4.6. Exponential- und Logarithmusfunktion

4.6.1. Die allgemeine Exponentialfunktion

Nach den Ausführungen über Potenzen kann man bei gegebenen festen $a \in \mathbb{R}^+$ jedem $x \in \mathbb{R}$ die Potenz a^x zuordnen. Dabei entsteht eine Funktion, deren Variable x im Exponenten steht.

Definition:
Die Funktion $x \mapsto a^x$ heißt Exponentialfunktion.

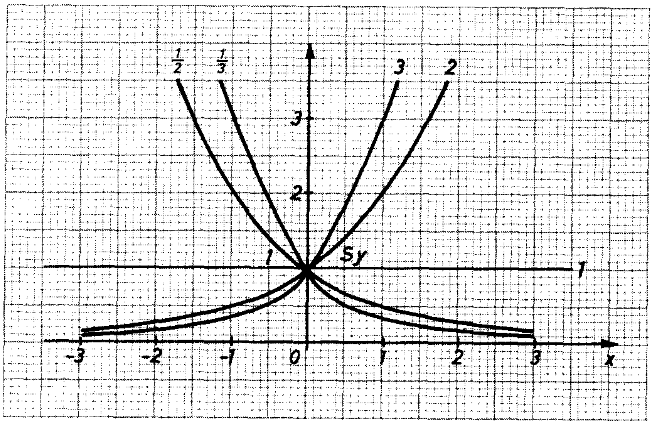


Abb. 4.66. $x \mapsto a^x$ für $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, 2, 3$

Die Exponentialfunktion $y = a^x$ hat die Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und den Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{R}$, falls $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Für $a = 1$ ergibt sich $\mathbb{W} = \{1\}$.

Erläuterungen zum Kurvenverlauf:

1. Die Exponentialfunktion $y = a^x$ ist für $0 < a < 1$ streng monoton fallend, für $a = 1$ konstant und für $a > 1$ streng monoton steigend.

   Es gilt:
   Für $a > 1$ und $x_1 < x_2$ ist $a^{x_1} < a^{x_2}$, z. B. $3^3 < 3^4$.
   Für $0 < a < 1$ und $x_1 < x_2$ ist $a^{x_1} > a^{x_2}$, z. B. $(\frac{1}{3})^3 > (\frac{1}{3})^4$.
   Für $a = 1$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ $y = 1$.

2. Alle Kurven mit der Gleichung $y = a^x \wedge a > 0$ schneiden die y-Achse im Punkte $S_y = (0|1)$.

3. Die Kurven $y = a^x$ und $y = (\frac{1}{a})^x$ gehen durch Spiegelung an der y-Achse auseinander hervor.

   Es gilt: $y = (\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$ entsteht aus $y = a^x$ durch Vertauschen von $+x$ und $-x$.

4. Für $a > 1$ nähern sich die Kurven $y = a^x$ asymptotisch der negativen x-Achse, für $0 < a < 1$ der positiven x-Achse.

4.6.2. Die e-Funktion

Viele Vorgänge in Physik und Technik verlaufen nach einer speziellen Exponentialfunktion. Sie hat die Gleichung

$$y = e^x.$$

$e = 2{,}71\ldots$ ist die Eulersche Zahl*).

Wertetafel:

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	1	e	7,4	20	0,37	0,14	0,05

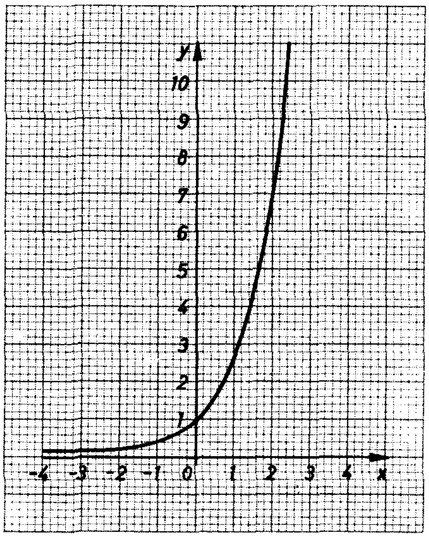


Abb. 4.67. $x \mapsto e^x$

Die Ladung und Entladung eines Kondensators, der radioaktive Zerfall oder die stetige Verzinsung verlaufen nach einer e-Funktion, die dann mit anderen Funktionen überlagert ist. Von Bedeutung sind vor allem 2 Typen.

1. $y = k \cdot e^{-x}$

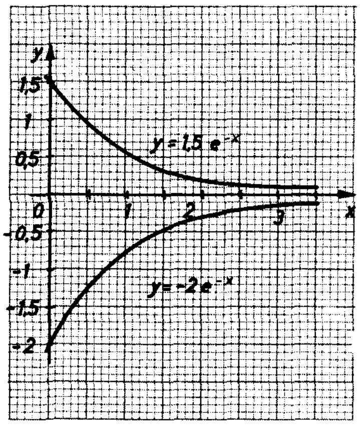


Abb. 4.68. $x \mapsto ke^{-x}$

*) Diese Zahl wurde schon unter dem Namen „natürliche Zahl" als Basis der natürlichen Logarithmen erwähnt (siehe 2.4.6.). Sie geht auf Leonhard Euler (1707–1783) zurück. (Eingehende Behandlung siehe 6.2.2.3.)

Definitionsmenge: $D = R$

Bei dem Wertebereich ist eine Fallunterscheidung zu machen:

$W = R^+$, falls $k \in R^+$
$W = R^-$, falls $k \in R^-$

2. $y = k \cdot (1 - e^{-x})$

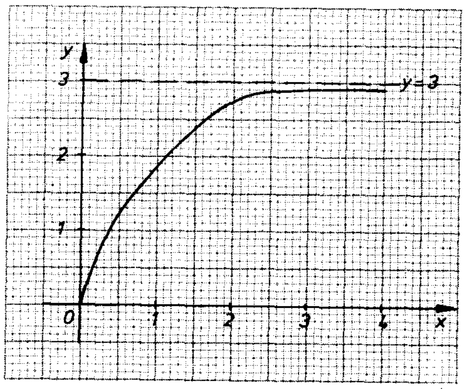


Abb. 4.69. $x \mapsto 3(1 - e^{-x})$

Definitionsmenge: $D = R_0^+$

Für den Wertebereich gilt:

$W = \{y \mid 0 \leqq y < k\}$, falls $k \in R^+$

Aufgaben:

1. Zeichnen Sie die Graphen und bestimmen Sie die Wertebereiche von
a) $y = 2^x$ $D = \{x \mid x > 0\}$ b) $y = e^x$ $D = R$ c) $y = 10^x$ $D = R$

2. Zeigen Sie:
a) Die Funktion $y = 3^x$ ist *streng monoton steigend.*
b) Die Funktion $y = 2^{-x}$ ist streng monoton fallend.

3. Zeichnen Sie den Graph für $y = 5e^{-x}$ $D = R_0^+$.

4. Zeichnen Sie das Schaubild für $y = 4(1 - e^{-x})$ $D = R_0^+$.
Wie groß ist der Wertebereich W?
Wie heißt die Asymptote für x gegen Unendlich?

5. Ein Waldbestand, der auf $2 \cdot 10^6$ Festmeter geschätzt wird, hat eine jährliche Wachstumsrate von 3%.
a) Stellen Sie die funktionelle Abhängigkeit der Anzahl der Festmeter von der Zeit in Gleichung und Graph dar.
b) In wieviel Jahren wächst der Waldbestand auf $3 \cdot 10^6$ Festmeter an?
c) In wieviel Jahren verdoppelt sich der Waldbestand?

6. Ein Kapital von 20000 DM wird zu 5% verzinst.
a) Stellen Sie $K_n = f(n)$ dar, wenn K_0 das Anfangskapital ist, K_n das Kapital nach n Jahren, n die Anzahl der Jahre und p der Zinssatz.
b) Zeichnen Sie den Graphen.
c) Nach wieviel Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

7. Ein Kondensator wird durch eine Batterie mit der Leerlaufspannung U_0 über einen Widerstand R aufgeladen.
a) Stellen Sie den Strom I als Funktion der Zeit t dar: $I = f(t)$, $\tau = C \cdot R$ ist die Zeitkonstante.
b) Zeichnen Sie den Graphen für $U_0 = 10\,V$, $R = 5\,k\Omega$, $C = 1\,\mu F$.
c) Wie groß ist der Anfangswert I_0?
d) Auf wieviel Prozent des Anfangswertes ist der Strom nach $t = \tau$ Sekunden abgesunken?

4.6.3. Die allgemeine Logarithmusfunktion

Da die Exponentialfunktion umkehrbar eindeutig ist, kann man zu ihr die Umkehrfunktion bilden.

$y = a^x$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \wedge \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$ wird zu $x = a^y$ mit $\mathbb{D}^{-1} = \mathbb{R}^+ \wedge \mathbb{W}^{-1} = \mathbb{R}$.

Löst man die letzte Gleichung nach y auf, so erhält man $y = \log_a x$, die **Logarithmusfunktion.**

Definition:
Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$.

Wertetafel:

x	−2	−1	0	0,2	0,5	1	2	3	4	8
2^x	0,25	0,5	1	1,15	1,41	2	4	8	16	256
$\log_2 x$	–	–	–	−2,3	−1	0	1	1,6	2,00	3

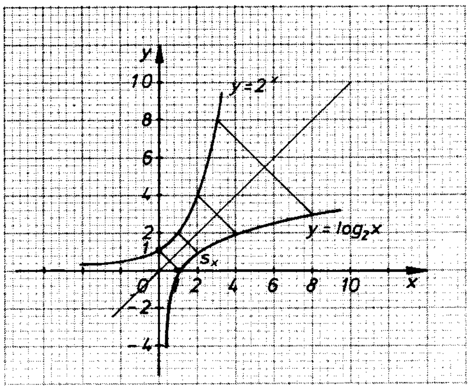


Abb. 4.70. $x \mapsto 2^x$ und $x \mapsto \log_2 x$

Für die Logarithmusfunktion gilt:

1. Der Graph der Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ entsteht durch Spiegelung der Exponentialkurve $y = a^x$ an der Geraden $y = x$.
2. Alle Logarithmuskurven gehen durch den Punkt $S_x(1, 0)$.
3. Die Definitionsmenge von $y = \log_a x$ ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, der Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.

Fallunterscheidung:

$a > 1$:	$\log_a x > 0$	für $x > 1$
	$\log_a x = 0$	für $x = 1$
	$\log_a x < 0$	für $0 < x < 1$
$0 < a < 1$:	$\log_a x > 0$	für $0 < x < 1$
	$\log_a x = 0$	für $x = 1$
	$\log_a x < 0$	für $x > 1$

4. Monotonie
   Ist $a > 1$, so ist $y = \log_a x$ streng monoton steigend.
   Ist $0 < a < 1$, so ist $y = \log_a x$ streng monoton fallend.

Wird bei der Bildung der Exponentialfunktion nach der Potenz gefragt, so heißt bei der Logarithmusfunktion die Zuordnungsvorschrift: Suche zu einer Basis den Exponenten.

Beispiel: $y = a^x$ $\quad$ $y = \log_a x$

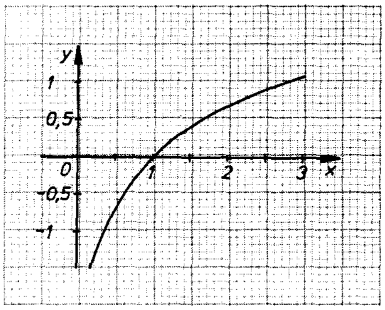
$25 = 5^2$ $\quad$ $2 = \log_5 25$

Das Rechnen mit Potenzen und Logarithmen führt zu Exponentialgleichungen (vgl. 3.8.).

4.6.4. Die Funktion des natürlichen Logarithmus

Die Umkehrung der Exponentialfunktion $y = e^x$ führt zu der in Physik und Technik wichtigen Funktion $y = \ln x$.

Definition:
Die Funktion $y = \log_e x$ heißt $y = \ln x$ ($\ln x$ = logarithmus naturalis x) *).



Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}^+$
Wertebereich: $W = \mathbb{R}$

Abb. 4.71. $x \mapsto \ln x$

Aufgaben:

1. Zeichnen Sie die Schaubilder für
   a) $y = \log_2 x \quad D = \{x \mid x > 0 \land x \leqq 5\}$
   b) $y = \log_e x \quad D = \{x \mid x > 0 \land x < 4\}$
   c) $y = \log_{10} x \quad D = \{x \mid x > 2 \land x < 5\}$
2. Ist die Funktion $y = \log_2 x$ streng monoton fallend? (Beweis)
3. Warum ist die Logarithmusfunktion für $x \leqq 0$ nicht definiert?
4. Zwischen welchen ganzzahligen Werten liegt a) $\log_2 3$, b) $\log_2 4$, c) $\log_e 0{,}5$? (siehe Abb. 4.70. und Abb. 4.71.).
5. Für den Schalldruckpegel L_p in dB gilt der funktionelle Zusammenhang $L_p = 20 \lg \frac{p}{p_0}$, wobei p der Schalldruck und $p_0 = 20\ \mu N m^{-2}$ der Bezugsschalldruck ist. Stellen Sie den Graphen für $L_p = f(p)$ dar.
6. Für das Dämpfungsmaß zweier Leistungen in dB gilt $a_p = 10 \lg \frac{p_1}{p_2}$, für das Dämpfungsmaß zweier Spannungen in dB gilt $a_s = 20 \lg \frac{U_1}{U_2}$. Zeichnen Sie die Graphen für $a_P = f(P_1)$ mit $P_2 = 1$ mW und für $a_s = f(U_1)$ mit $U_2 = 0{,}775$ V.

*) Vgl. 2.4.8.

5. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto \ln(x+1)$.

6. In wieviel Jahren verdreifacht sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 8,5%?

7. Ein Kapital von 6000 DM wird mit 8 % verzinst. Auf welchen Betrag wächst es in sechs Jahren an? Bei welchem Zinssatz verdoppelt es sich in zehn Jahren?

3.8. Exponentialgleichungen

Gleichungen, bei denen die **Variable im Exponenten** steht, heißen Exponentialgleichungen.

Beispiele: 1. $G_1(x)\colon 2^x = 8 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
2. $G_2(x)\colon 6^{x+1} = 3^{2x-1} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$
3. $G_3(x)\colon 10^{\lg x} = 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

In Beispiel 1 gelangt man zur Lösungsmenge, wenn man durch Äquivalenzumformung beiden Seiten der Gleichung dieselbe Basis gibt.

$$2^x = 8$$
$$2^x = 2^3$$
$$x = 3$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$

In Beispiel 2 ist es zweckmäßig, beide Seiten der Gleichung zu logarithmieren. Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Es ist zu beachten, daß nur positive reelle Zahlen logarithmiert werden können.

$$6^{x+1} = 3^{2x-1}$$
$$\lg 6^{x+1} = \lg 3^{2x-1}$$
$$(x+1)\cdot \lg 6 = (2x-1)\cdot \lg 3$$
$$x\cdot \lg 6 + \lg 6 = 2x\cdot \lg 3 - \lg 3$$
$$\lg 6 + \lg 3 = 2x \cdot \lg 3 - x\cdot \lg 6$$
$$\lg 6 + \lg 3 = x(2\cdot \lg 3 - \lg 6)$$
$$x = \frac{\lg 6 + \lg 3}{2\cdot \lg 3 - \lg 6} \approx \frac{0{,}7782 + 0{,}4771}{2\cdot 0{,}4771 - 0{,}7782} \approx 7{,}14$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{7{,}14\}$

In Beispiel 3 benutzt man den Satz, daß sich jede positive reelle Zahl c als Zehnerpotenz schreiben läßt: $c = 10^{\lg c}$.

$$10^{\lg x} = 3$$
$$10^{\lg x} = 10^{\lg 3}$$
$$\lg x = \lg 3$$
$$x = 3$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$

Aufgaben:

1. Gesucht ist die Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

a) $2^x = 32$	e) $4^x - 5 = 0$	i) $10^x = 20^x$
b) $3^x = \frac{1}{81}$	f) $2^x = 10$	k) $5^{x-1} = 7^{2x-1}$
c) $5^x = -25$	g) $\sqrt[x]{10} = 100$	l) $3^{2x+1} = 4^{2x}$
d) $7^x = 26$	h) $3^{\frac{2}{x}} = 25$	m) $3^{\frac{1}{x+1}} = 4^{\frac{1}{2x+1}}$

2. Welche Werte dürfen die Formvariablen a und b annehmen, damit die Gleichung $a^x = b$ lösbar ist, wenn $x \in \mathbb{R}$?

3. Suchen Sie die Lösungsmenge. Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$.

a) $10^{\lg x} = 100$	b) $3^{\lg x} = 3$	c) $10^{\lg x} = 7$

4. Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 1000 DM, das über einen Zeitraum von 12 Jahren zu 4,5% verzinst wird?

5. Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 50000 DM bei einem Zinssatz von 5% auf 100000 DM angewachsen ist?

6. Der Bestand eines Waldes wird auf 40000 Festmeter geschätzt. Pro Jahr vermehrt sich der Bestand um 3,5%. Wieviel Festmeter wird der Wald voraussichtlich in 10 Jahren haben?

7. Ein Element zerfällt nach dem Gesetz $m_t = m_0 e^{-\lambda t}$. Wie groß ist die Halbwertszeit, wenn die Zerfallskonstante $\lambda = 0{,}3\ \mathrm{min}^{-1}$ beträgt?

8. Radium hat eine Halbwertszeit von 1590 Jahren. Wie lange dauert es, bis von 2 g noch 2 mg übrig sind?

9. Die Spannung an einem Kondensator nimmt nach dem Gesetz $U_t = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ zu. Nach 2 s ist die Spannung auf den halben Endwert angestiegen. Wie groß ist die Zeitkonstante τ?

3.8.

1. a) $\mathbb{L} = \{5\}$
b) $\mathbb{L} = \{-4\}$
c) $\mathbb{L} = \emptyset$
d) $\mathbb{L} = \{1{,}67\}$
e) $\mathbb{L} = \{1{,}16\}$
f) $\mathbb{L} = \{3{,}32\}$
g) $\mathbb{L} = \{0{,}5\}$
h) $\mathbb{L} = \{0{,}68\}$
i) $\mathbb{L} = \{0\}$
k) $\mathbb{L} = \{0{,}146\}$
l) $\mathbb{L} = \{1{,}91\}$
m) $\mathbb{L} = \{0{,}34\}$

3. a) $\mathbb{L} = \{100\}$ b) $\mathbb{L} = \{10\}$ c) $\mathbb{L} = \{7\}$

4. $K_n = 1695{,}90$ DM

5. 14,2 Jahre

6. 56424 Festmeter

7. $t_H = 2{,}31$ min

8. $t = 15847{,}18$ a

9. $\tau = 2{,}88$ s

Ergebnisse zu Exponentialgleichungen