5. Folgen und Reihen

5.1. Definition von Folgen und Reihen

5.1.1. Folgen

Bei den Funktionen hatten wir als Grundmenge immer die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gewählt:

$$x \mapsto f(x);\ x \in \mathbb{R}$$

Der Graph dieser Funktionen war eine „Linie" (Abb. 5.1.). Wählen wir als Grundmenge die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, so ist der Graph darstellbar durch eine Anzahl von Punkten (Abb. 5.2.).

$$x \mapsto f(x);\ x \in \mathbb{N}$$

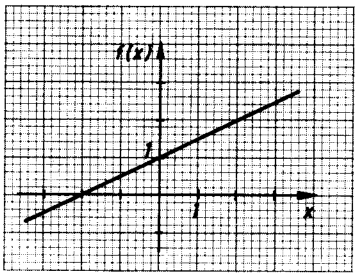

Abb. 5.1. $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1;\ x \in \mathbb{R}$

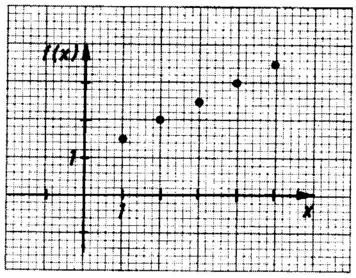

Abb. 5.2. $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1;\ x \in \mathbb{N}$

Die Elemente der Bildmenge können in diesem Fall nacheinander aufgezählt werden. Man erhält eine **Folge** von Zahlen, wenn die Funktionswerte nacheinander genannt werden, beginnend mit der der Zahl 1 zugeordneten Zahl.

Wird als Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gewählt, so erhält man unendlich viele Funktionswerte. Es handelt sich dann um eine **unendliche Folge.**

Beispiel: $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1,\ x \in \mathbb{N}\colon \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$

Wird als Definitionsmenge eine endliche Teilmenge $\mathbb{N}_k$ von $\mathbb{N}$ gewählt ($\mathbb{N}_k = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leqq k\}$), so erhält man endlich viele Funktionswerte. Es handelt sich dann um eine **endliche Folge.**

Beispiel: $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1,\ x \in \mathbb{N}_5\colon \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$

Mit diesen Vorüberlegungen ist es möglich, eine Folge zu definieren.

Definition:
Eine Folge ist eine Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_k = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leqq k\}$:

$$x \mapsto f(x);\quad x \in \mathbb{N} \text{ oder } x \in \mathbb{N}_k;\ f(x) \in \mathbb{R}$$

Bei den Folgen wird eine gegenüber den Funktionen abgewandelte Symbolik eingeführt:

Funktion: $x \mapsto f(x)$
Folge: $n \mapsto a_n$

a_n nennt man **Glied der Folge.** Die Glieder der Folge können nacheinander geschrieben werden:

$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k \rangle$ kurz $\langle a_n \rangle_k$
bei einer endlichen Folge mit k Gliedern

$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \rangle$ kurz $\langle a_n \rangle$
bei einer unendlichen Folge

Beispiele:
F_1: $\langle a_n \rangle_5 = \langle 1; 2; 3; 4; 5 \rangle$
F_2: $\langle a_n \rangle_4 = \langle 2; 6; 18; 54 \rangle$
F_3: $\langle a_n \rangle_7 = \langle 7; 4; 1; -2; -5; -8; -11 \rangle$
F_4: $\langle a_n \rangle = \langle 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots \rangle$
F_5: $\langle a_n \rangle_7 = \langle 1; \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}; \frac{5}{3}; \frac{12}{7}; \frac{7}{4} \rangle$
F_6: $\langle a_n \rangle = \langle 4; 8; 16; 32; 64; 128; \ldots \rangle$
F_7: $\langle a_n \rangle_9 = \langle 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81 \rangle$
F_8: $\langle a_n \rangle_7 = \langle 3; 7; -1; 12; -6; -2; 11 \rangle$
F_9: $\langle a_n \rangle = \langle 1; \pi; e; \sqrt{3}; -4; \sin 23°; \lg 9; \ln 2; \ldots \rangle$

Bei den Folgen F_1, F_2, F_3, F_5, F_7 und F_8 handelt es sich um endliche Folgen, bei den anderen Folgen um unendliche Folgen.

Wenn man sich die Glieder der Folgen F_1 bis F_9 ansieht, kann man bei einigen Folgen leicht angeben, wie die Glieder gebildet wurden. Man könnte also weitere Glieder berechnen. Das heißt, aus den Gliedern dieser Folge läßt sich die Funktionsgleichung ermitteln:

$a_n = f(n); \quad n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_k$

$f(n)$ ist dabei das n-te Glied der Folge.

Definition:
$\langle f(n) \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ heißt das **Bildungsgesetz** der Folge.

Bildungsgesetze zu den angegebenen Beispielen:

F_1: $\langle a_n \rangle_5 = \langle n \rangle_5$
F_2: $\langle a_n \rangle_4 = \langle 2 \cdot 3^{n-1} \rangle_4$
F_3: $\langle a_n \rangle_7 = \langle 7-3 \cdot (n-1) \rangle_7$ oder $\langle 10-3n \rangle_7$
F_4: $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$
F_5: Bei der Folge F_5 ist das Bildungsgesetz nicht so leicht erkennbar. Schreibt man die Glieder der Folge jedoch etwas anders:
$\langle a_n \rangle_7 = \langle \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \frac{12}{7}, \frac{14}{8} \rangle$
so erkennt man schnell:
$\langle a_n \rangle_7 = \langle \frac{2n}{n+1} \rangle_7$
F_6: $\langle a_n \rangle = \langle 2^{n+1} \rangle$ oder $\langle 2 \cdot 2^n \rangle$
F_7: $\langle a_n \rangle_9 = \langle n^2 \rangle_9$

Bei der Folge F_8 ist kein Bildungsgesetz zu erkennen. Grundsätzlich ist es jedoch möglich, bei einer endlichen Folge ein Bildungsgesetz zu konstruieren*).

*) In diesem Fall ließe sich ein Polynom 7. Grades berechnen, das die Glieder der Folge liefert.

Bei der Folge F_9 ist kein Bildungsgesetz konstruierbar. Man könnte allenfalls versuchen, eine Konstruktionsvorschrift für die ersten 8 angegebenen Glieder zu finden. Da es sich jedoch um eine unendliche Folge handelt, ist nicht nachprüfbar, ob diese Konstruktionsvorschrift auch für die weiteren Glieder gilt.

Hier werden wir uns jedoch nur mit Folgen beschäftigen, deren Bildungsgesetz besonders einfach ist und leicht erkannt werden kann.

Aufgaben:

1. Schreiben Sie die Glieder der Folge:

a) $\langle n+1\rangle_5$

b) $\langle 2n\rangle_8$

c) $\langle 2n-1\rangle_8$

d) $\langle 5-4n\rangle_5$

e) $\langle \frac{1}{n+2}\rangle_6$

f) $\langle \frac{2n+1}{3n}\rangle_6$

g) $\langle 2^{n+1}\rangle_6$

h) $\langle 3\cdot 2^{2n-1}\rangle_5$

2. Suchen Sie das Bildungsgesetz der Folge:

a) $\langle 1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ 25\rangle$

b) $\langle 23;\ 20;\ 17;\ 14;\ 11;\ 8;\ 5\rangle$

c) $\langle \frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}\rangle$

d) $\langle \frac{5}{2};\frac{8}{3};\frac{11}{4};\frac{14}{5};\frac{17}{6}\rangle$

e) $\langle 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36\rangle$

f) $\langle 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ 49;\ 64\rangle$

g) $\langle 4;\ 16;\ 36;\ 64;\ 100;\ 144\rangle$

h) $\langle 4;\ 7;\ 12;\ 19;\ 28;\ 39;\ 52\rangle$

i) $\langle 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243\rangle$

k) $\langle \frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\frac{1}{32};\frac{1}{64}\rangle$

3. Wie heißt das n-te Glied der Folge:

a) $\langle 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16;\ 19;\ \ldots\rangle$ $n=12 (n=20,\ n=80)$

b) $\langle -28;\ -26;\ -24;\ -22;\ -20;\ \ldots\rangle$ $n=30 (n=50,\ n=97)$

c) $\langle 55;\ 51;\ 47;\ 43;\ 39;\ 35;\ \ldots\rangle$ $n=40 (n=60,\ n=103)$

d) $\langle \frac{3}{2};\frac{5}{4};\frac{7}{6};\frac{9}{8};\frac{11}{10};\frac{13}{12};\ \ldots\rangle$ $n=25 (n=47,\ n=58)$

e) $\langle \frac{121}{2};\frac{100}{3};\frac{81}{4};\frac{64}{5};\frac{49}{6};\ \ldots\rangle$ $n=12 (n=17,\ n=23)$

f) $\langle 4;\ -8;\ 16;\ -32;\ 64;\ -128;\ \ldots\rangle$ $n=8 (n=9,\ n=10)$

g) $\langle \frac{1}{3};-\frac{1}{5};\frac{1}{7};-\frac{1}{9};\frac{1}{11};-\frac{1}{13};+-\ldots\rangle$ $n=18\ (n=29,\ n=87)$

5.1.2. Reihen

Werden die Glieder einer Folge durch Pluszeichen miteinander verbunden, so spricht man von einer **Reihe.**

Beispiele: $s_5 = 1+2+3+4+5 \Rightarrow s_5 = 15$

$s_7 = 7+4+1+(-2)+(-5)+(-8)+(-11) \Rightarrow s_7 = -14$

allgemein:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Summenwert der Reihe mit k Gliedern}}}{s_k} = \underbrace{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}_{\text{Reihe}}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird eingeführt:

$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$*) $= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$

Damit läßt sich definieren:

Eine Reihe ist eine formal gebildete (unausgerechnete) Summe der Form.

1. $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$ (endliche Reihe)

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ (unendliche Reihe)

Vom Summenwert einer Reihe zu sprechen, ist zunächst nur dann sinnvoll, wenn es sich um endliche Reihen handelt. (Der Summenwert spezieller Reihen wird in 5.2.2. und 5.3. behandelt.)

Beispiele: R_1: $s_5 = \sum_{n=1}^{5} n = 1+2+3+4+5 = 15$

R_2: $s_4 = \sum_{n=1}^{4} (2 \cdot 3^{n-1}) = 2+6+18+54 = 80$

R_3: $s_7 = \sum_{n=1}^{7} (10-3n) = 7+4+1+(-2)+(-5)+(-8)+(-11) = -14$

R_5: $s_7 = \sum_{n=1}^{7} \frac{2n}{n+1} = 1 + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \frac{8}{5} + \frac{5}{3} + \frac{12}{7} + \frac{7}{4} = \frac{1479}{140}$

Werden bei einer Folge $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \rangle$ die Glieder der Reihe nach addiert und die jeweiligen Summenwerte $s_1 = a_1$; $s_2 = a_1 + a_2$; $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $\ldots$; $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$; $\ldots$ als Glieder einer neuen Folge geschrieben, so erhält man $\langle s_n \rangle = \langle s_1; s_2; s_3; \ldots s_n; \ldots \rangle$, die Folge der Teilsummen oder kurz die **Teilsummenfolge FT.** s_n ist dabei die n-te Teilsumme.

Beispiele: F_1: $\langle a_n \rangle_5 = \langle 1; 2; 3; 4; 5 \rangle$
FT_1: $\langle s_n \rangle_5 = \langle 1; 3; 6; 10; 15 \rangle$
F_2: $\langle a_n \rangle_4 = \langle 2; 6; 18; 54 \rangle$
FT_2: $\langle s_n \rangle_4 = \langle 2; 8; 26; 80 \rangle$
F_3: $\langle a_n \rangle_7 = \langle 7; 4; 1; -2; -5; -8; -11 \rangle$
FT_3: $\langle s_n \rangle_7 = \langle 7; 11; 12; 10; 5; -3; -14 \rangle$

Man kann die Teilsummenfolge wieder zurückführen auf die ursprüngliche Folge, die Stammfolge, indem man eine neue Folge bildet von der Form: $\langle s_{n+1} - s_n \rangle$. Dabei wird jedoch mit dem zweiten Glied der Stammfolge begonnen.

Gegeben sei $\langle a_n \rangle = \langle a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots \rangle$,
dann ist $\langle s_n \rangle = \langle a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \ldots \rangle$

$$\langle s_{n+1} - s_n \rangle = \langle a_1 + a_2 - a_1;\ a_1 + a_2 + a_3 - (a_1 + a_2);\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_1 + a_2 + a_3); \ldots \rangle = \langle a_2; a_3; a_4; \ldots \rangle$$

Beispiel: $\langle a_n \rangle_7 = \langle 7; 4; 1; -2; -5; -8; -11 \rangle$
$\langle s_n \rangle_7 = \langle 7; 11; 12; 10; 5; -3; -14 \rangle$
$\langle s_{n+1} - s_n \rangle_6 = \langle 4; 1; -2; -5; -8; -11 \rangle$

---

*) Gelesen: „Summe aller Glieder a_n von $n = 1$ bis k" oder kurz „Summe a_n von $n = 1$ bis k".

Aufgaben:

1. Berechnen Sie den Summenwert der Reihe

a) $\sum_{n=1}^{5}(2n+1)$	d) $\sum_{n=1}^{5} n^2$	g) $\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n}$	k) $\sum_{n=1}^{4}\frac{n+1}{n^2+1}$
b) $\sum_{n=1}^{6}(12-3n)$	e) $\sum_{n=1}^{7}(n-1)^2$	h) $\sum_{n=1}^{6} 2^n$	l) $\sum_{n=1}^{5}(-2)^n$
c) $\sum_{n=1}^{6}(2n-1)$	f) $\sum_{n=1}^{8}(n^2+2)$	i) $\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n+1}$	m) $\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

2. Bilden Sie die Teilsummenfolge der Folgen
a) $\langle 2n-1\rangle_8$ b) $\langle n^2\rangle_8$ c) $\langle(-2)^n\rangle$ d) $\langle 3n^2-3n+1\rangle$

5.2. Arithmetische Folgen und Reihen*)

5.2.1. Die arithmetische Folge (AF)

Die arithmetischen Folgen bilden eine Klasse spezieller Folgen.

Definition:
Eine Folge, die das Bildungsgesetz

$$\langle f(n)\rangle = \langle dn+a\rangle \qquad n\in\mathbb{N};\ d,\ a\in\mathbb{R}$$

hat, heißt **arithmetische Folge** (AF).

Die dabei zugrunde liegende Funktion ist eine ganze rationale Funktion ersten Grades.

Beispiele:

AF_1: $\langle 2n-1\rangle_6 = \langle 1; 3; 5; 7; 9; 11\rangle$

AF_2: $\langle \frac{1}{4}n+10\rangle_5 = \langle \frac{41}{4}; \frac{21}{2}; \frac{43}{4}; 11; \frac{45}{4}\rangle$

AF_3: $\langle -3n+5\rangle_6 = \langle 2; -1; -4; -7; -10; -13\rangle$

AF_4: $\langle -\frac{1}{2}n-2\rangle_5 = \langle -\frac{5}{2}; -3; -\frac{7}{2}; -4; -\frac{9}{2}\rangle$

AF_5: $\langle 0\cdot n+3\rangle_6 = \langle 3; 3; 3; 3; 3; 3\rangle$

AF_6: $\langle 2n+0\rangle = \langle 2; 4; 6; 8; 10; \ldots\rangle$

An Hand dieser Beispiele wollen wir einige Erkenntnisse formulieren:

Bei den Folgen AF_1 und AF_2 sowie AF_6 ist jedes Glied größer als das vorhergehende.

---

*) Es werden nur arithmetische Folgen und Reihen erster Ordnung behandelt. Auf die Behandlung der arithm. Folgen und Reihen höherer Ordnung wird zugunsten einer ausführlichen Behandlung der übrigen unter Kapitel 5 fallenden Themen verzichtet.

Man spricht dann von einer steigenden Folge. Dabei ist immer der Koeffizient d größer als Null:

$d > 0$: steigende Folge.

Bei den Folgen AF_3 und AF_4 ist jedes Glied kleiner als das vorhergehende. Man spricht dann von einer fallenden Folge. Dabei ist immer der Koeffizient d kleiner als Null:

$d < 0$: fallende Folge.

Bei der Folge AF_5 sind alle Glieder gleich. Es handelt sich hier um eine konstante Folge. Dabei ist der Koeffizient d gleich Null:

$d = 0$: konstante Folge.

Die Folgen AF_1 bis AF_5 haben endlich viele Glieder. Es handelt sich hier um **endliche Folgen.**

Die Folge AF_6 hat unendlich viele Glieder. Es handelt sich hier um eine **unendliche Folge.**

Wir behandeln hier nur endliche arithmetische Folgen.

Um die AF zu untersuchen, betrachten wir zwei aufeinander folgende Glieder. An den Beispielen können wir errechnen, daß bei einer AF die Differenz zwischen einem Glied und dem vorhergehenden immer konstant ist. Allgemein:

$$a_n = dn + a \qquad a_{n-1} = d(n-1) + a$$

$$a_n - a_{n-1} = dn + a - [d(n-1) + a] = dn + a - dn + d - a = d$$

d nennt man die **Differenz der Folge AF.**

Ist die Differenz d also bei einer AF immer konstant, so kann man zu einem Glied a_n das nächste Glied a_{n+1} angeben, indem man zu a_n die Differenz d addiert.

Formel für das (n+1)-te Glied: $a_{n+1} = a_n + d$.

Nennt man das erste Glied der Folge a_1, so ist $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \ \ldots$
$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \ldots = a_1 + (n-1)\,d$

Formel für das n-te Glied: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

Betrachtet man drei aufeinander folgende Glieder a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, so gelten die Beziehungen:

$a_{n-1} = a_n - d \qquad$ und $\qquad a_{n+1} = a_n + d \qquad (n > 1)$
$a_{n-1} + a_{n+1} = a_n - d + a_n + d = 2a_n$
oder: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Das mittlere von drei aufeinanderfolgenden Gliedern einer AF ist gleich der halben Summe der beiden äußeren Glieder. Man spricht vom **arithmetischen Mittel.**

Definition: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Beispiel: Gegeben seien die Glieder 5 und 9 einer AF. Es soll das dazwischenliegende Glied ermittelt werden.

$$a_n = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Sollen zwischen zwei Zahlen neue Zahlen eingeschaltet werden, so daß die neuen Zahlen mit den beiden gegebenen Zahlen eine AF bilden, so nennt man diesen Vorgang **interpolieren*).**

Die gegebenen Zahlen seien z_a und z_e. Es sollen m Glieder eingeschaltet werden. Das bedeutet, die AF hat $(m+2)$ Glieder, das erste ist $a_1 = z_a$, das letzte ist $a_n = z_e$. Die neue Folge heißt dann:

$$\langle z_a;\ z_a+d;\ z_a+2d;\ z_a+3d;\ \ldots;\ z_a+(n-2)\,d;\ z_a+(n-1)\,d = z_e\rangle$$

Mit $n = m+2$ ergibt sich dann:

$$z_a+(n-1)\,d = z_a+(m+1)\,d = z_e.$$

Damit läßt sich die Differenz d der Folge ermitteln.

Formel für die Differenz: $d = \dfrac{z_e - z_a}{m+1}$

Beispiele: 1. Es seien die Zahlen $z_a = 1$ und $z_e = 11$ gegeben. Dazwischen sollen $m = 4$ Glieder eingeschaltet werden.

$$d = \frac{11-1}{4+1} = \frac{10}{5} = 2$$

Die gesuchte AF heißt also:

$\langle 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11\rangle$

2. Es sei die AF: $\langle 2;\ 11;\ 20;\ 29\rangle$ gegeben. Eine neue AF soll gebildet werden, indem 5 neue Glieder zwischen je zwei Glieder der gegebenen Folge eingeschaltet werden.

$$z_a = 2;\ z_e = 11;\ m = 5;\ d = \frac{11-2}{5+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\text{oder: } z_a = 11;\ z_e = 20;\ m = 5;\ d = \frac{20-11}{5+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Damit heißt die neue Folge:

$$\left\langle 2;\ \frac{7}{2};\ 5;\ \frac{13}{2};\ 8;\ \frac{19}{2};\ 11;\ \frac{25}{2};\ 14;\ \frac{31}{2};\ 17;\ \frac{37}{2};\ 20;\ \frac{43}{2};\ 23;\ \frac{49}{2};\ 26;\ \frac{55}{2};\ 29\right\rangle$$

Aufgaben:

1. Wie heißt das n-te Glied?

a) $a_1 = 100;\ d = 3;\ n = 18$

b) $a_1 = -68;\ d = 11;\ n = 31$

c) $a_1 = 72;\ d = -4;\ n = 26$

d) $a_1 = -112;\ d = -21;\ n = 43$

e) $\langle 18;\ 23;\ 28;\ 33;\ \ldots a_n\rangle;\ n = 45$

f) $\langle -176;\ -168;\ -160;\ -152;\ \ldots a_n\rangle;\ n = 111$

2. Gegeben sei die Folge AF. Schalten Sie m Glieder zwischen je zwei Glieder der AF. Wie groß ist die Differenz d der neuen AF und wie lauten die ersten $(m+4)$ Glieder?

a) $\langle 1;\ 11;\ 21;\ 31;\ \ldots\rangle;\ m = 4$

b) $\langle 15;\ 29;\ 43;\ 57;\ \ldots\rangle\ m = 6$

c) $\langle 112;\ 103;\ 94;\ 85;\ \ldots\rangle\ m = 5$

d) $\langle -39;\ -33;\ -27;\ -21;\ \ldots\rangle\ m = 5$

e) $\langle -68;\ -71;\ -74;\ -77;\ \ldots\rangle\ m = 5$

f) $\langle -24;\ -26;\ -28;\ -30;\ \ldots\rangle\ m = 7$

Geben Sie das Bildungsgesetz der neuen Folgen an.

3. Zeigen Sie: Werden zwischen je zwei Glieder einer AF m neue Glieder eingeschaltet, so entsteht eine neue AF mit der $\dfrac{1}{m+1}$-fachen Differenz.

---

*) Genauer: linear interpolieren

5.2.2. Die arithmetische Reihe (AR)

Definition:
Die formal gebildete Summe der Glieder einer arithmetischen Folge heißt arithmetische Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} [a_1 + (n-1)\,d]$$

Als der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777/1855) noch eine der unteren Klassen der Elementarschule besuchte, stellte der Lehrer eines Tages den Schülern die Aufgabe, die ganzen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Damit wollte er die Klasse für eine längere Zeit beschäftigen, wie man sich erzählt. Der junge Gauß hatte jedoch nach kurzer Zeit schon das Ergebnis. Dabei war er folgendermaßen vorgegangen:

$$\begin{aligned} s_{100} &= 1+2+3+4+\ldots+98+99+100 \\ &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51) = 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

Er hatte damit praktisch die Formel $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$ für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gewonnen. Ob diese Formel gültig ist für jede beliebige natürliche Zahl n, muß jedoch noch bewiesen werden. An diesem Beispiel soll eine wichtige Beweismethode der Mathematik erläutert werden.

Die vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist der Schluß von der Gültigkeit der Aussage A(n) auf die Gültigkeit der Aussage A(n+1). Dabei geht man in folgenden Schritten vor:

1. Induktionsbeginn: A(n) gilt für $n = 1$.
2. Induktionsvoraussetzung: A(n) gilt für beliebiges n ($n \in \mathbb{N}$).
3. Induktionsbehauptung: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
4. Induktionsschluß: A(n) gilt für alle n.

zu 1. Die Gültigkeit der Formel*) für $n = 1$ läßt sich leicht nachprüfen: $s_1 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

Dieser erste Schritt wird oft als Induktionsverankerung bezeichnet.

zu 2. Durch Ausrechnen ergibt sich:

$$s_2 = 1+2 = \frac{2}{2}(1+2);\ s_3 = 1+2+3 = \frac{3}{2}(1+3);\ s_4 = 1+2+3+4 = \frac{4}{2}(1+4);$$

$$s_5 = 1+2+3+4+5 = \frac{5}{2}(1+5);\ s_6 = 1+2+3+4+5+6 = \frac{6}{2}(1+6).$$

Die allgemeine Formel $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$ gilt damit zunächst nur für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

---

*) Die hier über die natürlichen Zahlen zu machende Aussage ist in der Gestalt der Summenformel gegeben.

zu 3. Es wird nun gezeigt: Wenn die Formel für n gilt, dann gilt sie auch für n+1.

$$s_n = \frac{n}{2}(n+1) \Rightarrow s_{n+1} = \frac{n+1}{2}\left[(n+1)+1\right] = \frac{n+1}{2}(n+2)$$

Beweis: $s_{n+1} = s_n + (n+1) = \frac{n}{2}(n+1) + (n+1)$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n+1}{2}(n+2)$$

Also gilt die oben behauptete Schlußfolgerung.

zu 4. Da die Formel für $n = 1$ mit Sicherheit richtig war, gilt sie auch für $n+1 = 2$ und damit auch für $(n+1)+1 = 3$ usw. Es ist also bewiesen, daß die Formel für jede natürliche Zahl gilt.

Bemerkung: Das Verfahren der vollständigen Induktion ist nur dann anwendbar, wenn die zu beweisende Aussage für den Bereich der natürlichen Zahlen definiert ist.

Die Summenformel

Die Formel $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$ gilt nur, wenn der Summenwert einer AR berechnet werden soll, bei der die Glieder die Folge der natürlichen Zahlen sind, beginnend mit 1. Nun soll eine Formel entwickelt werden, die es ermöglicht, allgemein den Summenwert einer AR zu berechnen. Dazu schreiben wir eine AR mit allgemeinen Gliedern und darunter dieselbe Reihe in umgekehrter Reihenfolge:

$$\begin{array}{rcl} s_n &=& a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_n-2d) + (a_n-d) + a_n \\ s_n &=& a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \ldots + (a_1+2d) + (a_1+d) + a_1 \quad + \\ \hline 2s_n &=& (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \ldots + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) \end{array}$$

Werden die beiden Reihen addiert, so ergibt sich:

$$2s_n = n(a_1+a_n).$$

Damit ergibt sich die **Formel für den Summenwert einer AR:**

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

Mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ ergibt sich:

$$s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1) \cdot d\right]$$

Bei einer AR gibt es fünf Größen (a_1; a_n; d; n; s_n), die miteinander verknüpft sind. Zur Berechnung der Größen stehen zwei voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \quad \text{und} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

Durch dieses Gleichungssystem ist es möglich, zwei Größen zu berechnen, wenn die übrigen drei Größen bekannt sind. Das bedeutet, daß es so viele Aufgabentypen gibt, wie es Teilmengen mit je zwei Elementen der Menge $\{a_1;\ a_n;\ d;\ n;\ s_n\}$ gibt, d.h. 10 Aufgabentypen. Zwei dieser Aufgabentypen (gesucht: n und a_1 oder n und a_n) führen auf quadratische Gleichungen. Dabei können zwei Lösungen existieren. Es muß daher zuvor immer die Definitionsmenge festgelegt werden.

1. Ergänzen Sie die Tabelle:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
a_1	7	21	100	-27	72				7	
a_n		111	$94\frac{1}{2}$	18		40	74			-12
d	8		$-\frac{1}{2}$			14		$-\frac{1}{3}$	6	$-\frac{1}{2}$
n	5	31			23	11	19	28		
s_n				-72	391		2774	-266	2132	-136

2. Berechnen Sie die Summe der ersten 25 Glieder der Folge $\langle -2; 0; 2; 4; \ldots \rangle$

3. Wie groß ist die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen?

4. Wie groß ist die Summe der ungeraden Zahlen zwischen 300 und 800?

5. Wie groß ist die Summe aller natürlichen dreiziffrigen Zahlen, die durch 23 [29] ohne Rest teilbar sind?

6. Wie groß ist die Summe aller ohne Rest durch 3 [7] teilbaren geraden Zahlen zwischen 100 und 1000 [200 und 1800]?

7. Wie groß ist die Summe aller durch 7 [11; 17] mit dem Rest 4 [5; 9] teilbaren ungeraden Zahlen zwischen 50 und 500 [100 und 900; 300 und 3000]?

8. Die Summe des 3. und 11. Gliedes einer AR ist gleich 34, die des 7. und 12. Gliedes gleich 44. Wie heißt das 20. Glied? Wie groß ist die Summe der ersten 35 Glieder?

9. Die Summe des 5. und 8. Gliedes einer AR ist gleich 1, die des 2. und 6. Gliedes gleich 0. Wie groß ist die Summe der ersten 12 Glieder?

10. Der Summenwert einer AR mit 5 Gliedern ist $s_5 = 0$. Das 4. Glied ist $a_4 = -1{,}5$. Wie groß ist das Glied a_1 und wie groß ist die Differenz d?

11. Eine Turmuhr schlägt nur ganze Stunden. Wieviel Schläge macht sie in 3 Tagen?

12. Eine Turmuhr schlägt die ganzen Stunden; außerdem schlägt sie zu jeder Viertelstunde einmal, zu jeder halben Stunde zweimal, zu jeder Dreiviertelstunde dreimal und zu jeder vollen Stunde viermal. Wieviel Schläge sind das in einem vollen Tag?

13. Beim Bohren eines Schachtes sollen für den ersten Meter 5 DM [7 DM] bezahlt werden und für jeden folgenden Meter 1,25 DM [1,75 DM] mehr als für den vorhergehenden Meter. Wie teuer wird der Schacht, wenn er 1200 m tief werden soll?

14. Bei einer Bohrung wird am ersten Tag eine Tiefe von 84 m erreicht. An jedem weiteren Tag werden 4 m weniger gebohrt als am Tag zuvor. Wie tief ist die größte erreichbare Tiefe? Am Abend des wievielten Tages ist eine Tiefe von 900 m erreicht?

15. In einem Bergwerksschacht nimmt die Temperatur alle 35 m um 1°C zu. Welche Temperatur herrscht in 1340 m Tiefe, wenn man von einer durchschnittlichen Temperatur von 10°C an der Erdoberfläche ausgeht?

16. Bei einem trapezförmigen Walmdach liegen in der obersten Reihe 40 Ziegel, in jeder folgenden Reihe liegen 2 Ziegel mehr. Wieviel Ziegel hat diese Dachfläche, wenn 32 Reihen gezählt werden?

17. Läßt man einen Körper frei fallen, so legt er in der ersten Sekunde etwa 5 m, in jeder folgenden Sekunde etwa 10 m mehr als in der vorhergehenden zurück.
a) Stellen Sie das Bildungsgesetz der Folge der Fallwege auf.
b) Wieviel m ist der Körper nach 15 s gefallen?

Arithmetische Folgen und Reihen

1. Fügen Sie zu nachstehenden arithmetischen Zahlenfolgen noch die nächsten fünf Glieder hinzu.

   a) 2, 4, 6, ... **b)** 0, −2, −4, ... **c)** 36, 33, 30, ... **d)** 2, 5, 8, ...

2. Bestimmen Sie die fehlenden Zahlen folgender arithmetischer Reihen:

	a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
a_1	5	4	10			−205
d	3	3			5	5
n		30	20	43	57	
a_n			−85	302	448	
s_n	440			6665		4250

3. Welche der gegebenen Zahlenfolgen sind arithmetische Zahlenfolgen? ($D = \mathbb{N}^*$)

a) $n \longmapsto 4n - 3$ b) $n \longmapsto 2n^2 - 27$, c) $n \longmapsto (\sqrt{n})^n$

d) $n \longmapsto \frac{1}{n^2}$ e) $n \longmapsto \frac{3n}{4n+1}$

4. Wieviel durch 4(7) dividierbare Zahlen liegen zwischen 1 und 200?

5. Eine aus natürlichen Zahlen gebildetete arithmetische Zahlenfolge mit sieben Gliedern hat die Teilsumme $s_7 = 91$. Wie lauten die einzelnen Teilsummen $s_1 \dots s_6$ und wie lauten die Glieder der arithmetischen Zahlenfolge, wenn die Summe des ersten und zweiten Gliedes gleich 6 ist?

6. Eine aus acht Gliedern bestehende arithmetische Zahlenfolge hat die Summe $s_n = 165$. Die Summe der ersten fünf Glieder einer Zahlenfolge ist gleich 75. Berechnen Sie alle Glieder der Folge und die Teilsumme s_4.

7. Fünf Zahlen, deren Summe gleich 125 ist, bilden eine arithmetische Zahlenfolge. Die Summe der Quadrate der Glieder dieser Zahlenfolge ist gleich 4125. Bestimmen Sie die Glieder der Zahlenfolge.

8. Gegeben sei die arithmetische Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$: 5, 11, 17, ...

a) Vom wievielten Glied an sind die Glieder der arithmetischen Zahlenfolge größer als 10^4?

b) Vom wievielten Glied an ist die n-te Teilsumme größer als 10^2?

9. Gegeben sei die arithmetische Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$: 4, 1, -2, ...

a) Vom wievielten Glied an ist die Zahlenfolge kleiner als $(-10)^3$?

b) Vom wievielten Glied an ist die n-te Teilsumme kleiner als (-10)?

10. Berechnen Sie das Endglied a_n einer arithmetischen Reihe, wenn gegeben sind:

a) a_1, d, n b) a_1, n, s_n c) a_1, d, s_n d) d, n, s_n

11. Wieviel aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen einer arithmetischen Reihe sind zu addieren, wenn das Anfangsglied $a_1 = 1$ ist und die Summe $s_n = 1600$ sein soll?

12. Wieviel aufeinanderfolgende gerade natürliche Zahlen einer arithmetischen Reihe sind zu addieren, wenn das Anfangsglied $a_1 = 2$ ist und die Summe $s_n = 1640$ sein soll?

13. Wie groß ist die Summe aller durch 7 dividierbaren Zahlen von 14 bis 518?

14. Wie groß ist die Summe sämtlicher natürlicher Zahlen zwischen 8 und 498, die durch 7 dividiert den Rest 1 ergeben?

15. Die Summe des 3. und 11. Gliedes einer arithmetischen Reihe ist gleich 34, die des 7. und 12. Gliedes ist gleich 44. Wie groß ist die Summe der ersten 25 Glieder dieser arithmetischen Reihe?

16. Ein Körper hat eine Geschwindigkeit von 600 km/h. Jede Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um 9,8 m/s ab. Nach wieviel Sekunden ist der Körper in Ruhe?

17. Ein Kupferdraht (2 mm Durchmesser) wird auf eine zylindrische Trommel von 40 cm Länge und 3 cm Durchmesser gewickelt. Wieviel Lagen ergeben sich, wenn der Draht 180 m lang ist?

18. In einer Glasbläserei werden Flaschen gestapelt. Die unterste Reihe umfaßt 25 Flaschen. In der darüberliegenden Reihe liegt über je zwei Flaschen der untersten Reihe je eine Flasche. Wieviel Flaschen liegen in zehn übereinandergestapelten Reihen?

19. Durch Erdbohrungen hat man festgestellt, daß unter der Erdoberfläche in etwa 30 m Tiefe eine durchschnittliche mittlere Jahrestemperatur von 283 K (K $\triangleq$ Kelvin) herrscht. Von hier an nimmt die Temperatur um 1 K auf je 33 m Tiefe zu. Wie hoch wird die Temperatur am Grunde eines 3231 m tiefen Bohrloches etwa sein?

20. Ein Techniker erhält ein jährliches Bruttogehalt von 37200 DM. Nach Ablauf eines jeden Jahres erhält er eine Zulage von 40 DM je Monat. Wie hoch ist sein monatliches Bruttogehalt im 25. Jahr, und wieviel Geld hat er in den 25 Jahren ingesamt verdient?

21. Eine aufsteigende Rakete erreicht in 2000 m Höhe ihre Höchstbeschleunigung von $40\,m/s^2$. Diese Beschleunigung hält sie 160 Sekunden lang bei; dann ist der gesamte Brennstoff verbraucht. Wie hoch ist ihre Endgeschwindigkeit, wenn die Geschwindigkeit in 2000 m Höhe 280 m/s betrug?

22. Ein Auto fährt im Leerlauf einen Berg abwärts. Sein Weg in der ersten Sekunde beträgt 3 m und in jeder folgenden Sekunde 1,2 m mehr als in der vorhergehenden. Welche Geschwindigkeit (km/h) hat der Wagen nach 21 Sekunden erreicht?

23. Bei einem Wettbewerb sollen 6000 DM unter zwölf Teilnehmer so aufgeteilt werden, daß jeder folgende Teilnehmer 30 DM mehr erhält als der vorhergehende. Wieviel Geld erhält der erste und wieviel erhält der letzte Teilnehmer?

Lösungen Arithmetische Folgen und Reihen

1. a) $a_n = 39$; $s_n = 115$
b) $d = 3$; $s_n = 2046$
c) $n = 12$; $s_n = 1167$
d) $n = 16$; $d = 3$
e) $a_n = -38$; $d = -5$
f) $a_1 = -100$; $s_n = -330$
g) $a_1 = 218$; $d = -8$
h) $a_1 = -5$; $a_n = -14$
i) $n = 26$; $a_n = 157$
k) $n = 32$; $a_1 = 3\frac{1}{2}$ $(n = 17;\ a_1 = -4)$

2. $s_n = 550$

3. $s_n = 10\,000$

4. $s_n = 137\,500$

5. $s_n = 21\,528$ $[s_n = 17\,081]$

6. $s_n = 82\,350$ $[s_n = 114\,114]$

7. $s_n = 8640$ $[s_n = 18\,000;\ s_n = 129\,639]$

8. $a_{20} = 43$; $s_{35} = 1365$

9. $d = \frac{1}{5}$; $a_1 = -\frac{3}{5}$; $s_{12} = 6$

10. $d = -\frac{3}{2}$; $a_1 = 3$

11. 468 Schläge

12. 396 Schläge

13. $s_{1200} = 905\,250$ $[s_{1200} = 1\,267\,350]$

14. $s_{max} = 924$; Am Abend des 18. Tages

15. 48 °C

16. 2272 Ziegel

17. a) $\langle 10n - 5 \rangle$ b) 1125 m

Lösungen beziehen sich auf Blatt 10!