positiven Wert Δx ergibt sich:

$$f(x) \leqq \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqq f(x+\Delta x)$$

Geht Δx gegen Null, so gehen die Ungleichheitszeichen in Gleichheitszeichen über, da die äußeren Glieder der Ungleichungskette gleich werden:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$$

Damit gilt:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x) \quad \text{(vgl. 7.2.2.)}.$$

Das heißt nun aber, daß F eine Stammfunktion von f ist. Somit ist gezeigt, daß die Fläche unter einer Kurve durch eine Stammfunktion der Kurve, also durch Integration, bestimmt werden kann.

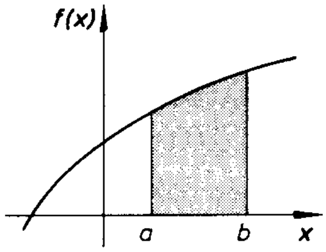

Abb. 8.4.

Bei der Berechnung der Fläche unter einer Kurve im Intervall [a, b] wird die Fläche von einem beliebigen, aber festen Anfangspunkt P_A bis zur unteren Grenze a abgezogen von der Fläche vom Anfangspunkt P_A bis zur oberen Grenze b. Die Integrationskonstante fällt bei der Differenzbildung heraus:

$$\overset{b}{\underset{a}{A}}=\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)+C\right]_a^b=F(b)+C-F(a)-C=F(b)-F(a)$$

Satz:

Das bestimmte Integral in den Grenzen a, b ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion f, der x-Achse und den Ordinaten an den Stellen a und b eingeschlossen wird:

$$\overset{b}{\underset{a}{A}}=\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Beispiel: Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2+2$ und der x-Achse in den Grenzen $a = -1$ und $b = 5$.

$$A = \int_{-1}^{5} (\frac{1}{4}x^2+2)\,dx = [\frac{1}{12}x^3+2x]_{-1}^{5}$$

$$A = [\frac{125}{12}+10]-[-\frac{1}{12}-2]$$

$$A = \frac{125}{12}+10+\frac{1}{12}+2 = \frac{45}{2}$$

$$A = 22\frac{1}{2}\text{ FE}$$

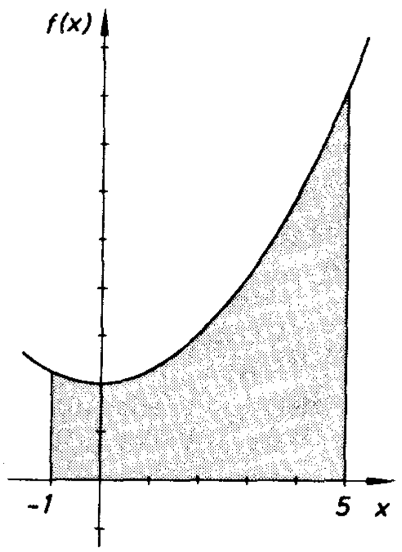

Abb. 8.5. $x \mapsto \frac{1}{4}x^2+2$

8.1.

Lösungen

1. a) $F(x) = 4x+C$
   b) $F(x) = -3{,}5x+C$
   c) $F(x) = \pi x+C$
   d) $F(x) = x^3+C$
   f) $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2+C$
   g) $F(x) = \frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-x+C$
   h) $F(x) = \frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+C$
   i) $F(x) = \frac{1}{6}x^2-\sqrt{3}\,x+C$
   l) $F(x) = -2\cos x+C$
   m) $F(x) = a\sin x+C$
   n) $F(x) = -2\cos x+\sin x+C$
   o) $F(x) = 3e^x+C$

2. a) $x+C$
   b) $\frac{x^2}{2}+C$
   c) $\frac{x^5}{5}+C$
   d) $\frac{3t^2}{2}+C$
   e) $\frac{a}{2}t^2+C$
   f) $-\cos\alpha+C$
   g) $t^3+\frac{t^2}{2}+C$
   h) $\sin\alpha-\cos\alpha+C$
   i) $2\ln x+C$