9.7 Extremwertaufgaben

Für viele Anwendungsgebiete der Mathematik ist die Berechnung von größten und kleinsten Funktionswerten besonders wichtig. Kann die Bestimmung der Extremwerte auf differenzierbare Funktionen zurückgeführt werden, so sind die im vorigen Abschnitt behandelten Kriterien anwendbar.
In den folgenden Beispielen handelt es sich darum, für eine gegebene Funktion die absoluten Extrema in einem bestimmten Intervall zu berechnen. Doch diese absoluten Extrema sind in den meisten Fällen zugleich lokale Extrema.
In besonderen Fällen, z.B. bei abgeschlossenen Intervallen, müssen dann die berechneten lokalen Extrema noch mit den Funktionswerten an den Intervallenden verglichen werden.

Beispiel:
Die Zahl 100 soll derart in Summanden zerlegt werden, daß die Summe der Quadrate der beiden Summanden möglichst klein wird.

Lösung:
x: erster Summand
z: zweiter Summand
y: Summe

$$y = x^2 + z^2 \quad \textit{Funktionsgleichung}$$
$$\wedge\; x + z = 100 \quad \textit{Nebenbedingung}$$
$$z = 100 - x$$

Nach Bezeichnung der Variablen wird aus diesen entsprechend dem Text eine Funktionsgleichung gebildet und der durch die Aufgabenstellung bedingte Zusammenhang der Variablen x und z durch eine Gleichung erfaßt, die man als **Nebenbedingung** bezeichnet.

$$y = x^2 + (100 - x)^2$$
$$f(x) = 2x^2 - 200x + 10000$$
$$f'(x) = 4x - 200$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 200 = 0$$
$$\underline{\underline{x = 50}}$$

Das Auflösen der Nebenbedingung nach z erlaubt das Eliminieren dieser Variablen in der Funktionsgleichung, so daß jetzt die Extremstellen der Funktion

$$x \longmapsto 2x^2 - 200x + 10000$$

bestimmt werden können.

$$f''(x) = 4 > 0$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 50}} \quad \textit{ist Minimalstelle}$$

Bei einer Zerlegung der Zahl 100 in die Summanden 50 + 50 wird die Summe der Quadrate der Summanden am kleinsten und beträgt 5000.

$$z = 100 - x;\; x = 50$$
$$z = 100 - 50 = \underline{\underline{50}}$$
$$y = x^2 + z^2$$
$$y = 50^2 + 50^2 = \underline{\underline{5000}}$$

Zur Lösung von Extremwertaufgaben empfiehlt sich folgende Vorgehensweise:

1. *Bezeichnung der Variablen*
2. *Aufstellen der Funktionsgleichung*
3. *Aufstellen der Nebenbedingungen*
4. *Auflösen der Nebenbedingungsgleichungen nach Variablen. Nach welchen Variablen die Nebenbedingungsgleichungen aufgelöst werden ist beliebig. Man sollte deshalb nach solchen Variablen auflösen, die den Aufwand für die weiteren Untersuchungen – vor allem bei den Differentiationen – möglichst gering halten*
5. *Einsetzen dieser Variablen in die Funktionsgleichung, so daß eine Funktionsgleichung der Form $y = f(x)$ entsteht*
6. *Untersuchung der Funktion auf Extremwerte*
7. *Falls zur Lösung erforderlich: Berechnung der eingesetzten Variablen*

Beispiel:

In die kegelförmige Spitze eines Turmes soll ein zylindrischer Wasserbehälter mit möglichst großem Volumen eingebaut werden.
Wie müssen die Maße des Behälters bei gegebenem Volumen V_2 gewählt werden? Wieviel Prozent des Turmvolumens werden ausgenutzt?

Lösung:

d_2: gegebener Durchmesser

d_1: gesuchter Durchmesser

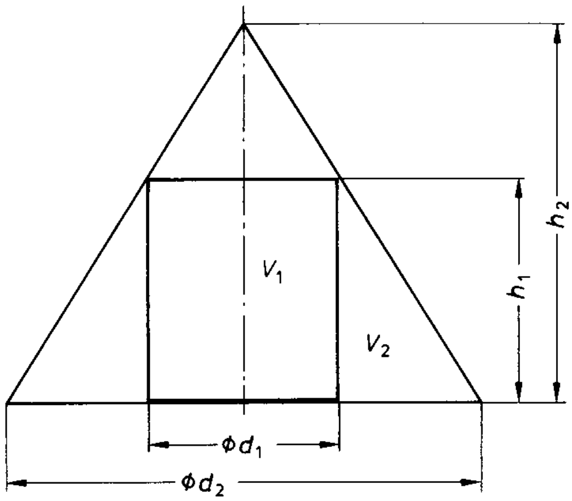
h_2: gegebene Höhe

h_1: gesuchte Höhe

V_2: gegebenes Volumen

V_1: gesuchtes Volumen

$0 \leq d_1 \leq d_2$



Funktionsgleichung:

$$V_1(d_1) = \tfrac{1}{4} d_1^2 \cdot \pi \cdot h_1$$

Mit Hilfe des Strahlensatzes erhält man die Nebenbedingung.

$$\frac{h_2}{d_2} = \frac{h_2 - h_1}{d_1} \Rightarrow h_1 = h_2 \left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right)$$

$$V_1(d_1) = \frac{h_2 \cdot \pi}{4} \left(d_1^2 - \frac{d_1^3}{d_2}\right)$$

Durch Weglassen der Konstanten $\frac{1}{4} \cdot h_2 \cdot \pi$ wird die Funktion $d_1 \longmapsto V_1^*(d_1)$ betrachtet. (Konstante werden beim Ableiten vernachlässigt, weil sie die Lage der Extremstelle nicht verändern.)

$$V_1^*(d_1) = d_1^2 - \frac{d_1^3}{d_2}$$

$$V_1^{*\prime}(d_1) = 2 \cdot d_1 - 3 \cdot \frac{d_1^2}{d_2} \blacktriangleright V_1^{*\prime}(d_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = d_1 \left(2 - 3 \cdot \frac{d_1}{d_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = 0 \vee d_1 = \tfrac{2}{3} d_2$$

$d_1 = 0$ ist hier sinnlos.

Da die zweite Ableitung für $d_1 = \frac{2}{3}d_2$ negativ wird, ist d_1 eine Maximalstelle. Es ist rechnerisch und anschaulich klar, daß es an den Rändern ($d_1 = 0$ bzw. $d_1 = d_2$) kein absolutes Maximum gibt.

$$V_1^{*\prime\prime}(d_1) = 2 - 6\frac{d_1}{d_2}; \quad d_1 = \tfrac{2}{3}d_2$$

$$\Rightarrow \; V_1^{*\prime\prime}(d_1) = 2 - 4 = -2$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = \tfrac{2}{3}d_2 \quad \textit{ist Maximalstelle}$$

Die Maße des Wasserbehälters müssen also zu $d_1 = \frac{2}{3}d_2$ und $h_1 = \frac{1}{3}h_2$ gewählt werden um das größtmögliche Volumen $V_1 = \frac{1}{27}d_2^2 \cdot \pi \cdot h_2$ zu erreichen.

$$h_1 = h_2\left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right) \Rightarrow \underline{\underline{h_1 = \tfrac{1}{3} \cdot h_2}}$$

$$V_1 = \frac{h_2 \cdot \pi}{4}\left(d_1^2 - \frac{d_1^3}{d_2}\right) \quad \textit{mit } d_1 = \tfrac{2}{3}d_2$$

$$\Rightarrow V_{1_{max}} = \frac{4 \cdot d_2^2 \cdot \pi \cdot h_2}{9 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V_{1_{max}} = \frac{d_2^2 \cdot \pi \cdot h_2}{27}}}$$

Die Ausnutzung des Turmes in Prozent ergibt sich aus der Proportion:

$$\frac{V_{1_{max}}}{V_2} = \frac{p}{100}$$

$$\frac{V_{1_{max}}}{V_2} = \frac{p}{100}$$

$$p = \frac{100 \cdot V_{1_{max}}}{V_2}$$

$$p = \frac{100 \cdot d_2^2 \pi \cdot h_2 \cdot 12}{27 \cdot d_2^2 \cdot \pi \cdot h_2}$$

$$p = = \frac{400}{9}$$

$$\underline{\underline{p = 44{,}4\,\%}}$$

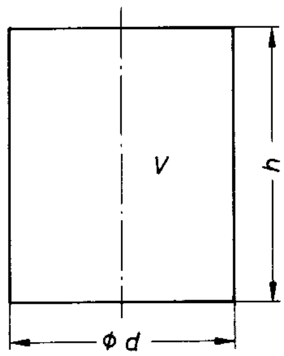
Die Ausnutzung des Turmvolumens beträgt 44,4 %.

Beispiel:

Wie müssen sich bei einer zylindrischen Konservendose (mit Deckel) Höhe zum Durchmesser verhalten, damit bei gegebenem Volumen möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Lösung:

Der geringste Blechbedarf liegt dann vor, wenn die Oberfläche A der Dose (Mantel und zwei Kreisflächen) ein Minimum wird.



Funktionsgleichung:

$$A(d) = 2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} + d \cdot \pi \cdot h$$

Nebenbedingung:

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot h}{4} \Rightarrow h = \frac{4V}{d^2 \cdot \pi}$$

$$A(d) = \frac{d^2 \cdot \pi}{2} + \frac{4 \cdot V}{d}$$

Mit Hilfe der Nebenbedingung können wir in der Funktionsgleichung die Höhe h ersetzen. Die Nullstelle der ersten Ableitung führt zu einer Extremstelle.

$$A'(d) = d \cdot \pi - \frac{4 \cdot V}{d^2} \blacktriangleright A'(d) = 0$$

$$0 = d \cdot \pi - \frac{4 \cdot V}{d^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}}}}$$

Wegen $A''(d) > 0$ ist

$d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ Minimalstelle.

Auch hier ist klar, daß an den Rändern kein absolutes Minimum liegt.

$$A''(d) = \pi + \frac{8 \cdot V}{d^3} > 0 \quad \textit{für } d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

$$\underline{\underline{h = \frac{4V}{d^2 \pi}}} \blacktriangleright d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \quad \textit{einsetzen}$$

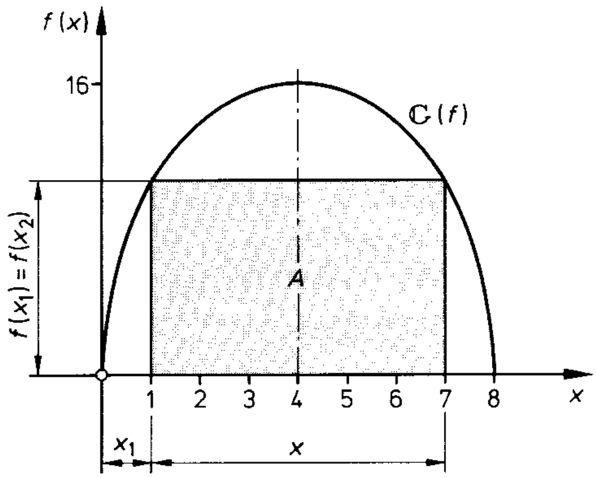
$$h = \frac{4V \cdot \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}$$

$$= \frac{4V \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}{\frac{\pi 4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = d \Rightarrow \underline{\underline{h = d}}$$

Der geringste Blechverbrauch liegt dann vor, wenn man Durchmesser und Höhe der Konservendose gleich groß macht.

Beispiel:

Bestimmen Sie das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt A, das zwischen der positiven x-Achse und der Funktion $f\colon x \longmapsto 8x - x^2$ liegt.



Lösung:

- Wir bezeichnen:
  A Flächeninhalt des Rechtecks
  x Breite des Rechtecks $\triangleq$ 1. Seite
  h Höhe des Rechtecks $\triangleq$ 2. Seite
  h läßt sich durch Funktionswerte von f ausdrücken. Wir erhalten für die Fläche:

$$\begin{aligned} h &= f(x_1) = f(x_1 + x) = f(x_2) \\ A &= h \cdot x \\ &= f(x_1) \cdot x \\ &= (8x_1 - x_1^2)x \end{aligned}$$

- Nebenbedingung:

  $2x_1 + x = 8$

  Wir erhalten für die Fläche A:

$$2x_1 + x = 8$$
$$\Rightarrow x = 8 - 2x_1$$
$$A = (8x_1 - x_1^2)(8 - 2x_1)$$
$$A = 2x_1^3 - 24x_1^2 + 64x_1$$

- Wir suchen nun ein absolutes Maximum der Funktion $A\colon x_1 \longmapsto A(x_1)$ (x_1 ist hier nun Variable). Die Einschränkung des Definitionsbereiches ergibt sich aus der Bedeutung von x_1 als Länge einer Strecke. Anschaulich ist bereits klar, daß die gesuchte Maximalstelle irgendwo innerhalb von $(0, 4)$ liegen muß und eine lokale Maximalstelle ist.

$$A\colon x_1 \longmapsto A(x_1) = 2x_1^3 - 24x_1^2 + 64x_1$$
$$0 < x_1 < 4$$
$$A(0) = A(4) = 0$$

- Bilden der Ableitung A' und Berechnen einer Nullstelle x_{10}. $x_{10} \doteq 6{,}31$ liegt nicht im Definitionsbereich.

$$A'(x_1) = 6x_1^2 - 48x_1 + 64$$
$$0 = 6x_1^2 - 48x_1 + 64$$
$$0 = x_1^2 - 8x_1 + 10\tfrac{2}{3}$$
$$x_{10} = 6{,}31 \vee x_{10} = 1{,}69$$

- Bilden der zweiten Ableitung A'' und Prüfung von $A''(x_{10})$.
  Also: $x_{10} = 1{,}69$ ist Maximalstelle.

$$A''(x_1) = 12x_1 - 48$$
$$A''(1{,}69) = -27{,}72 < 0$$

- Berechnung von x, h und A.

$$x = 8 - 2x_1$$
$$x = 8 - 2 \cdot 1{,}69 = \underline{\underline{4{,}62}}$$
$$h = f(x_1) = 8 \cdot 1{,}69 - 1{,}69^2$$
$$= \underline{\underline{10{,}66}}$$
$$A = h \cdot x = 10{,}66 \cdot 4{,}62$$
$$= \underline{\underline{49{,}25}}$$

Beispiel:

Eine Zulieferfirma in der Industrie berechnet die Gesamtkosten K für die Herstellung einer Maschine nach der Gesamtkostengleichung

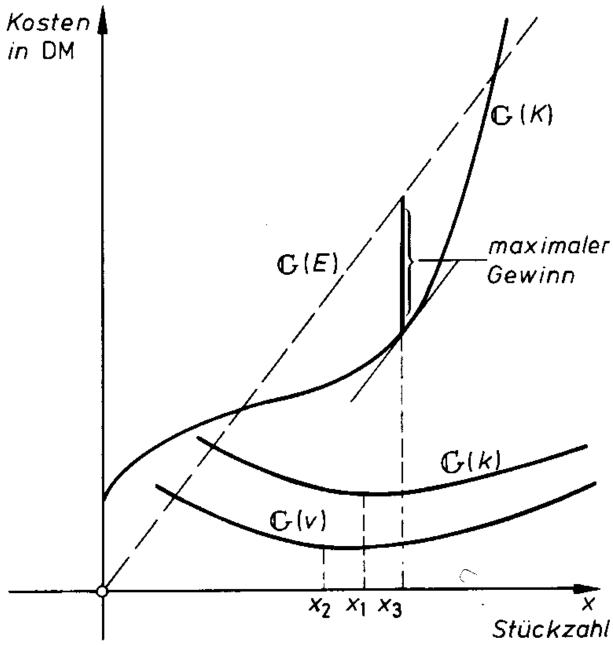
$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 25.$$

x steht für die Stückzahl, die fixen Kosten betragen 25. Die variablen Kosten V lassen sich also berechnen nach

$$V(x) = x^3 - 9x^2 + 40x.$$

Als Erlös E (Verkaufspreis) erzielt man

$$E(x) = 40x$$



$K(x)$	*Gesamtkosten*
$V(x)$	*variable Gesamtkosten*
$k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$	*Stückkosten*
$v(x) = \dfrac{V(x)}{x}$	*variable Stückkosten*
$E(x)$	*Erlös*

a) Berechnen Sie die Stückzahl x_1, für die die Stückkosten $k(x)$ minimal sind.

b) Berechnen Sie die Stückzahl x_2, für die die variablen Stückkosten $v(x)$ minimal sind.

c) Für welche Stückzahl x_3 liegt ein maximaler Gewinn vor?

Lösung:

a) Wir stellen die Stückkostenfunktion k auf und bilden die erste Ableitung k'.

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^3 - 9x^2 + 40x + 25}{x} = x^2 - 9x + 40 + \frac{25}{x}$$

$$k'(x) = 2x - 9 - \frac{25}{x^2}$$

$$0 = 2x - 9 - \frac{25}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x^3 - 9x^2 - 25$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Durch Probieren finden wir die Nullstelle $x_{01} = 5$ von k'. Wir dividieren durch $(x - 5)$ und erhalten $(2x^3 - 9x^2 - 25):(x-5) = 2x^2 + x + 5$. $2x^2 + x + 5 = 0$ liefert keine weitere Lösung. Die Berechnung von $k''(x_{01})$ zeigt, daß x_{01} Minimalstelle ist. Also liegen die Stückkosten für $x_1 = \underline{\underline{5}}$ Maschinen am niedrigsten.

$$k''(x) = 2 + \frac{50}{x^3}$$

$$k''(5) = 2{,}4 > 0 \quad \textit{Minimum}$$

b) Wir stellen die Funktion v der variablen Stückkosten auf und kürzen durch x; dies ist möglich, da $0 \notin D(v)$. Wir bilden die Ableitung v' und erhalten als (einzige) Nullstelle $x_{02} = 4{,}5$. Sie ist wegen $v''(x) > 2$ Minimalstelle. Die variablen Stückkosten liegen für $x_2 = \underline{\underline{4{,}5}}$ Maschinen am niedrigsten.

$$v(x) = \frac{V(x)}{x} = \frac{x^3 - 9x^2 + 40x}{x} = x^2 - 9x + 40$$

$$v'(x) = 2x - 9$$

$$0 = 2x - 9$$

$$\Leftrightarrow x = 4{,}5$$

$$v''(x) = 2 > 0 \quad \textit{Minimum}$$

c) Wir stellen die Erlösfunktion G auf und ermitteln ihre möglichen Maxima durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung. Man kann dies auch deuten als „Gleichsetzen" der Ableitungen E' und K' (Tangente an $\mathfrak{G}(K)$ parallel zu $\mathfrak{G}(E)$). Durch Prüfen der zweiten Ableitung G'' erhalten wir: Der Gewinn ist am größten für $x_3 = \underline{\underline{6}}$ Maschinen (die Lösung $x = 0$ ist ökonomisch sinnlos!).

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G'(x) = E'(x) - K'(x)$$

$$G'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$$

$$\Leftrightarrow 40 = 3x^2 - 18x + 40$$

$$\Leftrightarrow 0 = x(x - 6)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

$$G''(6) = -6x + 18 = -18$$

$$G''(6) < 0 \quad \textit{Maximum}$$

Extremwertaufgaben

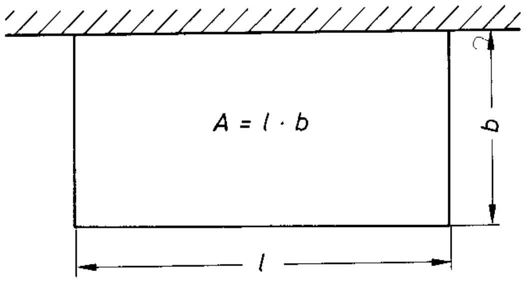
1. Die Zahl 500 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß das Produkt dieser Summanden möglichst groß wird.

2. Aus einem 4,80 m langen Stück Winkeleisen soll das Kantengerüst für ein Aquarium hergestellt werden. Die Kanten der Bodenfläche sollen im Verhältnis 2 : 3 stehen. Welche Abmessungen muß das Aquarium haben, damit sein Volumen möglichst groß wird?

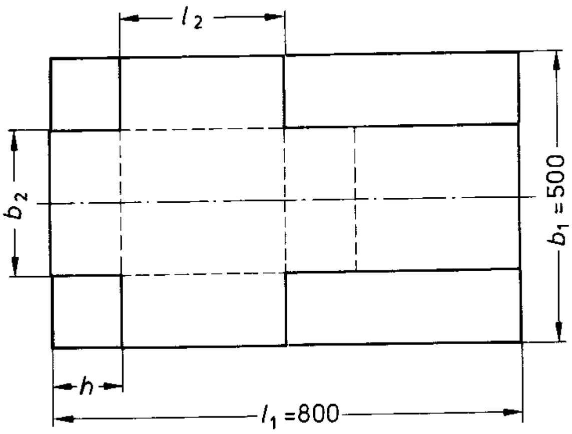
3. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand zwischen den Graphen der Funktionen:
$f_1 \colon x \longmapsto x^2 + 1$ und $f_2 \colon x \longmapsto x - 1$.

4. Beschreiben Sie einem gleichschenkeligen Dreieck von 10 cm Schenkellänge und der Höhe $h = 6$ cm das größtmögliche Rechteck ein.

5. Eine Fläche, die an einer Seite durch eine Mauer abgegrenzt ist, soll an den anderen drei Seiten so mit einem 40 m langen Zaun umgeben werden, daß ihr Inhalt möglichst groß wird.



6. Aus Blechtafeln 500 mm × 800 mm sollen durch Ausschneiden, Biegen und Schweißen nach Skizze allseitig geschlossene quaderförmige Kanister mit möglichst großem Volumen hergestellt werden. Es sind Maße und Volumen des Quaders zu berechnen.



7. Einer quadratischen Pyramide soll ein Quader so einbeschrieben werden, daß sein Volumen ein Maximum wird.

3. Beispiel:

Man kann die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels in eine Ebene abwickeln und erhält einen Kreissektor (vgl. Kratz-Wörle, Geometrie II, § 12 B). Bei welchem Mittelpunktswinkel des entstehenden Kreissektors hat das Kegelvolumen bei gegebener Mantellinie m einen Extremwert?

Lösung:

Für das Kegelvolumen erhalten wir wegen

$h = \sqrt{m^2 - y^2}$ (Abb. 71): $V = \frac{1}{3} y^2 \pi \sqrt{m^2 - y^2}$.

Ist x das Bogenmaß von φ, so gilt:

$$x m = 2 \pi y \Rightarrow y = \frac{x \cdot m}{2\pi}.$$

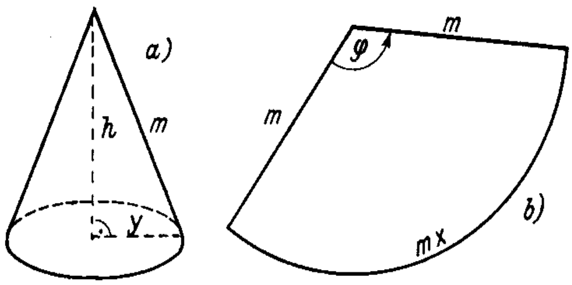


Abb. 71

Eingesetzt in den Rechenausdruck für V ergibt sich:

$$V = \frac{x^2 m^2}{12\pi} \sqrt{m^2 - \frac{x^2 m^2}{4\pi^2}} = \frac{m^3}{24\pi^3} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Wie im 1. Beispiel gilt: $V_1 < V_2 \Leftrightarrow V_1^2 < V_2^2$. Wir brauchen daher nur das Maximum von V^2 bzw. der Funktion

$F(x) = x^4 (4\pi^2 - x^2) = 4\pi^2 x^4 - x^6$ (Abb. 72)

zu bestimmen. $\mathfrak{D} = \{ x \mid 0 \leqq x \leqq 2\pi \}$. Die Nullstellen der Ableitung

$$F'(x) = 2x^3 (8\pi^2 - 3x^2)$$

sind

$$x_1 = 0, \; x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{8}{3}} \pi.$$

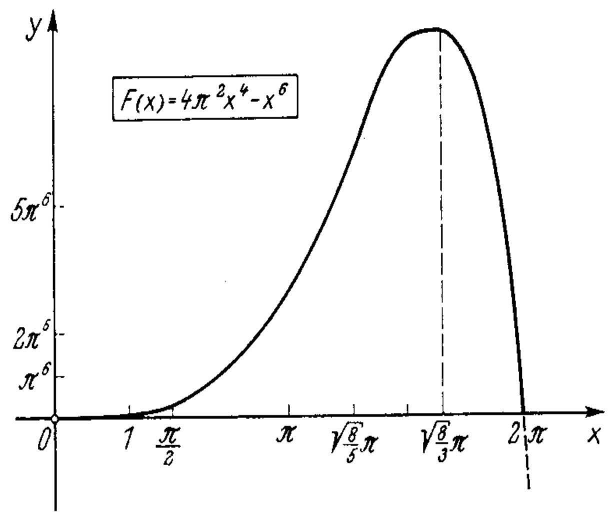


Abb. 72

Wir wollen nun die Prüfung der Extremwerte einmal *ohne* die 2. Ableitung vornehmen. x_3 gehört nicht zur Definitionsmenge.

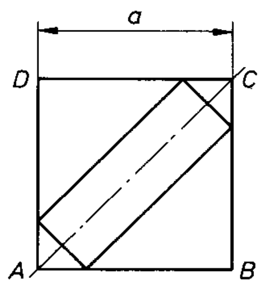
Für $x_1 = 0$ ist $F(x) = 0$. Da das Volumen eine nicht negative Zahl ist, handelt es sich hierbei um ein Minimum der Funktion. Ein 2. Randminimum liegt bei $x = 2\pi$, da auch hier eine Nullstelle der Funktion vorliegt. Allerdings ist in diesem Fall die 1. Ableitung von Null verschieden.

Da $F(x)$ im betrachteten Intervall stetig und im Innern desselben überall positiv ist, nimmt sie in $0 < x < 2\pi$ nach dem Extremwertsatz für stetige Funktionen (§ 10 B 3) sicher ein Maximum an. Dieses kann wegen der Differenzierbarkeit von $F(x)$ nur an der Stelle $x_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \pi = 5{,}130$ liegen. Daraus folgt:

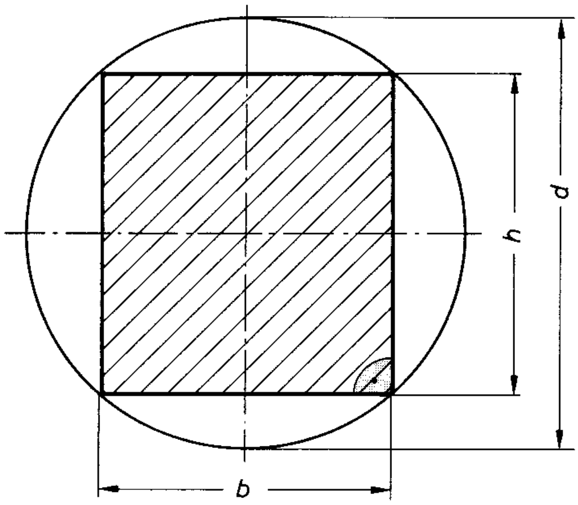
$$V_{\max} = \frac{2\pi}{27} m^3 \sqrt{3}$$

Bei der Umrechnung von x ins Gradmaß ergibt sich aus $5{,}130 = 6{,}283 - 1{,}153$ nach TW S. 16: $\varphi = 360° - 66{,}1° = 293{,}9°$ als zugehöriger Mittelpunktswinkel.

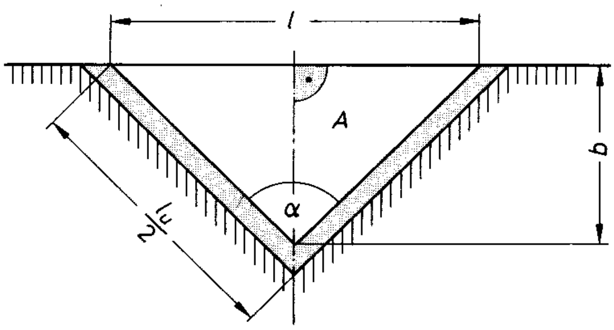
8. Einem Quadrat mit der Seite $a = 10\,\text{cm}$ ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt (diagonal angeordnet) einzubeschreiben.



9. Aus einem runden Baumstamm vom Durchmesser d ist ein rechteckiger Balken von größter Tragfähigkeit T zu schneiden. Es gilt: $T = \frac{b \cdot h^2}{6}$. Geben Sie b und h in Abhängigkeit von d an.



10. Ein Bewässerungskanal mit dreieckigem Querschnitt soll stündlich $28\,800\,\text{m}^3$ Wasser bei einer Strömungsgeschwindigkeit von $3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ befördern. Wie müssen die Maße gewählt werden, damit die benetzte Fläche d.h. der Betonverbrauch möglichst klein wird?



11. Ein Fenster hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit bei gegebenem Umfang U die Fläche möglichst groß wird?

12. Die Graphen der Funktionen $f_1\colon x \mapsto x$ und $f_2\colon x \mapsto 3 - \frac{x}{2}$ schneiden sich im ersten Quadranten. Berechnen Sie das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt, das zwischen den Graphen der Funktionen und der x-Achse liegt.

13. Beschreiben Sie dem Flächenstück, das zwischen den Graphen der Funktionen $f_1\colon x \mapsto \sqrt{x+2}$ und $f_2\colon x \mapsto 2 - \frac{x}{2}$ und der positiven x-Achse liegt, ein Rechteck größten Inhalts bzw. größten Umfangs ein.

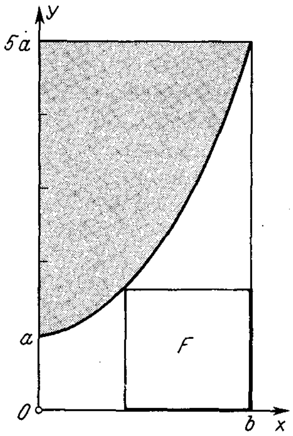


Abb. 76

16. Aus einer rechteckigen Glasscheibe mit der Länge $5a$ und der Breite b ist das in der nebenstehenden Abbildung gerasterte Flächenstück herausgebrochen. Der Rand dieses Bruchstückes stellt das Bild einer ganzen rationalen Funktion 2. Grades dar, die für $x = 0$ eine waagrechte Tangente hat und im übrigen die aus Abb. 76 ersichtlichen Eigenschaften aufweist.

   a) Wie lautet die Gleichung dieser Funktion bezüglich des angegebenen Koordinatensystems?

   b) Aus dem restlichen Glasstück soll eine rechteckige Fläche F herausgeschnitten werden. In welchen Fällen wird die Fläche am größten?

   c) Löse die gleiche Aufgabe für eine Glasscheibe der Länge $2a$ und der Breite b. Für $x = 0$ sei wieder $y = a$.

Aufgaben:

1. Eine gegebene Strecke ist so zu teilen, daß das aus den Teilstücken gebildete Rechteck maximale Fläche erhält.

2. Man bilde aus einer Strecke so zwei Abschnitte, daß gilt: addiert man das aus den Abschnitten gebildete Rechteck zu den Quadraten der Abschnitte, so soll die Gesamtfläche möglichst klein werden.

3. In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck (etwa $c = 12$, $h = 16$ cm) ist
   a) das maximale Rechteck einzuzeichnen, dessen eine Seite auf der Basisseite c liegt
   b) das maximale Parallelogramm einzutragen, von dem ein Winkel mit dem Basiswinkel zusammenfällt.

4. Man beschreibe einem gleichschenkligen Dreieck ein zweites so ein, daß die Spitze des zweiten auf der Grundseite des ersten liegt und sein Inhalt maximal wird.

5. Dem Abschnitt der Parabel $y = 6 - \frac{1}{4}x^2$ oberhalb der x-Achse ist ein Rechteck mit größter Fläche (oder größten Umfangs) einzubeschreiben.

Ergebnisse 1-5

1. $x = \frac{s}{2}$

2. $x = \frac{s}{2}$

3. a) $x = \frac{h}{2}$; $y = \frac{c}{2}$ b) genauso wie a)

4. $x = \frac{h}{2}$; $y = \frac{b}{2}$

5. $A_{max} = 16 \cdot \sqrt{2}$ [$U_{max} = 20$]