## 8.8. Zerlegen in Faktoren

Wie schon unter 6.5. erwähnt, kann man aus mehreren Gliedern gemeinsame Faktoren ausklammern.

Der gemeinsame Faktor kann auch eine Summe oder eine Differenz sein.

Oft kommt man zum Ziel, wenn man aus mehreren Summanden einen gemeinsamen Faktor ausklammert und die Summe dann in ein Produkt umwandelt.

**Beispiele:**

**1.** $9x^4 + 12x^3 = \underline{\underline{3x^3\,(3x + 4)}}$

**2.** $3a^2(5b^2 + 4n) + 2x(5b^2 + 4n)$
$= \underline{\underline{(5b^2 + 4n) \cdot (3a^2 + 2x)}}$

**3.** $42a^2y + 18by^2 - 28a^3 - 12aby$
$= 6y(7a^2 + 3by) - 4a(7a^2 + 3by)$
$= \underline{\underline{(7a^2 + 3by) \cdot (6y - 4a)}}$

**4.** $15a^2b^2 + 12a^2n + 5b^2 + 4n$
$= 3a^2(5b^2 + 4n) + 5b^2 + 4n$
$= \underline{\underline{(5b^2 + 4n) \cdot (3a^2 + 1)}}$

Auch die Differenz zweier Quadrate kann man nach nebenstehender Formel in ein Produkt umwandeln. Die Probe erfolgt in jedem Falle durch Zurückmultiplizieren.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

**Beispiele:**

**1.** $16x^2 - 9a^2 = \underline{\underline{(4x + 3a) \cdot (4x - 3a)}}$

**2.** $4a^2b^2 - 1 = \underline{\underline{(2ab - 1) \cdot (2ab + 1)}}$

Bei diesem Beispiel ist das erste Quadrat eine Summe $a^2 \longrightarrow (4x + 2y)^2$, man muß also an Stelle von $a \longrightarrow 4x + 2y$ schreiben.

**3.** $(4x + 2y)^2 - 9y^2$
$= (4x + 2y - 3y) \cdot (4x + 2y + 3y)$
$= \underline{\underline{(4x - y) \cdot (4x + 5y)}}$

Hierbei ist $\begin{matrix} a^2 \longrightarrow (a - b)^2 \\ b^2 \longrightarrow (x + b)^2 \end{matrix}$

**4.** $(a - b)^2 - (x + b)^2$
$= (a - b + x + b) \cdot (a - b - x - b)$
$= \underline{\underline{(a + x) \cdot (a - 2b - x)}}$

Ist die Differenz zweier Quadrate mit einem Faktor multipliziert, so muß man ihn vorher ausklammern.

**5.** $72a^2b^2y - 50x^2y$
$= 2y(36a^2b^2 - 25x^2)$
$= \underline{\underline{2y \cdot (6ab + 5x) \cdot (6ab - 5x)}}$

Diese Formel erlaubt es, die Differenz $a^4 - b^4$ in ein Produkt umzuwandeln.

$$\boxed{\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2)^2 - (b^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) \\ &= (a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b) \end{aligned}}$$

**Beispiele:**

**1.** $x^4 - 81 = (x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9)$
$= \underline{\underline{(x^2 + 9) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)}}$

Die Zerlegung von Faktoren ist immer dann von Vorteil, wenn statt Summe oder Differenz Faktoren gebraucht werden, die man kürzen kann. Auf diese Weise wird der Ausdruck vereinfacht.

**2.** $\dfrac{c^4}{81} - \dfrac{x^4}{16} = \left(\dfrac{c^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{c^2}{9} - \dfrac{x^2}{4}\right)$
$= \underline{\underline{\left(\dfrac{c^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{c}{3} + \dfrac{x}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{c}{3} - \dfrac{x}{2}\right)}}$

Einen Ausdruck, den man in ein Produkt von zwei gleichen Faktoren von der Form $(a + b) \cdot (a + b)$ oder $(a - b) \cdot (a - b)$ zerlegen kann, nennt man ein vollständiges Quadrat.

$$\boxed{\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b)\\ &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b)\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}}$$

Das erste und das dritte Glied ergeben die beiden Glieder der Klammer, vom mittleren Glied erhält man das Vorzeichen. Ist ein Vielfaches von $(a \pm b)^2$ vorhanden, so klammert man zunächst den entsprechenden Faktor aus.

**Beispiele:**

**1.** $25a^2 - 30ab + 9b^2 = \underline{\underline{(5a - 3b)^2}}$

**2.** $9x^2 + 6x + 1 = \underline{\underline{(3x + 1)^2}}$

**3.** $96a^3x + 48a^2x^2 + 6ax^3$
$= 6ax\ (16a^2 + 8ax + x^2)$
$= \underline{\underline{6ax\ (4a + x)^2}}$

Oft sind bei einem viergliedrigen Ausdruck zwei mittlere Glieder zusammengefaßt, es fehlt also ein Mittelglied. In diesem Falle kann man den Ausdruck mit nebenstehender Formel in ein Produkt verwandeln.

$$\boxed{\begin{aligned}&x^2 + ax + bx + ab\\ &= x^2 + (a + b)\,x + ab\\ &= (x + a) \cdot (x + b)\\ &\qquad \text{denn}\\ &(x + a) \cdot (x + b)\\ &= x^2 + ax + bx + ab\\ &= x(x + a) + b(x + a)\\ &= (x + a) \cdot (x + b)\end{aligned}}$$

**Beispiele:**

1. Bei diesem Beispiel sollen die unbekannten Glieder $a$ und $b$ folgende Bedingungen erfüllen:

   $a + b = 8; \qquad a \cdot b = 15$

   Diese Bedingungen erfüllen die Zahlen $a = 3$ und $b = 5$, $8d$ wird also zerlegt in $3d + 5d$.

**1.** $d^2 + \underset{(a+b)}{\underset{\downarrow}{8d}} + \underset{ab}{\underset{\downarrow}{15}} = \ ?$

$d^2 + 3d + 5d + 15$
$= d(d + 3) + 5(d + 3)$
$= \underline{\underline{(d + 3) \cdot (d + 5)}}$

2. Hierbei erfüllen die Bedingungen

   $a + b = 17$
   $a \cdot b = 60$

   die Zahlen 5 und 12, man muß also das mittlere Glied $-17y$ in die zwei Glieder $-5y\ -12y$ zerlegen.

**2.** $y^2 - 17y + 60 = \ ?$

| | |
|---|---|
| $1 \cdot 60$ | $1 + 60 = 61$ |
| $2 \cdot 30$ | $2 + 30 = 32$ |
| $3 \cdot 20$ | $3 + 20 = 23$ |
| $4 \cdot 15$ | $4 + 15 = 19$ |
| $\underline{\underline{5 \cdot 12}}$ | $5 + 12 = \underline{\underline{17}}$ |

Beim Ausklammern von $-12$ darauf achten, daß in der Klammer das Vorzeichen umgekehrt wird.

$y^2 - 5y - 12y + 60$
$= y(y - 5) - 12(y - 5)$
$= \underline{\underline{(y - 5) \cdot (y - 12)}}$

3. **Bevor** man **vorstehende** Formel anwenden kann, **muß** zunächst der gemeinsame Faktor $2a$ **ausgeklammert** werden. Die Bedingungen

$$a + b = 9$$
$$a \cdot b = 20$$

erfüllen die Zahlen 4 und 5.

**3.** $2an^2 - 18anx + 40ax^2$
$= 2a(n^2 - 9nx + 20x^2)$
$= 2a(n^2 - 4nx - 5nx + 20x^2)$
$= 2a[n(n - 4x) - 5x(n - 4x)]$
$= 2a[(n - 4x) \cdot (n - 5x)]$
$= \underline{\underline{2a(n - 4x) \cdot (n - 5x)}}$

4. Ein Ausdruck läßt sich auch dann in ein Produkt verwandeln, wenn man das erste und letzte Glied so in Faktoren zerlegen kann, daß die Summe der Produkte entsprechender Faktoren das mittlere Glied ergeben. Dabei genau auf die Vorzeichen der einzelnen Faktoren achten. Das mittlere Glied zerlegt man dann in die so erhaltenen zwei Summanden.

**4.** $\underbrace{36a^2}_{4a \cdot 9a} + 47ab + \underbrace{15b^2}_{3b \cdot 5b} = ?$

$27ab$
$20ab$
$\overline{47ab}$

$4a \cdot 9a + 27ab + 20ab + 3b \cdot 5b$
$= 9a(4a + 3b) + 5b(4a + 3b)$
$= \underline{\underline{(4a + 3b) \cdot (9a + 5b)}}$

5. Auch bei diesem Ausdruck kann man das erste und letzte Glied in die entsprechenden Faktoren zerlegen. Hierbei muß man besonders genau auf die Vorzeichen achten. Es ist ratsam, bei Aufgaben dieser Art immer die Probe zu machen.

**5.** $\underbrace{21x^2}_{3x \cdot 7x} + 29xy - \underbrace{10y^2}_{5y \cdot (-2y)} = ?$

$35\,xy$
$-6xy$
$\overline{29xy}$

$3x \cdot 7x + 35xy - 6xy + 5y \cdot (-2y)$
$= 7x(3x + 5y) - 2y(3x + 5y)$
$= \underline{\underline{(3x + 5y) \cdot (7x - 2y)}}$

Die nebenstehende Formel ermöglicht es, den Ausdruck $a^3 \pm b^3$ in ein Produkt zu zerlegen. Man erhält diese Formeln, wenn man $a^3 \pm b^3$ durch $a \pm b$ teilt.

$$\boxed{\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a^2 - ab + b^2) \cdot (a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a^2 + ab + b^2) \cdot (a - b) \end{aligned}}$$

**Beispiele:**

$a = 4x$ und $b = 3$

**1.** $64x^3 + 27$
$= \underline{\underline{(16x^2 - 12x + 9) \cdot (4x + 3)}}$

$a = 5$ und $b = 6a$

**2.** $125 - 216a^3$
$= \underline{\underline{(25 + 30a + 36a^2) \cdot (5 - 6a)}}$

## Faktorenzerlegung an Brüchen

1. Wenn man einen Bruch kürzen will, muß man Zähler und Nenner in Faktoren zerlegen. Das geschieht nach den oben besprochenen Regeln.

**Beispiele:**

**1.** $\dfrac{63a - 49b}{81a^2 - 49b^2} = \dfrac{7\cancel{(9a - 7b)}}{(9a + 7b) \cdot \cancel{(9a - 7b)}}$
$= \underline{\underline{\dfrac{7}{9a + 7b}}}$

2. *Lösungsgang:*

   1. Aus je zwei Gliedern den gemeinsamen Faktor ausklammern.
   2. Die Summe in ein Produkt umwandeln.
   3. Gleiche Faktoren kürzen.

3. Hierbei wende ich die Formeln $a^3 - b^3$ und $a^2 - b^2$ an, um Zähler und Nenner in Faktoren zu zerlegen.

4. Lassen sich Zähler und Nenner nach den bisherigen Regeln nicht in Faktoren zerlegen, vermutet man aber, daß es möglich ist, so kann man versuchen, den Zähler nach den Regeln von 7.10. (8.5.) durch den Nenner zu teilen. Dieses Verfahren führt auch bei einfachen Brüchen meist zum Ziel. Geht die Division nicht auf, so kann man den Zähler nicht in Faktoren zerlegen.

5. $(a^n - b^n)$ ist durch $(a - b)$ für jeden ganzzahligen Wert von $n$ teilbar, durch $(a + b)$ nur, wenn $n$ eine gerade Zahl ist. $(a^n + b^n)$ ist durch $(a + b)$ nur teilbar, wenn $n$ eine ungerade Zahl ist, durch $(a - b)$ ohne Rest aber nicht teilbar.

**2.**
$$\frac{3bc^2 - cd + 15bc - 5d}{6bc^2 - 2cd - 3bc + d}$$
$$= \frac{c\cancel{(3bc - d)} + 5(3bc - d)}{2c\cancel{(3bc - d)} - 3bc + d}$$
$$= \frac{(3bc - d)\cdot(c + 5)}{(3bc - d)\cdot(2c - 1)} = \underline{\underline{\frac{c + 5}{2c - 1}}}$$

**3.**
$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 + x + 1)\cdot\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cdot\cancel{(x - 1)}}$$
$$= \underline{\underline{\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}}}$$

**4.**
$$\frac{24x^2 - 16cx - 14bx - 24b^2 - 12bc}{6x - 8b - 4c}$$
$$= \frac{\cancel{(6x - 8b - 4c)}\cdot(4x + 3b)}{\cancel{6x - 8b - 4c}} = \underline{\underline{4x + 3b}}$$

$$\begin{array}{l}
(24x^2 - 16cx - 14bx - 24b^2 - 12bc) : (6x - 8b - 4c) = \underline{\underline{4x + 3b}} \\
\;\; 24x^2 - 16cx - 32bx \\
\underline{(-)\quad(+)\quad(+)\qquad\qquad\qquad\quad} \\
\quad 0 \qquad 0 \qquad 18bx - 24b^2 - 12bc \\
\qquad\qquad\quad\;\; 18bx - 24b^2 - 12bc \\
\qquad\qquad\quad\;\; \underline{(-)\quad(+)\quad(+)} \\
\qquad\qquad\qquad\; 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}$$

**5.**
$$\begin{array}{l}
(a^4 - b^4) : (a + b) = \underline{\underline{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3}} \\
\underline{-(a^4 + a^3b)} \\
\quad 0 - a^3b - b^4 \\
\underline{\;\; -(-a^3b - a^2b^2)} \\
\qquad 0 \qquad a^2b^2 - b^4 \\
\qquad\qquad \underline{-(a^2b^2 + ab^3)} \\
\qquad\qquad\quad 0 - ab^3 - b^4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-ab^3 - b^4)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}$$

## 8.8. Zerlegen in Faktoren

1. $a^3 - a^2 = \underline{\underline{a^2(a-1)}}$
2. $8x^4 + 12x^3$
3. $64a^2c^3 + 56a^3c^2$
4. $85a^5b^4 - 119a^4b^5$
5. $60a^3b^3c^2 + 70a^2b^2c^2 - 30ab^3c^3$
6. $28a^2x^2 - 21a^3x^3 - 35a^3x^2$
7. $45a^2y^2 - 63a^2y^3 + 36a^3y^2$
8. $1{,}5a^2b^2 + 2{,}5ab^3$
9. $-125a^4y^4 + 75a^2y^4 - 150a^3y^3$
10. $0{,}06x^3y^2 - 0{,}08x^2y^3$
11. $6xy^3 - 3xy^2 + 9xy$
12. $12a^4 - 20a^3 - 12a^2$
13. $4a^3b^2 - 12a^2b^3 - 16ab^2$
14. $4{,}2abc^2 + 3a^2bc - 3{,}6abc^2$
15. $6\frac{3}{4}x^2y - 11\frac{1}{4}xy^2$
16. $5\frac{1}{4}a^2x^2y + 6\frac{3}{4}a^2xy^2 - 3\frac{3}{4}a^3x$
17. $\frac{D^2 \cdot \pi}{4} - \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$ (Kreisringinhalt)
18. $\frac{h^3}{2s} + \frac{2hs}{3}$ (Kreisabschnittsfläche)
19. $\frac{\pi s D}{2} + \frac{\pi s d}{2}$
    (Mantel vom Kegelstumpf)
20. $\frac{D \cdot d \cdot \pi \cdot h}{12} + \frac{D^2 \cdot \pi \cdot h}{12} + \frac{d^2 \cdot \pi \cdot h}{12}$
    (Volumen vom Kegelstumpf)
21. $\frac{D^2 \cdot \pi \cdot l}{4} - \frac{d^2 \cdot \pi \cdot l}{4}$
    (Volumen vom Hohlzylinder)
22. $\frac{Ma^2}{12} + \frac{Mb^2}{12}$
23. $\frac{P(l-a)}{b} \cdot x - P(x - ax)$
    ($x$ ausklammern)
24. $\frac{V_1^2}{2xy^2} - \frac{V_2^2}{2x}$
25. $18x^2y + 10y^2 - 63x^3 - 35xy = 2y(9x^2 + 5y) - 7x(9x^2 + 5y) = \underline{\underline{(9x^2 + 5y) \cdot (2y - 7x)}}$
26. $10bc^2 + 12b^3 - 15c^3 - 18b^2c$
27. $3x^3 + 5x^2 + 5 + 3x$
28. $4a - 2 + 2a^5 - a^4$
29. $96x^3 + 108xy^2 - 99y^2z - 88x^2z$
30. $77a^2c^3 - 63c^4 - 72a^2c + 88a^4$
31. $24a^2x + 12a^2x^3 + 4ax^2y + 8ay$
32. $12an^3 - 8n^3x - 6a^2nx + 4anx^2$
33. $6a^2b^2 - 8a^2bx - 9a^2bc + 12a^2cx$
34. $13ab^3 + 15a^3 - 135a^2 - 117b^3$
35. $5{,}6a^2 - 7{,}2ab - 3{,}5ac + 4{,}5bc$
36. $\frac{1}{15}a^2 - \frac{1}{18}ab + \frac{1}{18}bx - \frac{1}{15}ax$
37. $\frac{5}{12}b^3 + \frac{7}{12}ab^2 - \frac{7}{16}a^2b - \frac{5}{16}ab^2$
38. $n^2 - m^2 = \underline{\underline{(n+m) \cdot (n-m)}}$
39. $x^2 - y^2$
40. $4 - a^2$
41. $9b^2 - 16c^2$
42. $b^2 - 9$
43. $\frac{1}{4}x^2 - 1$
44. $64n^2 - 25m^2$
45. $1 - a^2$
46. $b^4 - 16b^2$
47. $9b^3 - b$
48. $x^3 - 4x$
49. $5a^2 - 80$
50. $0{,}25a^2b^2 - 0{,}36x^2y^2$
51. $\frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{4}y^2$
52. $2\frac{1}{4}a^2b^3 - 1\frac{9}{16}bx^2$

53. $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = \underline{\underline{(x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}}$

54. $a^4 - 256$

55. $81x^4 - 16b^4$

56. $256 - 625a^4$

57. $16n^4 - \frac{1}{16}m^4$

58. $\frac{a^4}{256} - \frac{b^4}{81}$

59. $\frac{a^4b^4}{625} - \frac{x^4y^4}{81}$

60. $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$

61. $b^2 - 4b + 4$

62. $x^2 - 8x + 16$

63. $36a^2 - 60a + 25$

64. $n^2 + nx + \frac{1}{4}x^2$

65. $2b^2 - 12b + 18$

66. $36x^2 - 60x + 25$

67. $0{,}81b^2 + 1{,}44b + 0{,}64$

68. $72ab - 120ab^2 + 50ab^3$

69. $\frac{4}{25}n^2 - 1\frac{1}{5}nx + 2\frac{1}{4}x^2$

70. $a^2 - 13a + 40 = a^2 - 5a - 8a + 40 = a(a - 5) - 8(a - 5) = \underline{\underline{(a - 5) \cdot (a - 8)}}$

71. $n^2 + 6n - 16$

72. $x^2 - x - 6$

73. $a^2 - 7ab + 12b^2$

74. $x^2 + 18xy + 77y^2$

75. $n^2 - 12n + 27$

76. $63a^2 + 16ab + b^2$

77. $9c^2 - 36c + 32$

78. $a^2 - \frac{5}{6}a + \frac{1}{6}$

79. $27a^3 - b^3 = \underline{\underline{(9a^2 + 3ab + b^2) \cdot (3a - b)}}$

80. $x^3 - y^3$

81. $64n^3 - 1$

82. $216 - 27b^3$

83. $64a^3b^3 + 27n^3$

84. $729x^3 + 1000$

85. $8b^3 + 125$

86. $\frac{a^2 + ax}{a^2 - ax} = \frac{a(a + x)}{a(a - x)} = \underline{\underline{\frac{a + x}{a - x}}}$

87. $\frac{ax + a + x + 1}{a^2 - 1}$

88. $\frac{18x^2 - 27xy^3}{6xy - 9y^4}$

89. $\frac{a^2 - b^2}{4a^2 + 4ab}$

90. $\frac{9x + 9xz}{1 - z^2}$

91. $\frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2}$

92. $\frac{81a^2 - 49b^2}{63a - 49b}$

93. $\frac{4x - 4}{x^2 - x}$

94. $\frac{(4a - 1)^2}{16a^2 - 1}$

95. $\frac{n^2 - m^2}{n^2 + 2nm + m^2}$

96. $\frac{2ab - 2a^2 + bc - ac}{2ab - 2ac + bc - c^2}$

97. $\frac{x^3 - b^3}{x - b}$

98. $\frac{n^3x - nx^3}{n - x}$

99. $\frac{3a^2(8b^3 + 64)}{(4b^2 - 8b + 16) \cdot (6ab + 12a)}$

100. $\frac{a^3 - 1}{a - 1}$

101. $\frac{a^3 + 1}{a + 1}$

102. $\frac{a^2 - 3a - 4}{a^2 - 7a + 12}$

103. $\frac{am + bm - an - bn}{a^2 - b^2}$

104. $\frac{x^4z^2 - x^2z^4}{x^2(x - z)^2}$

105. $\frac{a^2 + ab + b^2}{(a + b)^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$

106. $(x^2 - 2x + 1) \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

107. $\frac{(a^2 + 2ab + b^2) \cdot a}{a^2 - b^2} : \frac{a^2}{(a + b) \cdot (a - b)}$

108. $\frac{x + y}{x - y} : \frac{5x}{x^2 - y^2}$

109. $\left(\frac{a^2 - 4}{a^2 - 1} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 4a + 4}\right) \cdot \frac{a^2 - a}{a^2 + 2a}$

110. $\left[\frac{4x^2 - 4xz}{6xz + 6z^2} : \left(\frac{3x^2 - 3xz}{4x^3 + 8x^2z + 4xz^2} : \frac{x^2 - 4xz + 4z^2}{8x^3 + 8x^2z}\right)\right] : \frac{(x - 2z)^2}{9xz(x^2 - z^2)}$

**15.** Faktorisiere und fasse wenn möglich zusammen:

**a)** $12a^2 - 9ab$
**b)** $18ap - 6p^2$
**c)** $3x^2 - 5x$
**d)** $6xy - 2y$
**e)** $6ax - 9bx$
**f)** $8ax + 20x^2$
**g)** $25ab - 5b^2$
**h)** $4ab - 6bc$
**i)** $2ay + 3by - cy$
**k)** $ab + ac - ad$
**l)** $ax - bx + cx$
**m)** $2ay - cy + 3by$
**n)** $a^2 - ab - ac + ad$
**o)** $15ab - 25b^2 + 30bc$
**p)** $20a^2 - 35ab - 45ac$
**q)** $nx - px + xy - x$
**r)** $36ax - 54bx - 9x$
**s)** $6a^2 - 8ab + 12ac$

**16.** **a)** $a(x-1) + b(x-1)$
**b)** $5a(p-q) - 7b(p-q)$
**c)** $(a+b)\,x - (a+b)$
**d)** $3a(x-y) - 5b(x-y)$
**e)** $2a(3b-2) - x(3b-2)$
**f)** $a(x-y) - (x-y)$
**g)** $(a-b)\,(3x-2y) + (a-b)\,(4x+7y)$
**h)** $(a+b)\,(5x+3y) - (4x+5y)\,(a+b)$

**17.** **a)** $16 + 8y + y^2$
**b)** $9y^2 + 6y + 1$
**c)** $81 - 18z + z^2$
**d)** $36x^2 - 12x + 1$
**e)** $1 - 22s + 121s^2$
**f)** $16 - 24a + 9a^2$
**g)** $1 + 14r + 49r^2$
**h)** $25h^2 + 40hl + 16l^2$
**i)** $25x^2 + 10xy + y^2$
**k)** $9a^2 - 12ab + 4b^2$
**l)** $49b^2 + 42b + 9$
**m)** $m^2 - 16mn + 64n^2$
**n)** $4x^2 - 1$
**o)** $16a^2 - 9b^2$
**p)** $(a+b)^2 - c^2$
**q)** $(a-b)^2 - c^2$
**r)** $(7x+3y)^2 - 4y^2$
**s)** $(8a-b)^2 - 16a^2$
**t)** $81m^2 - 16(4m-3n)^2$
**u)** $(3a-5b)^2 - 9b^2$
**v)** $(4x+5y)^2 - 16x^2$
**w)** $9(3x-5y)^2 - 64x^2$

### 5.4.2 Faktorisieren durch Ausklammern

Setzt man vor oder hinter einen ausdividierten Klammerausdruck den Divisor als Faktor, erhält man den ursprünglichen Ausdruck in Produktform. Diese Maßnahme nennt man „Zerlegung in Faktoren" oder „Faktorisieren" durch Ausklammern.

**Beispiel mit Lösung**

**Aufgabe:** Zerlegen Sie die Summe $6ab + 9ac - 3a$ in Faktoren!

**Lösung:** Wir klammern den gemeinsamen Faktor $3a$ aus und teilen jeden Term der Summe durch den gemeinsamen Faktor:

$6ab + 9ac - 3a = 3a(2b + 3c - 1)$ Machen Sie die Probe!

**Aufgaben** ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

1. a) $8a - 12b$ b) $15m + 9n$ c) $21r - 14s$ d) $24u + 8v$ e) $22x - 11$
2. a) $ab + ac$ b) $bx - by$ c) $pq + qr$ d) $xy + y^2$ e) $y^2 - yz$
3. a) $15ab + 25a$ b) $18mn - 24n$ c) $27pq + 36p$ d) $21xy - 7y$ e) $8yz - 16z$
4. a) $21a^2 - 24a$ b) $32p + 40p^2$ c) $45x^2 - 36x$ d) $20y + 28y^2$ e) $12z^2 - 18z$
5. a) $16a^2b - 24ab^2$ b) $14pq^2 + 8p^2q$ c) $15u^2v - 10uv$ d) $42x^2y^2 - 49xy$
6. a) $18ax - 12ay + 24az$ b) $20pq + 5p^2q - 15pq^2$ c) $14xy^2 - 21x^2y + 7xy$
7. a) $9a^2b^2 - 6a^2b + 15ab^2$ b) $24pq^2 + 12p^2q - 4p^2q^2$ c) $16x^2y + 8xy - 24x$
8. a) $a(p + q) + b(p + q)$ b) $p(a - b) - q(a - b)$ c) $m(x + y) - n(x + y)$

▸ 9. a) $a(c - d) + (c - d)$ b) $b(m + n) - (m + n)$ c) $(x - y)p - (x - y)$

▸ 10. a) $a(c + d) - c - d$ b) $b(m - n) - m + n$ c) $(x + y)p - x - y$

Bei besonderen Ausdrücken lassen sich in einem ersten Schritt einzelne Faktoren teilweise ausklammern und in einem zweiten Schritt zu einem gemeinsamen Faktor mit einer Klammer zusammenfassen.

**Beispiel mit Lösung**

**Aufgabe:** Zerlegen Sie in Faktoren!

$ac + bc - ad - bd$

**Lösung:**

$ac + bc - ad - bd = c(a + b) - d(a + b) = (a + b)(c - d)$

**Aufgaben** ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

▸ 11. a) $pr + qr + ps + qs$ b) $ax - bx + ay - by$ c) $px - qx - py + qy$

▸ 12. a) $3ac + 6bc + ad + 2bd$ b) $a^3 + ab - 2a^2 - 2b$ c) $12px - 8qx - 3py + 2qy$

### 5.4.3 Faktorisieren mittels binomischer Formeln

Im Abschnitt 5.3.3 hatten wir uns häufig auftretende binomische Formeln eingeprägt, um den etwas umständlichen Rechenaufwand des ausführlichen Ausmultiplizierens in diesen Fällen zu sparen. Die umgekehrte Anwendung der binomischen Formeln erlaubt es nun, entsprechende Ausdrücke in Faktoren zu zerlegen, die ihrerseits selbst Klammerausdrücke sind.

**Beispiel mit Lösung**

**Aufgabe:** Zerlegen Sie $16a^2-9b^2$ in Faktoren!

**Lösung:** Wir zerlegen $16a^2$ in $4a \cdot 4a$ und $9b^2$ in $3b \cdot 3b$ und schreiben entsprechend der Formel $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$:

$16a^2-9b^2 = (4a+3b)(4a-3b)$ Vergessen Sie die Probe nicht!

**Aufgaben** ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

| | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $a^2-25$ | $m^2-1$ | $1-p^2$ | $q^2-16$ | $4-x^2$ |
| **2.** | $9a^2-4b^2$ | $25m^2-36n^2$ | $49p^2-81q^2$ | $100x^2-121y^2$ | $144y^2-169z^2$ |
| **3.** | $16a^2-49b^2$ | $64p^2-25q^2$ | $u^2v^2-1$ | $1-4u^2v^2$ | $x^2-y^2z^2$ |
| ▸ **4.** | $a^2-a^4$ | $9b^4-4b^2$ | $36p^2-49p^4$ | $16q^4-25q^2$ | $x^4y^4-z^4$ |

**Beispiel mit Lösung**

**Aufgabe:** Zerlegen Sie $25a^2-40ab+16b^2$ in Faktoren!

**Lösung:** Wir zerlegen $25a^2$ in $5a \cdot 5a$ und $16b^2$ in $4b \cdot 4b$ und stellen durch Probe fest, ob wir bei Anwendung der Formel $(a-b)^2$ den mittleren Term $-40ab$ erhalten:

$25a^2-40ab+16b^2 = (5a-4b)^2$ Vergessen Sie die Probe nicht!

**Aufgaben** ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| **5.** | $a^2+10a+25$ | $p^2-12p+36$ | $x^2+14x+49$ | $y^2-2y+1$ |
| **6.** | $1+4a+4a^2$ | $9-24b+16b^2$ | $16+8x+x^2$ | $1-10y+25y^2$ |
| **7.** | $4a^2-4ab+b^2$ | $16p^2+24pq+9q^2$ | $49u^2-70uv+25v^2$ | $81x^2+36xy+4y^2$ |
| **8.** | $9a^4-12a^2+4$ | $25m^4+40m^2+16$ | $p^4-6p^2q^2+9q^4$ | $36x^4+84x^2y^2+49y^4$ |
| ▸ **9.** | $16a^2+1-8a$ | $25p^2+1+10p$ | $64u^2+25v^2-80uv$ | $16x^2+81y^2+72xy$ |

Ändert man die erste binomische Formel ein wenig ab und prägt man sich die dann dafür geltenden Gesetzmäßigkeiten ein, so gelingt damit das Faktorisieren noch weiterer Arten von Summen und Differenzen.

**Beispiele mit Lösungen**

**Aufgaben:** Bringen Sie die folgenden Summen auf die Form $(x+a)(x+b)$, d. h. stellen Sie als Produkt dar!

1. $x^2+4x+3$ 2. $x^2-6x-7$ 3. $x^2-5x+6$ 4. $x^2+4x-12$

**Aufgaben** ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| **10.** | $a^2+8a+15$ | $p^2+9p+18$ | $x^2+7x+6$ | $y^2+5y+4$ |
| **11.** | $b^2-7b+10$ | $m^2-10m+16$ | $q^2-11q+10$ | $z^2-3z+2$ |
| **12.** | $a^2+2a-8$ | $p^2+6p-16$ | $x^2+x-12$ | $y^2+5y-36$ |
| **13.** | $b^2-2b-24$ | $n^2-n-20$ | $q^2-8q-9$ | $z^2-11z-12$ |
| ▸ **14.** | $a^2+5ab+6b^2$ | $p^2-7pq+12q^2$ | $m^2+5mn-24n^2$ | $x^2-xy-6y^2$ |
| ▸ **15.** | $8a^2+6ab+b^2$ | $14m^2-9mn+n^2$ | $7p^2+8pq+q^2$ | $9x^2-10xy+y^2$ |