5.3. Geometrische Folgen und Reihen

5.3.1. Die geometrische Folge (GF)

Die geometrischen Folgen bilden eine weitere Klasse spezieller Folgen.

Definition:

Eine Folge, die das Bildungsgesetz

$\langle f(n)\rangle = \langle a \cdot q^n\rangle \qquad n \in \mathbb{N};\ a, q \in \mathbb{R}$

hat, heißt **geometrische Folge** (GF).

Die dabei zugrunde liegende Funktion ist eine Exponentialfunktion.

Beispiele:

GF_1: $\langle 1 \cdot 2^n\rangle_7 = \langle 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128\rangle$

GF_2: $\langle \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n\rangle_6 = \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{9}{8}; \frac{27}{16}; \frac{81}{32}; \frac{243}{64}\rangle$

GF_3: $\langle 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\rangle_8 = \langle \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{3}{16}; \frac{3}{32}; \frac{3}{64}; \frac{3}{128}; \frac{3}{256}\rangle$

GF_4: $\langle \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n\rangle = \langle \frac{1}{20}; \frac{1}{200}; \frac{1}{2000}; \frac{1}{20000}; \ldots\rangle$

GF_5: $\langle -2 \cdot (4)^n\rangle = \langle -8; -32; -128; -512; -2048; \ldots\rangle$

GF_6: $\langle -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\rangle_4 = \langle -\frac{5}{3}; -\frac{5}{9}; -\frac{5}{27}; -\frac{5}{81}\rangle$

GF_7: $\langle \frac{1}{2} \cdot (-2)^n\rangle_7 = \langle -1; +2; -4; +8; -16; +32; -64\rangle$

GF_8: $\langle \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n\rangle = \langle -\frac{1}{6}; +\frac{1}{12}; -\frac{1}{24}; +\frac{1}{48}; -\frac{1}{96}; +\frac{1}{192}; -+\ldots\rangle$

GF_9: $\langle 4 \cdot 1^n\rangle_6 = \langle 4; 4; 4; 4; 4; 4\rangle$

GF_{10}: $\langle \frac{1}{2} \cdot (-1)^n\rangle = \langle -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; -+\ldots\rangle$

Anhand dieser Beispiele können wir folgende Fälle unterscheiden:

Der Koeffizient a beeinflußt das Vorzeichen der Glieder. Interessanter ist jedoch der Einfluß der Potenzbasis q auf die Glieder der Folge.

$q > 1$: Die Glieder werden dem Betrage nach größer. Das Vorzeichen der Glieder stimmt mit dem Vorzeichen des Koeffizienten überein. Man spricht von einer **steigenden Folge.**

$q = 1$: Die Glieder sind alle gleich. Man spricht von einer **konstanten Folge.**

$|q| < 1$: Die Glieder werden dem Betrage nach kleiner und nähern sich immer mehr dem Wert Null. Es handelt sich um eine **fallende Folge.**

$q < 0$: Die Vorzeichen der Glieder wechseln. Es handelt sich um eine **alternierende Folge.**

$q = -1$: Der Betrag der Glieder ist gleich. Nur das Vorzeichen wechselt. Es handelt sich um eine **oszillierende Folge.**

Die Fälle sollen in einer Darstellung verdeutlicht werden. Außerdem soll ein Vergleich mit arithmetischen Folgen die größere Vielfältigkeit der geometrischen Folgen einsichtig machen (s. Abb. 5.3. und Abb. 5.4.).

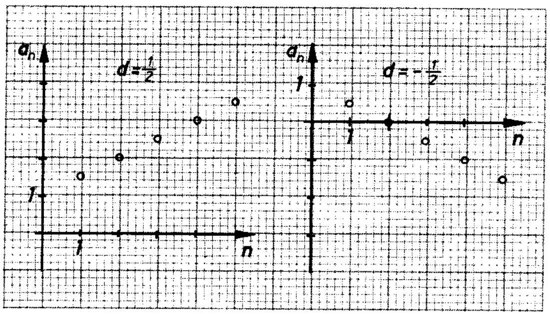

Abb. 5.3. $\langle a_n \rangle = \langle d \cdot n + 1 \rangle$

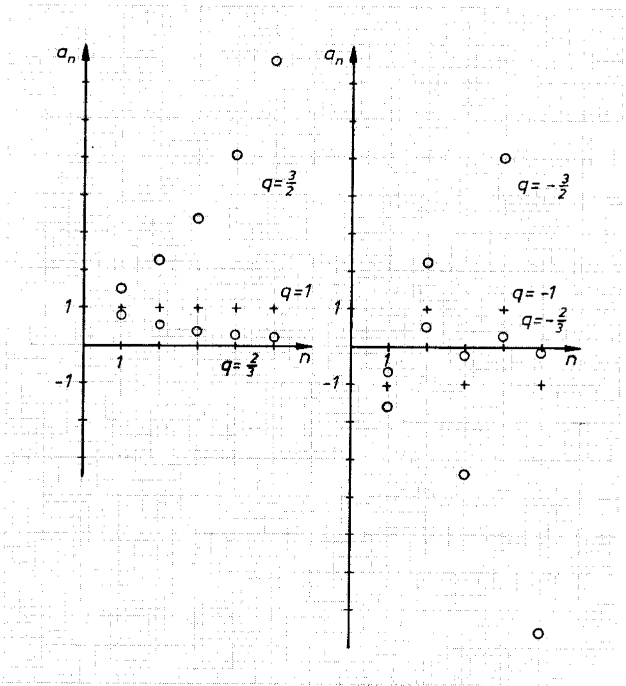

Abb. 5.4. $\langle a_n \rangle = \langle 1 \cdot q^n \rangle$

An den Beispielen kann man leicht erkennen, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. Es gilt immer:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Daraus folgt die

Formel für das (n+1)-te Glied: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{oder} \quad a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Formel für das geometrische Mittel: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Das heißt: Das mittlere von drei aufeinanderfolgenden Gliedern ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden äußeren Glieder. Es handelt sich um das **geometrische Mittel.** Das gilt nur für $q > 0$.

Ist $q < 0$, so gilt abwechselnd:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{und} \quad a_n = -\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Beispiel: Gegeben seien die Glieder $\frac{3}{4}$ und $\frac{27}{16}$ einer GF. Es soll das dazwischenliegende Glied ermittelt werden.

$$a_n = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8}$$

Dieses Ergebnis gilt für $q = \frac{3}{2} > 0$. Handelt es sich jedoch um eine alternierende GF ($q = -\frac{3}{2} < 0$), so muß das mittlere gesuchte Glied negativ sein. Dann gilt: $a_n = -\frac{9}{8}$.

Nennt man das erste Glied einer GF a_1, so gilt:

$a_2 = a_1 \cdot q$; $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$; $a_4 = a_1 \cdot q^3$; ... $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Formel für das n-te Glied: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Beispiel: Eine GF mit dem Anfangsglied $a_1 = 10$ und dem Quotienten $q = 2$ hat das 9. Glied $a_9 = 10 \cdot 2^8 = 2560$.

Sollen zwischen zwei Zahlen neue Zahlen eingeschoben werden, so daß die neuen Zahlen mit den beiden gegebenen Zahlen zusammen eine GF ergeben, so muß folgendermaßen interpoliert werden:

Die gegebenen Zahlen seien z_a und z_e. Es sollen m Glieder eingeschaltet werden. Das bedeutet, die GF hat m+2 Glieder, das erste ist z_a, das letzte ist z_e. Die neue Folge heißt dann

$\langle z_a; z_a \cdot q; z_a \cdot q^2; z_a \cdot q^3; \ldots z_a \cdot q^{n-1} = z_e \rangle$.

Mit $n = m+2$ ergibt sich für das letzte Glied: $z_a \cdot q^{m+1} = z_e$.

Damit läßt sich der Quotient q ermitteln:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{z_e}{z_a}}$$

Ist m gerade, so ist eindeutig festgelegt, ob die GF alterniert oder nicht. Ist m ungerade, muß angegeben werden, ob die Folge alternieren soll oder nicht.

Beispiele:

1. Gegeben seien die Zahlen $z_a = 2$ und $z_e = -64$. Es sollen $m = 4$ Glieder eingeschaltet werden, so daß eine GF entsteht:

$$q = \sqrt[4+1]{\frac{-64}{2}} = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Es handelt sich eindeutig um eine alternierende GF. Sollten $m = 5$ Glieder eingeschaltet werden, so führte das zu $q = \sqrt[6]{-32}$. Das steht im Widerspruch zu der Voraussetzung $q \in \mathbb{R}$.
Die Folge heißt: $\langle +2;\ -4;\ +8;\ -16;\ +32;\ -64 \rangle$

2. Gegeben sei die GF: $\langle 8; \frac{1}{2}; \frac{1}{32}; \frac{1}{512} \rangle$
Zwischen je zwei Glieder sollen drei neue Glieder eingeschaltet werden, so daß wieder eine GF entsteht.

$$q = \sqrt[4]{\frac{1}{2 \cdot 8}} = \frac{1}{2} \text{ bzw.: } q = \sqrt[4]{\frac{1 \cdot 2}{32 \cdot 1}} = \frac{1}{2} \text{ usw.}$$

Die neue GF kann dann heißen:

$$\langle 8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \frac{1}{128}; \frac{1}{256}; \frac{1}{512} \rangle$$

Es kann in diesem Fall auch eine alternierende GF entstehen:

$$\langle +8;\ -4;\ +2;\ -1;\ +\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ +\frac{1}{8};\ -\frac{1}{16};\ +\frac{1}{32};\ -\frac{1}{64};\ +\frac{1}{128};\ +\frac{1}{512} \rangle$$

Aus der Aufgabenstellung muß also hervorgehen, ob die GF alternieren soll oder nicht.

Aufgaben:

1. Vervollständigen Sie die GF:

a) $\langle a_n \rangle_6 = \langle 2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \ldots \rangle$

b) $\langle a_n \rangle_8 = \langle 12; 6; 3; \ldots \rangle$

c) $\langle a_n \rangle_7 = \langle \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \ldots \rangle$

d) $\langle a_n \rangle_7 = \langle \frac{3}{2}; \left(\frac{3}{2}\right)^3; \left(\frac{3}{2}\right)^5; \ldots \rangle$

e) $\langle a_n \rangle_6 = \langle (-3); (-3)^2; (-3)^3; \ldots \rangle$

f) $\langle a_n \rangle_6 = \langle ab^2; a^3b^3; a^5b^4; \ldots \rangle$

g) $\langle a_n \rangle_8 = \langle 3; 3\sqrt{3}; 9; \ldots \rangle$

h) $\langle a_n \rangle_7 = \langle 6; 3\sqrt{2}; 3; \ldots \rangle$

2. Wie heißt das k-te Glied der GF:

a) $\langle 5; 5 \cdot \sqrt{3}; 15; \ldots \rangle; k = 11$

b) $\langle -\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; -\frac{8}{27}; \ldots \rangle; k = 7$

c) $\langle 40; -20; 10; \ldots \rangle; k = 13$

d) $\langle a^2b; ab^2; b^3; \ldots \rangle; k = 9$

3. Bestimmen Sie das erste Glied a_1 der GF:

a) $a_n = \frac{3}{256}; q = \frac{1}{2}; n = 8$

b) $a_n = -\frac{1}{96}; q = -\frac{1}{2}; n = 5$

c) $a_n = -2048; q = 4; n = 5$

d) $a_n = \frac{729}{128}; q = \frac{3}{2}; n = 7$

4. Schalten Sie m Glieder zwischen je zwei benachbarte Glieder der GF. Geben Sie den Quotienten q der neuen GF an.

a) $\langle 4; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \ldots \rangle$; $m = 1$

b) $\langle \frac{1}{27}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; \ldots \rangle$; $m = 2$

c) $\langle 1; 2; 4; \ldots \rangle$; $m = 2$

d) $\langle 1; 2; 4; \ldots \rangle$; $m = 3$

e) $\langle 4; \frac{1}{2}; \frac{1}{16}; \ldots \rangle$; $m = 4$

f) $\langle 440; 880; 1760; \ldots \rangle$; $m = 11$

Wie heißen bei f) die ersten 12 Glieder der neuen Folge? (Die Schwingung des Kammertons a' beträgt 440 Hertz. Der Ton a'' liegt eine Oktave höher; seine Schwingung beträgt 880 Hertz usw. Die Schwingungen der dazwischenliegenden 11 Halbtöne steigen in einer geometrischen Folge an.)

5. Eine Werkzeugmaschine hat ein geometrisch gestuftes Getriebe mit 8 verschiedenen Drehzahlen. Dabei ist $n_1 = 12$ U/min und $n_8 = 440$ U/min.
   a) Bestimmen Sie den Stufensprung und die Zwischendrehzahlen n_2 bis n_7.
   b) Welcher Stufensprung und welche Zwischendrehzahlen würden sich bei arithmetischer Abstufung ergeben?

5.3.2. Die geometrische Reihe (GR)

Definition:
Die formal gebildete Summe der Glieder einer geometrischen Folge heißt geometrische Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_1 \cdot q^{n-1}$$

Der Summenwert der geometrischen Reihe läßt sich ermitteln, indem man die Glieder der Reihe aufschreibt und in der Zeile darunter eine neue Reihe, die aus der alten durch Multiplikation mit q entstanden ist:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1}$$
$$q \cdot s_n = \qquad a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

Subtrahiert man die erste Zeile von der zweiten, so erhält man:

$$q \cdot s_n - s_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \Leftrightarrow s_n (q-1) = a_1 (q^n - 1)$$

Summenformel: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Diese Formel ist zweckmäßig anzuwenden, wenn $q > 1$ ist. Subtrahiert man die zweite Zeile von der ersten, so erhält man:

$$s_n - q \cdot s_n = a_1 - a_1 \cdot q^n \Leftrightarrow s_n \cdot (1-q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$$

Summenformel: $s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Diese Formel ist zweckmäßig anzuwenden bei $q<1$.
Es stehen nun zwei voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ und } a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Von den darin vorkommenden Größen a_1, a_n, q, s_n, n können demnach zwei berechnet werden, wenn die übrigen drei gegeben sind. Das ergibt wieder 10 verschiedene Aufgabentypen. Diese Aufgabentypen sollen hier dargelegt werden, und zwar an der Folge:

$$\langle a_n \rangle_6 = \langle 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32 \rangle;\ s_n = 1 \cdot \frac{2^6-1}{2-1} = 63$$

Mit: $a_1 = 1$; $a_n = 32$; $q = 2$; $n = 6$; $s_n = 63$

1. Gegeben: a_1; q; n

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^5 = 32$$

$$s_n = 1 \cdot \frac{2^6-1}{2-1} = 63$$

2. Gegeben: a_1; a_n; n

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{32}{1}} = 2 \quad s_n \text{ wie bei 1.}$$

3. Gegeben: a_n; q; n

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{32}{2^5} = \frac{32}{32} = 1 \quad s_n \text{ wie bei 1.}$$

4. Gegeben: a_1; a_n; q

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow n = \frac{\lg a_n - \lg a_1}{\lg q} + 1$$

$$n = \frac{\lg 32 - \lg 1}{\lg 2} + 1 = \frac{1{,}5051 - 0}{0{,}301} + 1 = 5 + 1 = 6 \quad s_n \text{ wie bei 1.}$$

Diese Aufgabe läßt sich jedoch in den meisten Fällen einfacher lösen durch Vergleich der Exponenten:

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \Rightarrow 2^{n-1} = 32 = 2^5$$

Daraus folgt: $n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 6$

5. Gegeben: q; n; s_n

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \Leftrightarrow a_1 = s_n \cdot \frac{q-1}{q^n-1}$$

$$a_1 = 63 \cdot \frac{2-1}{2^5-1} = \frac{63}{63} = 1$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^5 = 32$$

6. Gegeben: a_1; q; s_n

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \Leftrightarrow n = \frac{\lg\left[\frac{s_n}{a_1}(q-1)+1\right]}{\lg q}$$

$$n = \frac{\lg\left[\frac{63 \cdot 1}{1}+1\right]}{\lg 2} = \frac{\lg 64}{\lg 2} = \frac{1{,}8062}{0{,}301} = 6 \quad a_n \text{ wie bei 5.}$$

7. Gegeben: a_1; n; s_n

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \Leftrightarrow \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{s_n}{a_1}$$

Es handelt sich hier um eine Gleichung vom Grad $(n-1)$. Sie ist mit den bisher besprochenen Hilfsmitteln allgemein nur lösbar für $n \leqq 3$. Wir wählen daher hier andere Anfangswerte:

$$a_1 = 1; \quad n = 3; \quad s_n = 7$$

Dann gilt:

$$\frac{q^3 - 1}{q-1} = q^2 + q + 1 = \frac{s_n}{a_1} = 7$$
$$q^2 + q - 6 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \lor q = -3$$

Es kommen also zwei Lösungen vor:
Für $q = 2$: $\langle 1; 2; 4 \rangle$; $s_n = 7$; $a_n = 4$
Für $q = -3$: $\langle 1; -3; 9 \rangle$; $s_n = 7$; $a_n = 9$

8. Gegeben: a_n; n; s_n

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_n \cdot q}{q^n}$$

Eingesetzt in $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ ergibt sich:

$$s_n = a_n \cdot \frac{q(q^n-1)}{q^n(q-1)} = a_n \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} \Leftrightarrow q^n - \frac{a_n}{s_n} \cdot q^n - q^{n-1} + \frac{a_n}{s_n} = 0$$

Diese Gleichung ist mit einfachen Hilfsmitteln nur lösbar für $n \leqq 2$. Es wird deshalb hier auf Aufgaben dieses Typs verzichtet. Ebenso wird auf Aufgaben des Typs aus Beispiel 7. verzichtet.

9. Gegeben: a_1; a_n; s_n

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n$$

Eingesetzt in $s_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1}$ ergibt sich:

$$s_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} \Leftrightarrow q = \frac{s_n - a_1}{s_n - a_n}$$

$$q = \frac{63-1}{63-32} = \frac{62}{31} = 2$$

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \Rightarrow 2^{n-1} = 32 = 2^5 \Leftrightarrow n = 6$$

10. Gegeben: a_n; q; s_n

Aus $s_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}$ (vgl. Beispiel 9.)

ergibt sich durch Auflösen nach a_1:

$a_1 = a_n \cdot q + s_n - s_n \cdot q$

$a_1 = 32 \cdot 2 + 63 - 2 \cdot 63 = 1$ n wie bei 9.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die fehlenden Größen:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
a_1	5	-320		9		-2	-5	
a_n		$\frac{5}{8}$	1458	2304			2560	$\frac{1}{1280}$
q	-3		3	2	4	$\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$
n	6	10	8		6			
s_n					$682\frac{1}{2}$	$-\frac{665}{16}$	1705	$-\frac{51}{768}$

2. Nach einer Sage erbat sich der Erfinder des Schachspiels als Ehrengeschenk für das erste der 64 Felder ein Weizenkorn, für das zweite zwei Körner, für das dritte vier Körner usw. bis zum 64. Feld.
Wieviel Weizenkörner hätte er bekommen müssen?
Nimmt man an, daß 20000 Weizenkörper ein Kilogramm wiegen, wieviel Waggons mit einem Fassungsvermögen von 10000 kg könnten damit beladen werden? Nimmt man an, daß ein Waggon 15 m lang ist, wie lang wäre die Kette aller Waggons? Die Lichtgeschwindigkeit beträgt ca. 300000 $\frac{km}{s}$. Wie lange brauchte ein Lichtstrahl, um vom Anfang zum Ende der Kette zu gelangen? Zum Vergleich: Ein Lichtstrahl gelangt in ca. 8 Minuten von der Sonne zur Erde.
3. In einer geometrischen Folge ist die Summe des 2. und 3. Gliedes gleich 60, der Quotient des 1. und 4. Gliedes gleich $\frac{8}{27}$. Stellen Sie die Folge auf und berechnen Sie den Summenwert der ersten 5 Glieder.
4. Die Summe des 5. und 6. Gliedes verhält sich zur Summe des 10. und 11. Gliedes wie 1 zu 243. Berechnen Sie den Quotienten der Folge.
5. Drei Zahlen, von denen die zweite um 17 größer ist als die erste, die dritte um 34 größer ist als die zweite, bilden eine GF. Wie heißt sie?
6. In einem Gefäß befinden sich 15 l 96%iger Alkohol. Es werden 3 l Wasser hinzugegeben und 3 l Mischung anschließend entnommen. Dieser Vorgang wird noch sechsmal wiederholt. Wieviel %ig ist dann die Mischung? Wie oft muß der Vorgang wiederholt werden, damit die Mischung 18,6%ig ist (abrunden)?
7. Ein Gefäß enthält 1 dm^3 Wasser, in dem 50 g Farbstoff gelöst sind. Beim Leeren bleibt 1 cm^3 Lösung in dem Gefäß. Wieviel g Farbstoff sind noch in der Lösung, wenn man fünfmal mit Wasser nachfüllt und jedesmal bis auf 1 cm^3 leert?
8. Ein Forscher züchtet Bakterien, die sich auf einem Nährboden je Stunde verdoppeln. Wieviel Bakterien sind nach 24 Stunden vorhanden, wenn mit 5 Bakterien begonnen wurde?

9. Einem Quadrat mit der Seitenlänge $l = 10$ cm wird ein um 45° gedrehtes Quadrat einbeschrieben, diesem wieder ein um 45° gedrehtes usw. Wie groß ist die Fläche der ersten 8 [10] Quadrate zusammen?
Wie groß ist der Umfang der ersten 8 [10] Quadrate zusammen?

10. Ein mit Luft gefüllter Behälter hat ein Volumen von 1 dm^3. Er soll mit einer Luftpumpe geleert werden, deren Zylinder 400 cm^3 faßt. Wieviele Kolbenbewegungen benötigt man, um den Druck von 1 bar auf 10 mbar zu verringern?

11. Beim Durchdringen einer Glasplatte verliert ein Lichtstrahl 8% seiner Helligkeit I_0.
a) Welche Helligkeit I hat er nach dem Durchgang durch 9 Glasplatten?
b) Bei wieviel Platten ist seine Helligkeit auf 30% von I_0 abgesunken?

12. Polonium hat eine Halbwertszeit von 138 Tagen. In welcher Zeit sind von 200 g Polonium noch 2 g übrig?

5.3.2.

1. a) $a_n = -1215$; $s_n = -910$

b) $q = -\frac{1}{2}$; $s_n = \frac{5125}{24}$

c) $a_1 = \frac{2}{3}$; $s_n = \frac{6560}{3}$

d) $n = 9$; $s_n = 4599$

e) $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_n = 512$

f) $n = 6$; $a_n = -\frac{243}{16}$

g) $q = -2$; $n = 10$

h) $a_1 = -\frac{1}{10}$; $n = 8$

2. ca. 1^h 16,8 min

3. $q = \frac{3}{2}$; $a_1 = 16$; $s_5 = 211$

4. $q = 3$

5. $q = 2$; $a_1 = 17$

6. 26,8%; 8mal wiederholen

7. $5 \cdot 10^{-17}$ g Farbstoff

8. ca. 83,9 Mio. Bakterien

9. $A_8 = 25 \cdot \frac{255}{32}$ F. E. [$A_{10} = 25 \cdot \frac{1023}{128}$ F. E.]

$U_8 = 75(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$ L. E. [$U_{10} = \frac{155}{2}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$ L. E.]

10. 16 Kolbenbewegungen

11. a) 47,2% von J_0 b) 15 Glasplatten

12. 917 Tage

6. Bestimmen Sie die fehlenden Zahlen folgender geometrischer Reihen:

	a)	b)	c)	d)	e)
a_1		13		25	230
q	2		3	-4	-3
n	10	9	10		12
a_n	1536	3328			
s_n			49205	81925	

7. Formen Sie $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ nach a_1, q und n um.

8. Erweitern Sie folgende geometrische Reihen um jeweils drei Glieder:

a) $1 - 3 + \cdots;$ **b)** $\frac{25}{27} + \frac{5}{9} + \cdots;$ **c)** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots;$ **d)** $a^2b - a^3 + \cdots$

9. In einer geometrischen Zahlenfolge ist die Summe der 2. und 3. Glieder gleich 15,625. Das Produkt des 2. und 4. Gliedes ist gleich 244,140625. Wie lauten die Glieder der Zahlenfolge? Berechnen Sie die Summe s_n der ersten acht Glieder.