3.9. Gleichungssysteme

Sind **mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen** gegeben, so erhält man ein Gleichungssystem. Die Variablen sollen hier nur in der ersten Potenz vorkommen, man spricht dann von einem **System linearer Gleichungen**. Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}$.

- Beispiele:**
- $x + 3y = 5$
 $2x + y = 4$
  - $3x + 2y + z = 1$
 $x + y + z = 4$
 $2x - y + z = 1$
  - $ax + by = c$ a, b, c, d, e und f sind Formvariable, x und y sind Lösungsvariable.
 $dx + ey = f$

An Beispiel 1 sollen die verschiedenen Lösungsverfahren aufgezeigt werden.

3.9.1. Das Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen aufgelöst und die entsprechenden Terme gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}x + 3y &= 5 & (1) \\2x + y &= 4 & (2)\end{aligned}$$

Durch Äquivalenzumformung ergibt sich:

$$\begin{aligned}x &= 5 - 3y & (3) \\x &= \frac{4 - y}{2}\end{aligned}$$

Gleichsetzung:

$$5 - 3y = \frac{4 - y}{2}$$

Weitere Äquivalenzumformung führt zu:

$$\begin{aligned}2(5-3y) &= 4-y \\10-6y &= 4-y \\10-4 &= 6y-y \\6 &= 5y \\y &= \frac{6}{5} \quad (4)\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(y) = \left\{ \frac{6}{5} \right\}$$

Einsetzen von (4) in (3) führt zu:

$$\begin{aligned}x &= 5 - 3 \cdot \frac{6}{5} \\x &= 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(x) = \left\{ \frac{7}{5} \right\}$$

Da die Lösungselemente graphisch als Schnittpunkt zweier Geraden gedeutet werden können, schreiben wir die Lösungsmenge als Paarmenge.

$$\mathbb{L}(x|y) = \left\{ \left(\frac{7}{5} \mid \frac{6}{5} \right) \right\}$$

3.9.2. Das Einsetzungsverfahren

Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst und der entstandene Term in die andere Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}x+3y &= 5 \quad (1) \\2x+y &= 4 \quad (2)\end{aligned}$$

Gleichung (1) wird nach x aufgelöst:

$$x = 5 - 3y \quad (3)$$

Der entstandene Term $T = 5 - 3y$ wird in Gleichung (2) für x eingesetzt:

$$\begin{aligned}2(5-3y)+y &= 4 \\10-6y+y &= 4 \\10-4 &= 5y \\y &= \frac{6}{5} \quad (4)\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(y) = \left\{ \frac{6}{5} \right\}$$

Einsetzen von (4) in (3) führt zu:

$$x = 5 - 3 \cdot \frac{6}{5} = \frac{7}{5}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(x) = \left\{ \frac{7}{5} \right\}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(x|y) = \left\{ \left(\frac{7}{5} \mid \frac{6}{5} \right) \right\}$$

3.9.3. Das Additionsverfahren

Beide Seiten einer jeden Gleichung werden mit solchen Termen multipliziert, daß die Koeffizienten*) einer Variablen entgegengesetzt gleich werden. Nach Addition der so umgeformten Gleichungen bleibt dann nur noch eine Lösungsvariable übrig.

$$\begin{aligned}x+3y &= 5 & (1) \\2x+ y &= 4 & (2)\end{aligned}$$

Multiplikation von Gleichung (1) mit $T_1 = (-2)$ führt zu:

$$\begin{aligned}-2x-6y &= -10 & (3) \\2x+ y &= 4 & (2)\end{aligned}$$

Addition von Gleichung (3) und (2) ergibt:

$$\begin{aligned}-5y &= -6 \\y &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(y) = \left\{ \frac{6}{5} \right\}$$

Multiplikation von Gleichung (2) mit $T_2 = (-3)$ führt zu:

$$\begin{aligned}-6x-3y &= -12 & (5) \\x+3y &= 5 & (1)\end{aligned}$$

Addition von Gleichung (5) und (1) ergibt:

$$\begin{aligned}-5x &= -7 \\x &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(x) = \left\{ \frac{7}{5} \right\}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(x|y) = \left\{ \left(\frac{7}{5} \mid \frac{6}{5} \right) \right\}$$

In vielen Fällen ist eine mehrmalige Anwendung des Additionsverfahrens zu aufwendig.

Man rechnet dann mit dem Einsetzungsverfahren weiter.

y eingesetzt in Gleichung (1) liefert:

$$\begin{aligned}x+3 \cdot \frac{6}{5} &= 5 \\x &= 5 - \frac{18}{5} \\x &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}(x) = \left\{ \frac{7}{5} \right\}$$

---

*) Koeffizient (lat.): Faktor einer Variablen

3.9.4. Das Determinantenverfahren

Wir betrachten ein System von zwei Gleichungen mit zwei Variablen, in denen Formvariable auftreten.

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

Nach dem Einsetzverfahren erhält man:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Für den Fall, daß der Nennerterm $T = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ist, ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{(x|y)\}$.

Zur Abkürzung führt man **Determinanten** ein. Darunter versteht man ein **Zahlenschema aus Reihen und Spalten**, das folgendermaßen definiert ist:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Wie man sieht, wird das Produkt der Hauptdiagonale und das Produkt der Nebendiagonale gebildet. Der Wert der Determinante ist die Differenz der beiden Produkte.

Man kann dann für die Lösungsmenge schreiben:

$$x = \frac{D_1}{D} \quad y = \frac{D_2}{D} \quad D \neq 0$$

Es ist noch zu klären, was geschieht, wenn die Nennerdeterminante $D = 0$ wird. Ohne Beweis soll hier festgestellt werden:

1. Ist $D = 0$ und D_1 oder D_2 ungleich 0, so hat das System keine Lösung. Es liegt ein **Widerspruch** vor.

Beispiel: $x + y = 3 \quad (1)$
 $2x + 2y = 4 \quad (2)$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Lösungsmenge: $L = \emptyset$.

Gleichung (2) ist äquivalent zu $x + y = 2$; das steht im Widerspruch zu $x + y = 3$.

2. Ist $D = 0$ und D_1 oder D_2 gleich 0, so hat das System unendlich viele Lösungen. Die beiden Gleichungen sind dann **linear abhängig** voneinander.

Beispiel: $2x + y = 3$ (1)
 $4x + 2y = 6$ (2)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(x|y) | y = 3 - 2x\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

Gleichung (2) geht durch Multiplikation mit dem Term $T = 2$ aus Gleichung (1) hervor, das heißt, die beiden Gleichungen sind linear voneinander abhängig.

Lösung eines Beispiels nach dem Determinantenverfahren:

$x + 3y = 5$ (1)
 $2x + y = 4$ (2)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L}(x|y) = \left\{ \left(\frac{7}{5} \mid \frac{6}{5} \right) \right\}$.

3.10. Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen

Grundsätzlich lassen sich Gleichungssysteme mit drei und mehr Lösungsvariablen mit den aufgezeigten Methoden lösen. Der Rechenaufwand nimmt mit jeder Variablen zu. Besonders übersichtlich bleibt das Determinantenverfahren, das jedoch erweitert werden muß. Es entstehen dreireihige, vierreihige Determinanten, die **mit Hilfe des Entwicklungssatzes** auf zweireihige zurückgeführt werden müssen.

Berechnung einer dreireihigen Determinante durch Entwicklung nach zweireihigen Unterdeterminanten:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Der erste Index gibt die **Zeile**, der zweite die **Spalte** an.

Beispiel: a_{21} ist das Element der zweiten Zeile und ersten Spalte.

Die zu dem Element a_{21} gehörige Unterdeterminante A_{21} erhält man als den Rest von D , wenn die zu a_{21} gehörige Zeile und Spalte gestrichen werden.

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Entwicklung der Determinante nach einer Zeile bedeutet nun, die Unterdeterminanten der Zeile bilden, mit dem entsprechenden Element multiplizieren und die Summe dieser Terme bilden. Das Vorzeichen der Summanden wird durch die Summe der Indizes bestimmt. Ist sie gerade, so ist der Summand positiv, ist sie ungerade, so ist er negativ.

Entwickelt man D nach der zweiten Zeile, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-a_{21}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (+a_{22}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-a_{23}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Lösung eines Beispiels nach dem Determinantenverfahren

$$3x + 2y + z = 1 \quad (1)$$

$$x + y + z = 4 \quad (2)$$

$$2x - y + z = 1 \quad (3)$$

$$x = \frac{D_1}{D} \quad y = \frac{D_2}{D} \quad z = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung von D nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1(2 - (-1)) + (+1)(3 - 2) + (-1)((-3) - 4) \\ &= -3 + 1 + 7 = 5 \end{aligned}$$

Entwicklung von D_1 nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +(+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(2 - 1) + 1(1 - 4) + 1(1 - 8) \\ &= 1 - 3 - 7 = -9 \end{aligned}$$

Entwicklung von D_2 nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +(+3) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(4 - 1) - 1(1 - 2) + 1(1 - 8) \\ &= 9 + 1 - 7 = 3 \end{aligned}$$

Entwicklung von D_3 nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (+4) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(2 - (-1)) + 1(3 - 2) - 4(-3 - (+4)) \\ &= -3 + 1 + 28 = 26 \end{aligned}$$

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{9}{5} \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{5} \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{26}{5}$$

Aufgaben:

1. Suchen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme (Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$):

a) $x+y=3$ $x-y=1$	e) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=7$ $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=8$	i) $2x+4y+z=6$ $x+2y+2z=4$ $3x-8y-5z=-11$
b) $2x+3y=0$ $4x+y=1$	f) $\frac{x}{3}+2=\frac{y}{2}+\frac{5}{6}$ $\frac{y}{4}+1=3-\frac{3x}{5}$	k) $3a+b-c+d=6$ $-2a-b-3c+5d=7$ $a+b+c+2d=14$ $-a+3b+4c+d=21$
c) $3x-2y+1=0$ $4x-5y+2=0$	g) $x+y-z=2$ $x-y+z=1$ $-x+y-z=0$	l) $a-b+2c-3d=0$ $3a-2b-c+4d=-5$ $a-b+3c+5d=-7$ $3a+b+c-2d=0$
d) $4x-y+1=0$ $3x-y-1=0$	h) $3x+2y-z=1$ $2x-4z=0$ $x+2y+2z=2$	

2. Berechnen Sie den Wert folgender Determinanten:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0,5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 16 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

1. a) $y = -3x + 10$ $y = -2x + 7$	b) $x = -2y + 14$ $x = 3y - 11$	c) $y = -x + 1$ $y = 2x - 5$
2. a) $y = -2,4x + 1,8$ $y = -3,1x + 3,2$	b) $x = 3,5y + 2,5$ $x = -2,6y - 3,6$	c) $y = -3x - 2,5$ $y = x + 3,5$
▶ 3. a) $\frac{3}{4}x + y = 1$ $\frac{1}{2}x + y = 0$	b) $x + \frac{2}{3}y = -1$ $x - \frac{1}{8}y = -3\frac{1}{2}$	c) $\frac{2}{3}x + y = 1\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{5}x + y = -5$
▶ 4. a) $\frac{9}{4}x + y = 1$ $\frac{3}{4}x + y = \frac{1}{2}$	b) $x + 2y = \frac{1}{3}$ $x - 5y = -\frac{1}{2}$	c) $\frac{14}{3}x + 3y = 1\frac{1}{3}$ $-\frac{21}{1}x + 3y = -5$
5. a) $y = -7x + 19$ $3x - 4y = 17$	b) $5x - 4y = 10$ $x = -2y + 16$	c) $x = 3y + 13$ $4x + y = -13$
▶ 6. a) $1,6x + 3y = 2,6$ $1,4x + y = -2,6$	b) $1,5x + 1,7y = 1,3$ $x + 0,6y = 1,4$	c) $1,4x + 1,5y = 2,1$ $1,6x - y = 2,4$
▶ 7. a) $\frac{2}{3}x + y = 0$ $\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 6$	b) $x + \frac{1}{3}y = 4$ $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y = 5$	c) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}x - y = -\frac{1}{2}$
8. a) $x + y = 5$ $x - y = 3$	b) $7x + 3y = 5$ $2x - 3y = 13$	c) $3y - 4x = 8$ $3y + 4x = -8$
9. a) $3x + 2y = 1$ $4x + 5y = -1$	b) $5x - 2y = 0$ $7x - 3y = 1$	c) $11y - 9x = 6$ $13y - 7x = 10$
10. a) $9x - 8y = 25$ $6x + 13y = -20$	b) $7x + 12y = 27$ $11x - 8y = -65$	c) $16x + 13y = 20$ $12x - 5y = -44$
▶ 11. a) $1,2x - 0,7y = 3,2$ $0,9x + 0,4y = 6,1$	b) $1,4x - 1,5y = 5,9$ $1,6x + 2,5y = -5,9$	c) $1,8x + 2,5y = 9$ $2,4x + 3,5y = 12$

Aufgaben

1. Gegeben sind die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 = 3,5 \\ x_1 - 5x_2 = -8,5 \end{array} & \text{c)} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = -5 \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{array} & \text{e)} & \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 3 \end{array} & & \end{array}$$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = 0 \end{array} & \text{d)} & \begin{array}{l} 2x_1 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 10 \end{array} \\ \text{e)} & \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - 10x_3 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -4 \end{array} & & \end{array}$$

Aufgaben

1. Lösen Sie, wenn möglich, die folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} -3x_1 + 1,5x_2 = 4,5 \\ 6x_1 - 3x_2 = -9 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ -4x_1 + 6x_2 = 6 \end{array} & \text{c)} & \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = -3 \\ 6x_1 - 3x_2 = -9 \end{array} \end{array}$$

2. wie 1.:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -12 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 0,5x_1 + x_2 - 0,5x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -12 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 4 \\ \frac{4}{3}x_1 + \frac{7}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{array} & \text{d)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -6 \end{array} \\ \text{e)} & \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{array} & \text{f)} & \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 6 \end{array} \\ \text{g)} & \begin{array}{l} x_1 - ax_2 + 5x_3 = \frac{5}{a} \\ 5x_2 - 2ax_3 = 3 \\ 8x_1 - 7x_2 + 7ax_3 = 8a \end{array} & \text{h)} & \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7p \\ 5x_2 - px_3 = -10p \\ \frac{x_1}{p} + 4x_3 = 1 \end{array} \end{array}$$

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 12x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} & \text{d)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} & \text{e)} & \begin{array}{l} 4x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 16x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \end{array}$$

2. Wie 1.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 1,5x_1 - 3x_2 = 0 \\ -5x_1 + 10x_2 = 0 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \end{array}$$