4.5.2. Die gebrochene rationale Funktion

In 4.5.1. wurden Funktionsgleichungen betrachtet, bei denen im Zähler eine Konstante und im Nenner eine Grundfunktion stand. Nun soll im Nenner eine ganze rationale Funktion stehen.

Beispiel: $x \mapsto \frac{1}{x-1}$

Wertetabelle:

x	−5	−4	−3	−1	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	5	6
$y=\frac{1}{x-1}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

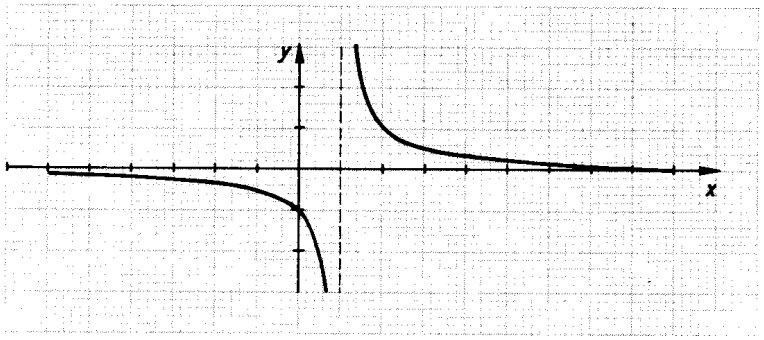

Abb. 4.59. $x \mapsto \frac{1}{x-1}$

Der Graph dieser Funktion ist gegenüber $x \mapsto \frac{1}{x}$ um eine Einheit nach rechts verschoben.

Die Funktion ist an der Stelle $x_p = 1$ nicht definiert. Die Stelle, an der **nur** der Nenner 0 wird, heißt **Pol.** Die senkrechte Gerade durch den Pol heißt **Polgerade.**

Setzen wir für die Variable x dem Betrage nach sehr große Werte ein, so wird der Wert des Bruches und damit der Funktionswert immer kleiner: Der Funktionswert strebt gegen 0, wenn |x| gegen ∞ strebt. (Näheres dazu in Kapitel 6.) Der Graph der Funktion nähert sich immer mehr der x-Achse.

Definition:
Die Gerade, der sich der Graph der Funktion nähert, wenn |x| gegen ∞ strebt, heißt **Asymptote.**

In Abb. 4.59. ist die x-Achse Asymptote.

Eine Funktionsgleichung $y = f(x)$ kann die Variable x auch im Zähler und Nenner enthalten, z. B.

$$y = \frac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6}$$

Bevor eine Wertetabelle erstellt wird, ist es zweckmäßig, Nullstellen, Pole und Asymptote zu ermitteln.

1. Nullstellen:
Der Funktionswert kann nur dann verschwinden, wenn der Zähler 0 wird. Das ist hier der Fall bei $x_{01} = 1$, $x_{02} = -2$.

Es muß geprüft werden, ob an diesen Stellen die Funktion überhaupt definiert ist, d. h., es muß geprüft werden, ob an diesen Stellen der Nenner von Null verschieden ist. In unserem Beispiel ist das der Fall, wie man leicht durch Einsetzen der beiden Werte ermitteln kann.

Satz:

Eine Funktion $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ hat eine Nullstelle an der Stelle $x = x_0$, wenn gilt: $Z(x_0) = 0 \wedge N(x_0) \neq 0$.

2. Pole:

Die Funktion $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ ist nicht definiert, wenn der Nenner 0 wird. Das ist hier der Fall bei $x_{p1} = 2$ und $x_{p2} = -3$.

Da an diesen beiden Stellen der Zähler von Null verschieden ist, handelt es sich um Pole.

Satz:

Eine Funktion $y = \frac{Z(x)}{N(x)}$ hat einen Pol an der Stelle $x = x_p$, wenn gilt: $N(x_p) = 0 \wedge Z(x_p) \neq 0$.

3. Asymptote:

Wenn der Betrag von x gegen ∞ strebt, strebt der Wert des Bruches gegen 2:

$$y = \frac{x^2 \left(2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}$$

Die Funktionsgleichung läßt sich in dieser Form schreiben. Wenn x von Null verschieden ist, kann gekürzt werden. Strebt nun $|x|$ gegen ∞, so streben alle Summanden, die die Variable x im Nenner enthalten, gegen 0. Es bleibt übrig:

$$y_A = 2.$$

Der Graph der Funktion nähert sich für immer größer werdende Werte $|x|$ der Asymptoten $y_A = 2$.

Wertetabelle:

x	-5	-4	$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3	4	5
y	$2\frac{4}{7}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{10}{11}$	$-1\frac{5}{9}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-1\frac{5}{9}$	$4\frac{10}{11}$	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{4}{7}$	$2\frac{1}{3}$

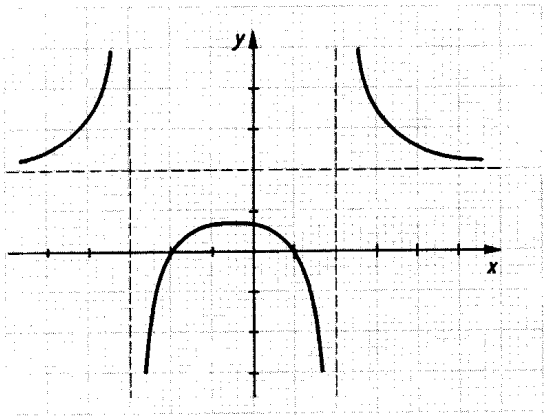

Abb. 4.60. $x \mapsto \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6}$

Definition:
Die Funktion f, die dargestellt wird als Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen, heißt **gebrochene rationale Funktion.**

Allgemeine Darstellung:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Dazu bedarf es noch einiger Erläuterungen:

1. Die Zählerfunktion Z kann auf das Glied a_0 beschränkt sein. Die Funktion f hat dann keine Nullstellen.
2. Die Nennerfunktion N muß wenigstens ein Glied mit der Variablen x aufweisen. Wird nämlich die Nennerfunktion N auf das Glied b_0 beschränkt, ist f eine ganze rationale Funktion.
3. Die Hyperbel ist ein Sonderfall der gebrochenen rationalen Funktion.
4. Ist $m > n$, so ist die x-Achse Asymptote.
   Ist $m = n$, so ist die Asymptote eine zur x-Achse parallele Gerade.
   Ist $m = n-1$, so ist die Asymptote eine gegen die x-Achse geneigte Gerade.
   Ist $m = n-c \wedge c > 1$, so ist eine Parabel c-ter Ordnung die asymptotische Kurve*).
   Ist $n > m$, spricht man von einer unecht gebrochenen rationalen Funktion. Das bedeutet, daß die Funktion dargestellt werden kann als ganze rationale Funktion mit einer gebrochenen rationalen Restfunktion.

Beispiel:
Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x - 2}$$

Durch Division erhält man

$$(x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x - 2) = x^2 - x - 3 - \frac{3}{x-2}$$

$$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$$
$$-x^2 - x$$
$$\underline{-(-x^2 + 2x)}$$
$$-3x + 3$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$
$$-3$$

$$f(x) = x^2 - x - 3 - \frac{3}{x-2}$$

Für dem Betrage nach immer größer werdende Werte x wird der Restbruch immer kleiner. Der Graph der Funktion nähert sich dabei immer mehr der Parabel $y_A = x^2 - x - 3$.

Die asymptotische Kurve hat die Funktionsgleichung:

$y_A = x^2 - x - 3.$
Nullstellen: $x_{01} = 3, \quad x_{02} = 1, \quad x_{03} = -1$
Pol: $x_p = 2$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

*) Da der Ausdruck Asymptote allgemein für den Fall der Gerade benutzt wird, führen wir hier den Ausdruck asymptotische Kurve ein.

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	3	4	5
y	$17\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{5}$	$3\frac{3}{4}$	0	$-1\frac{1}{2}$	0	$3\frac{3}{4}$	$10\frac{5}{16}$	$-12\frac{3}{16}$	$-5\frac{1}{4}$	0	$7\frac{1}{2}$	16

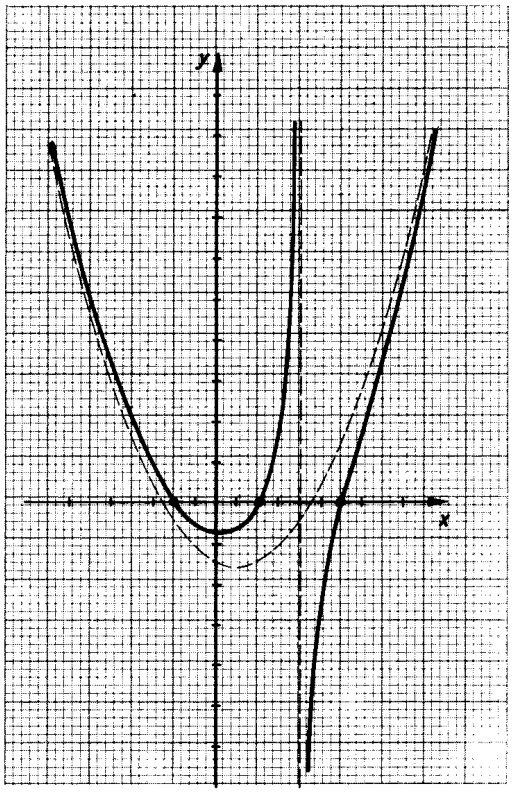

Abb. 4.61. $x \mapsto \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x-2}$

Eine weitere Besonderheit, die bei gebrochenen rationalen Funktionen vorkommen kann, soll an folgender Funktion erläutert werden.

Gegeben sei die Funktionsgleichung

$$y = \frac{x^3-x^2-x-2}{x^2-4}.$$

Der Nenner verschwindet an den Stellen $x_{p1} = 2$, $x_{p2} = -2$. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Bei der Überprüfung, ob es sich um Pole handelt, ergibt sich, daß der Zähler an der Stelle $x_{p1} = 2$ ebenfalls verschwindet. Laut Definition handelt es sich hier also nicht um einen Pol. Da $x_{p1} = 2$ sowohl eine Lösung des Nennerpolynoms als auch eine Lösung des Zählerpolynoms ist, kann im Zähler und im Nenner der Linearfaktor $(x-2)$ abgespalten werden (vgl. 4.4.4.).

Die Funktionsgleichung läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$y = f(x) = \frac{(x-2)\ (x^2+x+1)}{(x-2)\ (x+2)}.$$

Werden für x Werte eingesetzt, die von 2 verschieden sind, kann gekürzt werden:

$$y^* = \frac{x^2+x+1}{x+2}.$$

Diese Funktion $x \mapsto y^*$ unterscheidet sich von der Ausgangsfunktion $x \mapsto f(x)$ nur darin, daß jetzt die Funktion an der Stelle $x_{p1} = 2$ definiert ist. Wir dürfen jedoch diese Stelle nicht zum Definitionsbereich der Ausgangsfunktion rechnen, wir dürfen lediglich nahe genug an diese Stelle herangehen und können dann die Funktion an der Stelle $x = 2$ durch den Funktionswert $1\frac{3}{4}$ ergänzen. Es handelt sich hier um eine **hebbare Lücke.** Für die Funktion $x \mapsto f(x)$ gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x+2}, & x \neq 2 \\ 1\dfrac{3}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

Der Pol ist $x_p = -2$.
Es ist keine Nullstelle vorhanden.
Die Asymptote ist $y_A = x-1$.

Wertetabelle:

x	-7	-6	-5	-4	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	3	4	5	6	8
y	$-8\frac{3}{5}$	$-7\frac{3}{4}$	-7	$-6\frac{1}{2}$	-7	$-9\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{3}{5}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{7}$	$5\frac{3}{8}$	$7\frac{3}{10}$

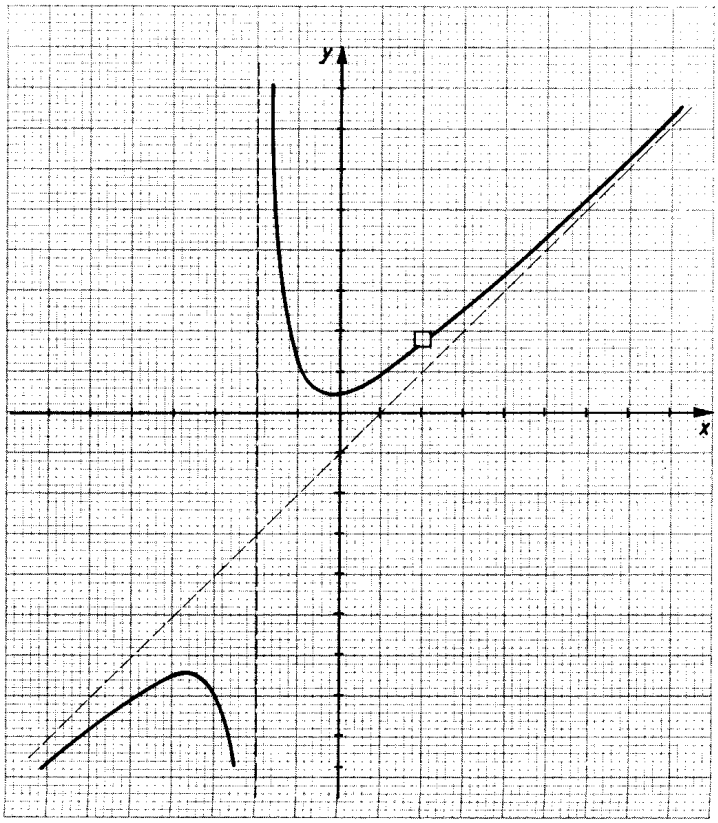

Abb. 4.62. $x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-4}$

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion mit der Gleichung:

a) $y = \frac{x^2+5}{x-3}$

b) $y = \frac{x^2-9}{x-5}$

c) $y = \frac{x^2-36}{x-7}$

d) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$

e) $y = \frac{x^2+x+1}{x+2}$

f) $y = \frac{x^2+5x+4}{x+3}$

g) $y = \frac{x^2-2x-3}{x-1}$

h) $y = \frac{x^2-3x+3}{x+1}$

i) $y = \frac{x-5}{x^2-9}$

k) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$

l) $y = \frac{x+2}{x^2+5x+4}$

m) $y = \frac{x-1}{x^2-3x+3}$

2. Berechnen Sie Asymptote, Pole und Nullstellen:

a) $y = \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4}$ b) $y = \frac{2x^3-14x+12}{3x^2-3x+18}$ c) $y = \frac{x^4+2x^3-3x^2-8x-4}{2x^2+4x-6}$

Skizzieren Sie den Verlauf des Funktionsgraphen.

3. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Pole, Nullstellen und Lücken. Bestimmen Sie die Asymptote und skizzieren Sie dann den Verlauf des Funktionsgraphen:

a) $y = \frac{2x^2-2}{x^2+x-2}$

b) $y = \frac{x^2+3x-10}{x^2+7x+10}$

c) $y = \frac{x^3-7x+6}{3x^2+12x+9}$

d) $y = \frac{2x^3-8x^2+2x+12}{3x^2-27}$

e) $y = \frac{x^3-6x^2-27x+140}{8x^2-48x-56}$

f) $y = \frac{x^4-2x^3-9x^2+2x+8}{x^4-x^3-19x^2-11x+30}$

10. Geben Sie den ungefähren Verlauf der Graphen von folgenden Funktionen an:

a) $x \mapsto \frac{1}{x^5}$ **b)** $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ **c)** $x \mapsto -\frac{2}{x^6}$

d) $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ **e)** $x \mapsto -\frac{2}{(x-1)^2}$ **f)** $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$

11. Gegeben seien folgende Funktionen; $x \in \mathbb{R}$:

a) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **b)** $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ **c)** $x \mapsto \frac{2-x^2}{x-2}$

d) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2-4x}$ **e)** $x \mapsto \frac{x^2+3x-10}{x^2+7x+10}$ **f)** $x \mapsto \frac{x^2-16}{x-4}$

g) $x \mapsto \frac{x^2+4x}{2x+8}$ **h)** $x \mapsto \frac{x^2+4x-4}{x^2-4}$ **i)** $x \mapsto \frac{x^3-2x^2}{x}$

1. Bestimmen Sie alle Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Funktionen und formulieren Sie eine Vermutung über die Gleichung der Asymptote.
2. Bestimmen Sie jeweils Definitions- und Wertebereich.
3. Stellen Sie mit Hilfe der berechneten Werte den Verlauf der Graphen der Funktionen dar.