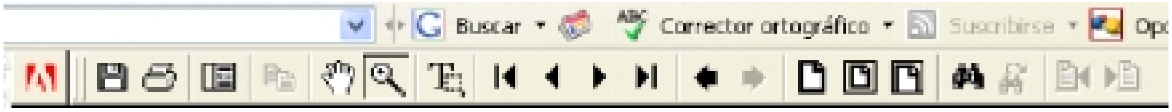


Para descargar el archivo en tu computadora, de click en el icono de disco que se encuentra en la parte superior y le asignas un nombre, ¡ES TODO!

Para verlo bien puedes hacer un acercamiento seleccionando la lupa, con un zoom de 300% se ve bien

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO

CURSO DE INDUCCION PROGRAMA DE ÁLGEBRA

1. Leyes de exponentes. Adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios. Productos notables, factorización Factor común, diferencia de cuadrados, diferencia de cubos, suma de cubos, trinomios cuadrados, agrupación. Fracciones simples y complejas, adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones.
2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Problemas que se resuelven mediante ecuaciones de primer grado. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
3. Ecuación de segundo grado con una incógnita.
4. Ecuaciones de grado superior con una incógnita.
5. Relaciones y funciones. Dominio, Contradominio, regla de correspondencia. Funciones lineales, cuadráticas, polinomiales y sus gráficas.

PROGRAMA DE TRIGONOMETRÍA PLANA

1. Definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. Valores exactos de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30^o,45^o ,60^o y sus múltiplos. Funciones trigonométricas de ángulos múltiplos
2. Funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Resolución del triángulo rectángulo. Aplicaciones
3. Definición del triángulo oblicuángulo. Casos del triángulo oblicuángulo. Ley de los senos. Ley de los cosenos. Ley de las tangentes. Fórmula para calcular el rea de un triángulo oblicuángulo según los casos. Funciones trigonométricas de los ángulos mitad de un triángulo en función de sus lados. Aplicaciones del triángulo oblicuángulo

PROGRAMA DE GEOMETRIA ANALITICA

1. Distancia entre dos puntos dados. División de un segmento en una razón dada. Punto medio. Pendiente de un segmento. Angulo entre dos rectas. Condición de paralelismo y perpendicularidad.
2. Ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. Otras formas de la ecuación de la recta. Ecuación de la recta a partir de dos puntos. Ecuación de la recta a partir de su pendiente y ordenada al origen. Ecuación simétrica de la recta. Forma general de la ecuación de la recta. Posiciones relativas de dos rectas.

3. Forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Forma general de la ecuación de la circunferencia. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones.
4. Ecuación de la parábola de vértice el origen y eje de simetría en los ejes coordenados. Ecuación de la parábola de vértice en (h,k) y eje de simetría paralelo a un eje de coordenadas. Ecuación general de una par bola.
5. Ecuación de la elipse de centro el origen y ejes de la elipse en los ejes coordenados. Ecuación de la elipse de centro en (h,k) y ejes paralelos a los ejes coordenados. Ecuación general de la elipse.
6. Primera ecuación ordinaria de la hipérbola. Asintotas de la hipérbola. Hipérbola equilátera o rectangular. Hipérbolas conjugadas. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola.

PROGRAMA DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1. Concepto de derivada. Problema físico de velocidad, problema geométrico de la recta tangente a la grafica de una función. Reglas de la derivada. Regla de la cadena. Derivación implícita. Derivada de funciones algebraicas y trascendentes, empleando teoremas. Características de la función creciente, decreciente, concavidad, extremos y puntos de inflexión. Problemas de máximo beneficio, mínimo costo, la mayor cantidad de producto.
2. Definición de antiderivada. Definición de Integral definida. Teorema fundamental del cálculo. Problemas.

Bibliografia

Algebra Elena de Oteyza, Carlos Hernández Editorial Prentice Hall.

Algebra y trigonometría con geometría analítica. Earl W. Swokowski y Jeffery A. Cole. Grupo Editorial Iberoamérica.

Algebra contemporánea. Paul Rees y Fred Sparks. Editorial Mc. Graw Hill.

Geometría Analítica Lehman, Charles H. ED UTHEA MEXICO

Cálculo Diferencial e Integral, Stewart, James Ed Thomson Editores Mx 1999

Leyes de exponentes.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$

2. $(a^m)^n = a^{mn}$

3. $(ab)^m = a^m b^m$

4. $$\frac{a^m}{a^n} = \left\{ \begin{array}{ll} a^{m-n} & \text{cuando } m > n \\ 1 & \text{cuando } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{cuando } m < n \end{array} \right\}$$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

21. $27^{\frac{2}{3}}$ **22.** $32^{\frac{3}{5}}$ **23.** $128^{\frac{5}{7}}$ **24.** $81^{\frac{5}{4}}$

25. $\left(x^{\frac{5}{8}}y^{\frac{3}{2}}\right)^4$ **26.** $\left(x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}\right)^3$ **27.** $\left(x^{\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{6}}\right)^2$ **28.** $\left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{9}}\right)^6$

29. $(x^4y^6)^{\frac{3}{2}}$ **30.** $(x^3y^4)^{\frac{5}{6}}$ **31.** $\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$ **32.** $\left(x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

33. $\left(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}$ **34.** $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)^2\left(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)^3$ **35.** $\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^2\left(x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{3}{4}}\right)^4$ **36.** $\left(x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}}\right)^3\left(x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{1}{2}}\right)^4$

37. $(x^2y^3)^{\frac{1}{4}}(x^4y^2)^{\frac{1}{8}}$ **38.** $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}\left(x^{\frac{2}{3}}y^2\right)^{\frac{3}{5}}$

39. $\left(x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}(x^2y^{18})^{\frac{1}{6}}$ **40.** $\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right)$

41. $\left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2\right)$ **42.** $\left(2x^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(3x^{\frac{1}{2}} - 4\right)$

43. $\left(x^{\frac{2}{3}} + 3\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\right)$ **44.** $\left(3x^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2$

45. $\left(2x^{\frac{1}{2}} + 3\right)^2$ **46.** $\left(2x^{\frac{3}{2}} - 1\right)^2$

47. $\left(x^{\frac{1}{4}} - 3\right)^2$ **48.** $\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$

49. $\left(2x^{\frac{1}{3}} + 1\right)\left(4x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$ **50.** $\dfrac{x^2y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}y^2}$ **51.** $\dfrac{x^{\frac{5}{3}}y^3}{x^3y^{\frac{5}{4}}}$ **52.** $\dfrac{x^{\frac{4}{7}}y^{\frac{7}{9}}}{x^{\frac{2}{7}}y^{\frac{4}{3}}}$

53. $\dfrac{x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$ **54.** $\dfrac{(4x^6y^4)^{\frac{3}{2}}}{\left(x^{\frac{3}{2}}y^3\right)^{\frac{2}{3}}}$ **55.** $\dfrac{\left(16x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}}{(4x^5y^2)^{\frac{1}{2}}}$ **56.** $\dfrac{\left(x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{15}{4}}\right)^{\frac{2}{5}}}{\left(x^2y^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}$ **57.** $\dfrac{\left(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}\right)^4}{\left(x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{9}}\right)^6}$

58. $(4x^0 - 3)^{10}$ **59.** $(5^0x - 4)^2$ **60.** $(6^0x + 1)^2$

61. $(20^0 - 3)^6$ **62.** $3x^0(5x - 2)$ **63.** $6x(x^3 + 4)^0$

Efectúe las operaciones indicadas y escriba las respuestas con exponentes positivos:

64. $x^{-2}y^3 \cdot x^{-1}y^{-2}$ **65.** $x^3y^{-1} \cdot x^{-4}y^2$ **66.** $4^{-1}x^{-3}y \cdot 2^3x^{-1}y^{-4}$

67. $(2^{-3}x^{-1}y^2)^2$ **68.** $(3^{-2}x^{-5}y^3)^{-1}$ **69.** $(2x^{-2}y^{-3})^{-2}$

70. $(2x^{-1}y^{-2})^3(4x^{-3}y^4)^{-1}$ **71.** $(x^3y^{-4})^{-1}(2^{-3}x^{-1}y^{-3})^2$

72. $(x^{-2}y^{-6})^{\frac{1}{2}}(27x^9y^{-3})^{-\frac{1}{3}}$ **73.** $(8x^3y^{-3})^{-\frac{2}{3}}(x^{-8}y^{-4})^{\frac{3}{4}}$

74. $\dfrac{x^2y^{-3}}{x^{-2}y^{-2}}$ **75.** $\dfrac{x^{-3}yz^{-1}}{x^{-5}y^{-3}z^3}$ **76.** $\dfrac{x^{-6}y^{-4}z^3}{x^{-3}y^{-8}z^{-3}}$

77. $\dfrac{2^{-3}x^{-7}y^5}{2^{-4}x^{-10}y^{-1}}$ **78.** $\dfrac{(2^{-1}x^{-2}y)^3}{(2^{-2}xy^{-1})^{-2}}$ **79.** $\dfrac{(3^2xy^{-4})^{-2}}{(3x^{-2}y^{-2})^{-3}}$

80. $\dfrac{3a^{-2} + b^{-1}}{2a^{-1} + b^{-2}}$ **81.** $\dfrac{2a^{-2} - 3b^{-3}}{2a^{-2} + b^{-3}}$ **82.** $\dfrac{3a^{-2} - 4a^{-1} + 1}{6a^{-2} - 5a^{-1} + 1}$

Adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios.

División con residuo

Teorema (Algoritmo de la división). Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y $g(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ multiplicando ambos miembros por $g(x)$ obtenemos, $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ de tal manera que o bien $r(x) = 0$, o su grado es menor que el de $g(x)$

PROCEDIMIENTO PARA DIVIDIR UN POLINOMIO ENTRE OTRO:

1. Se ordenan el dividendo y el divisor, según las potencias descendentes de una misma literal.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica todo el divisor por este término y se resta el producto obtenido del dividendo.
3. El residuo obtenido en el paso 2 se toma como nuevo dividendo y se repite el proceso del paso 2 para obtener el segundo término del cociente.
4. Se repite este proceso hasta que se obtenga un residuo nulo o de grado inferior que el del divisor.

Ejemplo. Dividir $\frac{x^4-x^3-x^2+7x-6}{x^2+x-2}$

Ejercicios. En cada uno de los siguientes ejercicios, efectuar la división indicada y comprobar el resultado.

1. $\frac{x^5-4x^4+3x^3+3x^2-3x+2}{x^2-x-2}$
2. $\frac{x^3-3x^2+x-5}{x-2}$
3. $\frac{x^3+2x^2-3x+4}{x^2-x+2}$
4. $\frac{x^4+2x^3+3x^2-4x+2}{x^3-x^2-x+1}$

Realice las operaciones indicadas y simplifique:

71. $2xy^2(xy^2)$ **72.** $3xy(-x^2y)$ **73.** $xy^3(-x^3y)$

74. $(-2x^3y^2z)(-3xz^2)$ **75.** $(-x^2y^4)(2xz^2)(-y^2z^3)$

76. $(-xy^2)(y^4z)(-x^3z^3)$ **77.** $(-3xy)(-2x^3y^2)(4yz)$

78. $(-x^3y)(-5xy^3)(-x^2y^2)$ **79.** $(x^2y^3)^4$

80. $(3xy^2)^3$ **81.** $(-2xy^3)^2$ **82.** $(-3x^3y)^3$ **83.** $(-2x^2y)^4$

84. $(xy^2)^2(3x^3y)^3$ **85.** $(2x^2z)^3(5xy^2)^2$

86. $(-2x^2y^3)^2(3xy^2z)$ **87.** $(-xy^2)^4(-x^2y^3)^3$

88. $(-3x^3y^2)^2(-2^2x^2y^3)(-xy^2)^3$ **89.** $(5xy^2)^2(yz^2)^4(-x^3z)^3$

90. $4(-2a^2b)^3 - b^3(-a)^6$ **91.** $3(-ab^3)^2 - 2b^2(ab^2)^2$

92. $(-a^4b^3)^3 + b(a^3b^2)^4$ **93.** $(a^3b)^3 + 2ab(a^4b)^2$

94. $3a(a^2 - 2a + 4) + 6a^2(a + 1)$ **95.** $2a(6a^3 + 2a^2 - 1) - 4a^2(3a^2 + a)$

96. $a(2a^3 - 3a^2 + 1) - a^2(2a^2 + 3)$

97. $a^2(a^3 - 2a + 1) - a(a^3 - 2a^2 + a)$

98. $(6x + 7)(x + 3)$ **99.** $(2x + 5)(3x - 2)$ **100.** $(7x + 3)(x - 8)$

101. $(4x - 1)(6x - 3)$ **102.** $(5x - 2)(5x + 2)$ **103.** $(4x - 9)(4x + 9)$

104. $(4x + 5)^2$ **105.** $(7x - 4)^2$

106. $(2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$ **107.** $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$

108. $(2x - 3)(4x^2 - 2x + 1)$ **109.** $(x^2 + 1)(3x^2 + 6x - 8)$

110. $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ **111.** $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$

112. $(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 1)$ **113.** $(2x^2 - x - 3)(2x^2 + x + 3)$

114. $(x^2 + x - 1)^2$ **115.** $(2x^2 - 3x + 1)^2$

116. $(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ **117.** $(x + 1)(2x - 1)(x - 3)$

118. $x(2x - 1) + (x - 1)(2x + 3)$ **119.** $3x(x + 2) + (x + 3)(x - 9)$

Productos notables, factorización.

Factores:Se les denomina factores o divisores de una expresión a las expresiones que se multiplican entre si dando como producto la expresión numero uno. Ejemplo: $x(x+y) = x^2 + xy$

Descomponer en Factores o factorarar: Es convertir una expresión en el producto indicado de sus factores. Factorar un monomio:Esto es muy sencillo basta con mirar el ejercicio y saber descomponerlo en dos números que al multiplicarlos den el ejercicio propuesto. Ejemplo: $16xy = 8x * 2y$

Factorar un polinomio:Para poder descomponer un polinomio en varios factores necesitamos utilizar diferentes formas de hacerlo, para dicho objetivo a continuación explicaremos cada uno de los casos y un ejemplo para que nos vallamos familiarizando con esto.

Métodos para factorizar un polinomio

Antes de comenzar debes tener en claro que en la factorización lo que se busca es expresar una o varias cantidades como el producto de dos o màs factores, dando la posibilidad de factorizar de diferentes formas expresiones algebraicas denominando a este proceso casos de factorización.

Factor Común Este es el primer caso y se emplea para factorizar una expresión en la cual todos los términos tienen algo en común (puede ser un número, una letra, o la combinación de los dos). Ejemplo:$x^3y + x^2y^2 - 2xy = xy(x^2 + xy - 2)$

Factor Común por agrupación de términos Aquí utilizaremos el caso anterior, adicionando que uniremos los factores que se parescan, es decir, los que tengan un factor común. Ejemplo:

$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a+b) + y(a+b) = (x+y)(a+b)$

Casos para Trinomios

Trinomio cuadrado perfecto: Este nombre es otorgado a los trinomios que cumplen con las siguientes características:

El primer y tercer término tienen raíz cuadrada exacta y son positivos.

El segundo término es igual a dos vces el producto de las raíces cuadradas y puede ser positivo o negativo. y se factoriza como una suma o diferencia, dependiendo del segundo término, elevado al cuadrado, se factoriza asi:

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Diferencia de cuadrados: para esto debemos tener en cuenta que un binomio es una diferencia de cuadrados siempre y cuando los términos que la componen tengan diferentes signos y ambos términos tengan raíz cuadrada exacta, se factoriza asi: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Suma o diferencia de potencias iguales: Para solucionar este caso debes tener en cuenta los conocimientos adquiridos sobre cocientes notables, es decir: donde n pertenece a z;

se factoriza asi: si n pertenece a z $a^n - b^n = (a-b)(a^n - 1 + a^n - 2b + a^n - 3b^2 + \ldots + a^n - nb^n - 1)$

si n es par $a^n - b^n = (a+b)(a^n - 1 - a^n - 2b + a^n - 3b^2 - \ldots - a^n - nb^n - 1)$

si n es impar $a^n - b^n = (a+b)(a^n - 1 - a^n - 2b + a^n - 3b^2 - \ldots + a^n - nb^n - 1)$

Trinomio cuadrado de la forma $ax^2 + bx + c =$

Factorice completamente:

1. $24x + 18$
2. $2x^2 + 10x$
3. $6x^3 - 3x^2$
4. $9x^2y - 3xy$
5. $28xy^2 + 21x^2y$
6. $ax^2 + 4a^3$
7. $16ax - 40a^2$
8. $18x^2y^2 - 27xy^2$
9. $x^2 - 4$
10. $x^2 - 25$
11. $x^2 - 81$
12. $x^2 - 121$
13. $1 - x^2$
14. $9 - x^2$
15. $16 - x^2$
16. $36 - x^2$
17. $49 - x^2$
18. $64 - x^2$
19. $100 - x^2$
20. $144 - x^2$
21. $4x^2 - 25$
22. $4x^2 - 121$
23. $9x^2 - 49$
24. $16x^2 - 25$
25. $4 - 9x^2$
26. $4 - 81x^2$
27. $9 - 16x^2$
28. $16 - 81x^2$
29. $4x^2 - 25y^2$
30. $x^4 - 4y^2$
31. $x^2 - 9y^4$
32. $x^6 - 16y^2$
33. $x^4 - 25y^6$
34. $2x^2 - 32$
35. $12x^2 - 27$
36. $4x^2 - 36$
37. $9x^2 - 144$
38. $x^4 - x^2$
39. $4x^2y - y$
40. $x^2 + 15x + 54$
41. $x^2 + 16x + 64$
42. $x^2 + 17x + 72$
43. $x^2 + 16x + 48$
44. $x^2 + 14x + 24$
45. $x^2 + 14x + 40$
46. $x^2 - 13x + 22$
47. $x^2 - 11x + 24$
48. $x^2 - 15x + 50$
49. $x^2 - 14x + 48$
50. $x^2 - 16x + 39$
51. $x^2 - 16x + 63$
52. $x^2 + 8x - 9$
53. $x^2 + x - 20$
54. $x^2 + 6x - 55$
55. $x^2 + x - 72$
56. $x^2 + 3x - 40$
57. $x^2 + 5x - 84$
58. $x^2 - 32 - 4x$
59. $x^2 - 56 - x$
60. $x^2 - 30 - 13x$
61. $x^2 - 27 - 6x$
62. $x^2 - 60 - 7x$
63. $x^2 - 15 - 2x$
64. $x^2 + 18xy + 72y^2$
65. $x^2 + 17xy + 30y^2$
66. $x^2 - 16xy + 60y^2$
67. $x^2 - 6xy + 8y^2$
68. $x^2 + 10xy - 24y^2$
69. $x^2 + 16xy - 36y^2$
70. $x^2 - 11xy - 42y^2$
71. $x^2 - 6xy - 40y^2$
72. $x^2y^2 + 18xy + 81$
73. $x^2y^2 + 19xy + 48$
74. $x^2y^2 - 9xy + 18$
75. $x^2y^2 - 16xy + 48$
76. $x^2y^2 + 3xy - 18$
77. $x^2y^2 + 7xy - 30$
78. $x^2y^2 - 2xy - 48$
79. $x^2y^2 - 14xy - 32$
80. $6x^2 + 24x + 18$
81. $4x^2 + 20x + 24$
82. $3x^2 - 24x + 21$
83. $7x^2 - 35x + 28$
84. $5x^2 + 15x - 20$
85. $2x^2 + 16x - 40$
86. $8x^2 - 8x - 96$
87. $3x^2 - 9x - 30$
88. $x^3 + 16x^2 + 28x$
89. $x^3 + 18x^2 + 45x$
90. $x^2y - 17xy + 30y$
91. $x^2y - 18xy + 72y$

Fracciones simples y complejas.

Simplificación de fracciones algebraicas.

Adición, Multiplicación y división de fracciones algebraicas.

Operaciones combinadas y fracciones complejas.

Efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

1. $\dfrac{10^3x^6y^3}{15^2x^2y^9}$ **2.** $\dfrac{16^2x^4y^8}{8^3x^6y^4}$ **3.** $\dfrac{2x^3+2x^2}{4x^4+4x^3}$

4. $\dfrac{6x^2+6x}{3x^5-3x^3}$ **5.** $\dfrac{3x^2+2x-1}{9x^2-1}$ **6.** $\dfrac{24x^2+22x+3}{4x^2-13x-12}$

7. $\dfrac{36x^2-19x-6}{12x^2-x-6}$ **8.** $\dfrac{6x^2+7x-3}{4-11x-3x^2}$

9. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{4x}+\dfrac{1}{7x}$ **10.** $\dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{3x}-\dfrac{5}{2x}$ **11.** $\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{2}{3x}-\dfrac{7}{2x^2}$

12. $\dfrac{4x-7}{12x}-\dfrac{3x-4}{9x}$ **13.** $\dfrac{x-2}{24x^2}-\dfrac{2x-3}{36x^2}$ **14.** $\dfrac{x+4}{2x+4}+\dfrac{x-2}{x+2}$

15. $\dfrac{x+1}{2x-3}+\dfrac{x-3}{6x-9}$ **16.** $\dfrac{5x-7}{x-3}-\dfrac{7x-5}{2x-6}$ **17.** $\dfrac{x-1}{x-4}-\dfrac{x-3}{3x-12}$

18. $\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{4}{x-4}$ **19.** $\dfrac{x}{2x+1}+\dfrac{2}{x-4}$ **20.** $\dfrac{2x}{3x+2}+\dfrac{x}{2x-1}$

21. $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$ **22.** $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{x-2}$ **23.** $\dfrac{2x}{2x+3}-\dfrac{3x}{3x-2}$

24. $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}+\dfrac{5}{x^2-x-6}$ **25.** $\dfrac{4x+5}{2x^2+5x-3}+\dfrac{3}{2x^2-5x+2}$

26. $\dfrac{4x}{3x^2 + 4x - 4} + \dfrac{2x - 3}{3x^2 + x - 2}$

27. $\dfrac{2x + 3}{3x^2 - 13x + 4} + \dfrac{4x - 4}{3x^2 - 10x + 3}$

28. $\dfrac{9x}{2x^2 + 7x - 4} - \dfrac{7x}{2x^2 + 9x + 4}$

29. $\dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x - 4} - \dfrac{6}{x^2 - 2x - 8}$

30. $\dfrac{7x + 4}{3x^2 + 2x - 8} - \dfrac{x + 8}{3x^2 - x - 4}$

31. $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

32. $\dfrac{8}{x + 1} - \dfrac{5}{x + 2} + \dfrac{4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

33. $\dfrac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x - 3} + \dfrac{x + 8}{x^2 + x - 6}$

34. $\dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x - 8} + \dfrac{2x - 9}{x^2 - 7x + 12} + \dfrac{x + 7}{x^2 - x - 6}$

35. $\dfrac{3x + 2}{x^2 + 3x - 4} - \dfrac{x + 11}{x^2 + x - 12} + \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

36. $\dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 2} - \dfrac{3x - 1}{x^2 - 2x - 3} + \dfrac{3x - 7}{x^2 - 5x + 6}$

37. $\dfrac{7}{2x^2 + 5x - 3} + \dfrac{x + 2}{6x^2 - x - 1} + \dfrac{4x + 4}{3x^2 + 10x + 3}$

38. $\dfrac{8x}{4x^2 - 4x - 3} - \dfrac{x - 5}{2x^2 + x - 6} + \dfrac{x - 1}{2x^2 + 5x + 2}$

39. $\dfrac{7x}{4x^2 + x - 3} + \dfrac{2x}{8x^2 - 10x + 3} + \dfrac{x - 2}{1 - x - 2x^2}$

40. $\dfrac{4x - 5}{3x^2 - 11x + 6} - \dfrac{x - 3}{6x^2 - x - 2} + \dfrac{x + 4}{3 + 5x - 2x^2}$

41. $\dfrac{5x - 3}{4x^2 - 9x + 2} + \dfrac{2x - 1}{12x^2 - 7x + 1} - \dfrac{2x + 1}{3x^2 - 7x + 2}$

42. $\dfrac{7x + 11}{2x^2 + 7x + 3} + \dfrac{2x - 10}{6x^2 - 5x - 4} + \dfrac{4x - 14}{12 - 5x - 3x^2}$

43. $\dfrac{72x^3y^4}{64a^3b^2} \cdot \dfrac{56a^5b^7}{28x^3y}$

44. $\dfrac{32a^2b}{125x^2y} \cdot \dfrac{75xy^2}{48a^3b}$

45. $\dfrac{2x^2 + 7x}{9x^3 - 3x^2} \cdot \dfrac{3x^2 - x}{8x + 28}$

46. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 5x + 6} \cdot \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 10x + 24}$

47. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} \cdot \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 + 7x + 6}$

48. $\dfrac{x^2 + 11x + 28}{x^2 + 10x + 21} \cdot \dfrac{x^2 + 12x + 27}{x^2 + 13x + 36}$

49. $\dfrac{4x^2 - 17x + 4}{3x^2 - 10x - 8} \cdot \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{4x^2 + 7x - 2}$

50. $\dfrac{4x^2 + 12x + 9}{6x^2 + 7x - 20} \cdot \dfrac{6x^2 - 11x + 4}{4x^2 + 4x - 3}$

51. $\dfrac{27a^4b^7}{16x^6y^4} \div \dfrac{81a^5b^2}{32x^6y^2}$

52. $\dfrac{27a^3b^2}{49x^2y^3} \div \dfrac{18a^2b^3}{35xy^2}$

53. $\dfrac{x^5y^3z^4}{a^6b^2c} \cdot \dfrac{a^5b^4c^3}{x^6y^6z^3} \div \dfrac{ab^2c}{xy^2z}$

54. $\dfrac{x^3y^4z^2}{a^2b^3c} \cdot \dfrac{a^3b^4c^2}{x^2y^2z} \div \dfrac{a^4bc^3}{xy^3z^3}$

55. $\dfrac{2^3a^4b^3}{3^3x^2y} \div \dfrac{4^2a^5b^4}{15^2x^3y^2} \cdot \dfrac{a^3b}{5^3xy^3}$

56. $\dfrac{x^2y^4z}{a^6b^3} \div \dfrac{xy^3z^4}{a^2b^2} \cdot \dfrac{a^3b}{xy^2}$

57. $\dfrac{x^3y^2z}{a^2b^4c^2} \div \dfrac{x^5y^3z^4}{a^4b^6c^3} \cdot \dfrac{a^3b^3c}{x^2y^4z}$

58. $\dfrac{x^4y^2z}{a^3b^4c^3} \div \dfrac{x^6y^3z^2}{a^4b^2c^3} \cdot \dfrac{ab^3c^2}{x^2y^2z}$

59. $\dfrac{x^2 + 15x + 36}{x^2 + 14x + 24} \div \dfrac{x^2 + 13x + 30}{x^2 + 12x + 20}$

60. $\dfrac{x^2 - 13x + 36}{x^2 - 16x + 48} \div \dfrac{x^2 - 15x + 54}{x^2 - 18x + 72}$

61. $\dfrac{6x^2 + 7x + 2}{4x^2 - 4x - 3} \div \dfrac{9x^2 + 12x + 4}{6x^2 - 13x + 6}$

62. $\dfrac{6x^2 - 17x + 12}{12x^2 - 7x - 12} \div \dfrac{6x^2 - x - 12}{12x^2 + 25x + 12}$

63. $\dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x^2 - 21x - 18} \div \dfrac{2x^2 - 3x - 9}{18 + 9x - 2x^2}$

64. $\dfrac{18 - 19x - 12x^2}{6x^2 - 23x + 20} \div \dfrac{6x^2 - 31x + 18}{6x^2 - 35x + 36}$

65. $\dfrac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + 5x + 6} \div \dfrac{x^2 - 5x + 4}{2 - x - x^2}$

66. $\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2 - 5x - 3x^2} \div \dfrac{2 - x - 6x^2}{3x^2 + 8x - 3}$

67. $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x - 24} \cdot \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 7x + 10} \div \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 36}$

68. $\dfrac{6x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x - 35} \cdot \dfrac{6x^2 + 11x - 10}{12x^2 + 23x - 9} \div \dfrac{6x^2 - x - 2}{6x^2 - 17x - 14}$

69. $\dfrac{8x^2 - 42x + 27}{24x^2 - 5x - 36} \div \dfrac{2x^2 + 7x - 72}{12x^2 + 11x - 36} \cdot \dfrac{8x^2 + 73x + 72}{12x^2 - 41x + 24}$

70. $\dfrac{30x^2 - 17x - 21}{12x^2 - 125x + 50} \div \dfrac{6x^2 - 43x + 42}{24x^2 - 46x + 15} \cdot \dfrac{5x^2 - 46x - 40}{10x^2 - 9x - 9}$

71. $\dfrac{x}{2x - 3} - \dfrac{2x^2 + 6x}{4x^2 + 7x - 2} \cdot \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 5x - 3}$

72. $\dfrac{3x^2 + 12x}{6x^2 + x - 1} \cdot \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 4} - \dfrac{x}{x - 3}$

73. $\dfrac{4x^2 - 3x}{x^2 + 4x - 12} \div \dfrac{4x^2 + 5x - 6}{x^2 + 8x + 12} - \dfrac{x}{x + 3}$

74. $\dfrac{4x}{2x - 1} - \dfrac{6x^2 - 6x}{6x^2 + 13x + 6} \div \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{4x^2 - 9}$

75. $\left(1 + \dfrac{1}{x - 3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x - 2}\right)$

76. $\left(x - \dfrac{10}{x + 3}\right)\left(1 - \dfrac{2}{x + 5}\right)$

77. $\left(x+\frac{4}{x+4}\right)\left(x-\frac{8}{x+2}\right)$

78. $\left(x-\frac{4}{x+3}\right)\left(x+\frac{3}{x+4}\right)$

79. $\left(x-2-\frac{6}{x+3}\right)\left(2x-1+\frac{7}{x+4}\right)$

80. $\left(x+4+\frac{11}{3x-2}\right)\left(x-4+\frac{10}{3x+1}\right)$

81. $\left(2x-1+\frac{15}{x-9}\right)\left(x+3-\frac{12}{x-8}\right)$

82. $\left(x-1-\frac{5}{2x+1}\right)\left(x+3-\frac{5}{2x+3}\right)$

83. $\left(x-\frac{14}{x+5}\right)\div\left(x+\frac{14}{x+9}\right)$

84. $\left(x+\frac{1}{2x+3}\right)\div\left(x-\frac{3}{x-2}\right)$

85. $\left(x-\frac{2}{3x-1}\right)\div\left(x+\frac{3}{x-4}\right)$

86. $\left(x-\frac{2}{2x-3}\right)\div\left(x+\frac{3}{2x+7}\right)$

87. $\left(x-5-\frac{66}{3x-2}\right)\div\left(3x+1-\frac{38}{4x+3}\right)$

88. $\left(2x+1-\frac{7}{x-6}\right)\div\left(x-3-\frac{35}{2x-3}\right)$

89. $\left(8x+2+\frac{1}{3x-1}\right)\div\left(6x-5+\frac{4}{2x+1}\right)$

90. $\left(2x-11+\frac{21}{x+3}\right)\div\left(2x-9+\frac{6}{x+2}\right)$

91. $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{7}{8}}{\frac{5}{12}-\frac{3}{8}}$

92. $\dfrac{\frac{5}{9}-\frac{3}{4}}{\frac{7}{18}-\frac{7}{12}}$

93. $\dfrac{3-\frac{10}{x}+\frac{8}{x^2}}{3-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}$

94. $\dfrac{2+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^2}}{3+\frac{8}{x}-\frac{35}{x^2}}$

95. $\dfrac{x+1}{4x+7+\frac{6}{x-1}}$

96. $\dfrac{3x-1}{3x+2-\frac{4}{x+1}}$

97. $\dfrac{2x+1}{2x-1-\frac{4}{2x-1}}$

98. $\dfrac{4x+5}{2x+5+\frac{x}{2x+3}}$

99. $\dfrac{x-\frac{12}{x-4}}{1+\frac{6}{x-4}}$

100. $\dfrac{1+\frac{4}{x-2}}{x-\frac{8}{x-2}}$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.
Problemas que se resuelven mediante ecuaciones de primer grado.
Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
Sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
Sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

7. $A(2, -5), B(-3, 4)$

8. $A(-2, -1), B(-4, 1)$

9. $A\left(3, -\frac{1}{2}\right), B\left(5, \frac{7}{2}\right)$

10. $A\left(\frac{2}{3}, 1\right), B\left(\frac{5}{3}, 3\right)$

11. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), B\left(\frac{7}{2}, \frac{8}{3}\right)$

12. $A\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$

Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto dado con la pendiente indicada

13. $A(-4, -3);\ \frac{2}{3}$

14. $A(3, -2);\ -3$

15. $A(-7, 2);\ -4$

16. $A\left(1, \frac{1}{2}\right);\ \frac{2}{5}$

17. $A\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{3}\right);\ -\frac{5}{3}$

18. $A\left(-2, \frac{5}{6}\right);\ -\frac{7}{6}$

Encuentre la ecuación de la recta con las intersecciones x y y indicadas:

19. $4;\ 6$

20. $-3;\ 5$

21. $\frac{1}{2};\ 3$

22. $\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}$

23. $\frac{5}{2};\ -\frac{3}{7}$

24. $-\frac{5}{6};\ -\frac{4}{3}$

Resuelva gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

25. $x + y = 3$
$x - y = 3$

26. $2x - y = 5$
$2x + y = 3$

27. $3x + 2y = 4$
$5x - 4y = 3$

28. $2x + y = 1$
$x + 2y = 5$

Encuentre los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de eliminación

29. $3x - 2y = 7$
$2x - 3y = 3$

30. $2x + 3y = 6$
$6x - 7y = 2$

31. $x + 3y = 3$
$2x + 9y = 5$

32. $4x - 5y = 1$
$3x - 4y = 1$

33. $2x + y = 3$
$3x - 4y = -12$

34. $3x + y = 2$
$8x - 3y = 28$

35. $3x + 4y = 2$
$6x - 12y = -1$

36. $5x - 3y = -15$
$7x + 11y = 17$

37. $x - 3y = 1$
$2x - 6y = 3$

38. $2x + y = 4$
$4x + 2y = 7$

39. $x + 2y = 8$
$3x + 6y = 11$

40. $x - y = 5$
$3x - 3y = 13$

41. $2x - y = 1$
$4x - 2y = 2$

42. $2x + y = 3$
$6x + 3y = 9$

43. $3x + 2y = 4$
$6x + 4y = 8$

44. $x - 2y = 5$
$3x - 6y = 15$

Ecuación de segundo grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones de primer grado y segundo grado con dos incógnitas.

Ejercicios 11.7

Encuentre las coordenadas del vértice, las ecuaciones de las rectas de simetría, y dibuje las parábolas cuyas ecuaciones se indican:

1. $y = x^2$ **2.** $y = 2x^2$ **3.** $y = x^2 - 1$

4. $y = x^2 - 3$ **5.** $y = x^2 - 4$ **6.** $y = x^2 - 5$

7. $y = x^2 + 1$ **8.** $y = x^2 + 2$ **9.** $y = x^2 + 3$

10. $y = 1 - x^2$ **11.** $y = 3 - x^2$ **12.** $y = 6 - x^2$

13. $y = x^2 - 2x + 1$ **14.** $y = x^2 - 4x + 4$ **15.** $y = x^2 + 6x + 9$

16. $y = x^2 + 8x + 16$ **17.** $y = x^2 - 3x + 2$ **18.** $y = x^2 - 4x + 3$
19. $y = x^2 + 2x - 3$ **20.** $y = x^2 + 3x - 4$ **21.** $y = x^2 + 2x + 3$
22. $y = x^2 - 3x + 6$ **23.** $y = 3 + 2x - x^2$ **24.** $y = 8 + 2x - x^2$
25. $y = (2x - 3)^2$ **26.** $y = (3x - 2)^2$ **27.** $y = (3x + 2)^2$
28. $y = (3x + 4)^2$ **29.** $y = x^2 + 2x$ **30.** $y = x^2 + 4x$
31. $y = x^2 + x$ **32.** $y = x^2 + 3x$ **33.** $y = x^2 - 6x$
34. $y = x^2 - 8x$ **35.** $y = x^2 - 5x$ **36.** $y = x^2 - 7x$
37. $y = 2x^2 - 10x + 5$ **38.** $y = 2x^2 + 9x + 4$
39. $y = 6 + x - 2x^2$ **40.** $y = 4 + 7x - 2x^2$ **41.** $y = 2x^2 + 2x + 1$
42. $y = 3x^2 - 4x + 2$ **43.** $2y = x^2 + 3x - 5$ **44.** $3y = x^2 - x + 2$

Determine gráficamente los conjuntos solución de las siguientes ecuaciones:

45. $x^2 - 2x = 0$ **46.** $x^2 - 3 = 0$ **47.** $x^2 + 1 = 0$
48. $x^2 + 4 = 0$ **49.** $x^2 - 4x + 3 = 0$ **50.** $x^2 - 2x - 8 = 0$
51. $x^2 - 8x + 12 = 0$ **52.** $x^2 + 2x - 15 = 0$ **53.** $x^2 - 3x - 10 = 0$
54. $x^2 - x - 12 = 0$ **55.** $x^2 - 2x - 1 = 0$ **56.** $x^2 + 2x - 1 = 0$
57. $x^2 - x - 2 = 0$ **58.** $x^2 - 3x - 1 = 0$ **59.** $x^2 - 4x + 2 = 0$
60. $x^2 + 2x + 3 = 0$ **61.** $x^2 - 2x + 4 = 0$ **62.** $x^2 - 3x + 3 = 0$
63. $9x^2 - 6x + 1 = 0$ **64.** $4x^2 - 8x + 3 = 0$ **65.** $2x^2 - 3x - 2 = 0$
66. $3x^2 + 7x - 6 = 0$ **67.** $6x^2 - 5x - 6 = 0$ **68.** $4x^2 + 4x - 15 = 0$
69. $4x^2 + 4x - 3 = 0$ **70.** $3x^2 - 5x + 4 = 0$ **71.** $2x^2 + 3x + 2 = 0$

Repaso del Capítulo 11

Resuelva las siguientes ecuaciones por factorización:

1. $x^2 + x - 12 = 0$ **2.** $x^2 - 9x + 8 = 0$ **3.** $x^2 + 5x - 6 = 0$
4. $x^2 - 13x - 48 = 0$ **5.** $20x^2 - x - 30 = 0$
6. $12x^2 - 19x = 21$ **7.** $12x^2 + 35x = 52$
8. $24x^2 + 2x = 15$ **9.** $54x^2 - 17x = 96$
10. $6x^3 + x^2 - 15x = 0$ **11.** $12x^3 + 5x^2 - 3x = 0$
12. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **13.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
14. $(x - a)^2 + (x - a) - 6 = 0$ **15.** $(x + a)^2 - (x + a) - 12 = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones por el método de completar el cuadrado:

16. $x^2 + 6x = 0$ **17.** $2x^2 - 7x = 0$ **18.** $3x^2 - 5x = 0$
19. $x^2 - 5x + 4 = 0$ **20.** $x^2 - 8x + 16 = 0$ **21.** $x^2 - 3x - 4 = 0$
22. $x^2 - 8x - 9 = 0$ **23.** $2x^2 - 5x - 1 = 0$ **24.** $3x^2 + 4x - 2 = 0$
25. $3x^2 + 2x = -1$ **26.** $4x^2 - 7x = -5$ **27.** $5x^2 - 3x + 2 = 0$
28. $a^2x^2 + 6ax - 27 = 0$ **29.** $a^2x^2 - 4ax - 21 = 0$

Related Review Exercises

Make a table of values for $P(c)$ for the given $P(x)$ if $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

1. $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$

2. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$

3. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x - 6$

4. $P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 10$

Find a polynomial P that has the given zeros.

5. $3, -2, 1$

6. $-2, 5, 4, 1$

7. $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 2$

8. $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

9. $0, -1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$

10. $0, i, -i, 2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}$

Exploratory Exercises

List all *possible* integral zeros of each polynomial.

11. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 6$

12. $P(x) = x^5 + 2x^3 - 5x + 15$

13. $P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 7$

14. $P(x) = -5x^3 + 13x^2 - x - 24$

List all *possible* rational zeros of each polynomial.

15. $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

16. $P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 11x - 9$

17. $P(x) = 8x^2 - 5x + k$

18. $P(x) = ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx + e$

Written Exercises

Find all zeros of each polynomial.

19. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

20. $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 16x^2 - 10x + 8$

21. $P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 11x - 2$

22. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6$

23. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x + 3$

24. $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$

25. $P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 7x + 2$

26. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 2$

27. $P(x) = 18x^3 + 21x^2 - 52x + 20$

28. $P(x) = 5x^3 - 24x^2 + 21x - 4$

29. Two zeros of $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ are -3 and 5. Find all zeros of $P(x)$.

30. One zero of $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 20$ is 4. Find all zeros of $P(x)$.

31. Find all rational zeros of $P(x)$ if $P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 3$.

32. Find all rational zeros of $P(x) = 6x^4 - 13x^3 + 36x^2 - 65x + 30$.

CAPITULO 2

EJERCICIOS 2.1

1. Describir con palabras la regla de correspondencia implícita en los símbolos:
   a. $\cos\theta$.
   b. $\tan\theta$.
   c. $\cot\theta$.
   d. $\sec\theta$.
   e. $\csc\theta$.
2. ¿Puede ser $\sin\theta = 2$ ¿Por qué?
3. ¿Puede ser $\csc\theta < 1$ ¿Por qué?
4. Establezca una relación entre $\sin$ y $\csc$ a partir de sus definiciónes.¿Existen otras relaciones similares para las demás funciones trigonométricas?

EJERCICIOS 2.2.

1. Indique los cuadrantes en los cuales:
   a. $\sin\theta$ es positivo;
   b. $\cos\theta$ es positivo;
   c. $\tan\theta$ es positiva;
   d. $\sin\theta$ es negativo;
   e. $\cos\theta$ es negativo;
   f. $\tan\theta$ es negativa.
2. Halle las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal, cuyo lado terminal pasa por cada uno de los puntos dados.
   a. $(3,4)$;
   b. $(-5,3)$;
   c. $(-12,-5)$;
   d. $(12,-9)$;
   e. $(-3,-4)$;
   f. $(4,9)$;
   g. $(3,-3)$;
   h. $(-1,\sqrt{3})$;
   i. $(-2,1)$;
   j. $(4\sqrt{2},3\sqrt{2})$
3. En la tabla que sigue, dos de las funciones de un ángulo tienen los signos que se muestran. Indique el cuadrante del ángulo y los signos de las demás funciones trigonométricas.

	$a)$	$b)$	$c)$	$d)$	$e)$	$f)$	$g)$	$h)$	$i)$	$j)$	$k)$	$l)$
cuadrante												
$\sin$	+	+					+					
$\cos$			+			+				-	+	
$\tan$		+	-	+	+					+	+	
$\cot$						+		+				-
$\sec$	-				-		-		+			
$\csc$				-				+	-			+

EJERCICIOS 2.3

Halle las funciones trigonométricas del ángulo que satisface las condiciones dadas:

1. $\tan\theta = \frac{3}{4}$, θ en *CI,*

2. $\sin\theta = \frac{4}{5}$, θ en *CII,*

3. $\cos\theta = 3/5$, θ en *CIV,*

4. $\sec\theta = \frac{-13}{12}$, θ en *CIII,*

5. $\cot\pi = \frac{-8}{15}$, π en *CIV,*

6. $\sin\pi = \frac{13}{12}$, π en *CI,*

7. $\sin\pi = \frac{-7}{25}$, π en *CIII,*

8. $\cos\pi = \frac{-1}{17}$, π en *CII,*

9. $\cos\theta = \frac{-2}{5}$, θ en *CII,*

10. $\tan\theta = \frac{-5}{4}$, θ en *CIV,*

11. $\sin\theta = \frac{-40}{41}$, θ en *CIV*

12. $\sec\theta = \frac{-41}{9}$, θ en *CII*

13. $\tan\theta = \frac{5}{12}$

14. $\sin\theta = \frac{3}{5}$

15. $\cos\theta = -5/13$

16. $\cot\theta = \frac{8}{15}$

17. $\sec\theta = \frac{5}{4}$

18. $\csc\theta = \frac{-13}{15}$

19. $\tan\theta = -1$

20. $\sin\theta = \frac{3}{7}$

21. $\cos\theta = \frac{-2}{5}$

22. $\cot\theta = -2$

23. $\tan\theta = \frac{40}{9}$

24. $\cos\theta = \frac{-9}{41}$

25. $\sin\theta = 0.32,\ \theta$ en CI

26. $\cos\theta = 0.28,\ \theta$ en CIV

27. $\tan\theta = -1.5,\ \theta$ en CIV

28. $\cos\theta = \pi,\ \theta$ en $CIII$

29. $\sec\theta = \frac{\pi}{2},\ \theta$ en CI

30. $\csc\theta = -\pi,\ \theta$ en $CIII$

31. Dado $\sin\theta = \frac{3}{5}$, verifique que:

- **a.** $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$
- **b.** $1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$
- **c.** $1 + (\cot\theta)^2 = (\csc\theta)^2$

EJERCICIOS 2.5

1. Trace en posición normal los ángulos que se indican y calcule los valores exactos de sus funciones trigonométricas.

- **a.** $135°$,
- **b.** $240°$,
- **c.** $210°$,
- **d.** $330°$,
- **e.** $0°$,
- **f.** $90°$,
- **g.** $270°$,

2. *a)* Complete la tabla con los valores exactos de las funciones:

θ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o
$\sin\theta$							
$\cos\theta$							
$\tan\theta$							

3. Compruebe que las siguientes proposiciones son verdaderas. La notación $\sin\theta$ significa $(\sin\theta)^2$.

- **a.** $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$
- **b.** $1 + \tan^2\frac{\pi}{6} = \sec^2\frac{\pi}{6}$
- **c.** $1 + \cot^2\frac{\pi}{3} = \csc^2\frac{\pi}{3}$
- **d.** $2\sin 60° \cos 60° = \sin 120°$
- **e.** $\cos^2 45° - \sin^2 45° = \cos 90°$
- **f.** $\cos 60° = \sqrt{\frac{1+\cos 120°}{2}}$
- **g.** $\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{4\pi}{3}}{2}}$
- **h.** $\cos^2\frac{\pi}{4}(1+\tan^2\frac{\pi}{4}) = 1$

4. Halle los valores exactos de las expresiones siguientes;

- **a.** $\tan^2 60° \sec 30° \sin 45°$
- **b.** $\sin^2 90° \cos^2 60° \sec 30°$

c. $\cos^2\pi \tan\frac{\pi}{4} \sec\frac{\pi}{6}$

d. $\csc\frac{\pi}{2} \sin^2\frac{\pi}{2} - \cos^2\frac{\pi}{3}$

e. $\cot 60° - \sin\frac{\pi}{6} \sec\frac{\pi}{3}$

f. $\sec^2 45° \sin 60° - 3\tan\frac{2\pi}{3}$

g. $\sin\frac{\pi}{2} \cos\pi + \tan\frac{\pi}{3} \cot\frac{\pi}{3}$

h. $\sin 45° \cos 45° (\tan 45° + \cot 45°)$

EJERCICIOS 3.4

1. Resuelva el triángulo rectángulo ACB. En caso de usar regla de calculo, redondee los datos a tres cifras significativas.

a. $a = 2, A = 32°$

b. $b = 3, A = 29°$

c. $a = 3, b = 4$

d. $a = 13, b = 5$

e. $a = 12.5, b = 9.1$

f. $a = 16.3, B = 38°30'$

g. $b = 0.64, A = 62°40'$

h. $b = 709, B = 18°10'$

i. $c = 6.29, A = 10°20'$

j. $c = 6.18, B = 30°10'$

k. $a = 127, c = 164$

l. $A = 44°15', a = 843.2$

m. $B = 47°26', c = 4217$

n. $A = 13°30', c = 627$

o. $B = 6°12', c = 1720$

p. $a = 101, b = 120$

q. $a = 14.72, b = 13.14$

r. $b = 0.0353, c = 0.0589$

s. $b = 1.241, c = 3.265$

t. $A = 11°36', b = 0.4214$

EJERCICIOS 3.5

En los problemas que siguen, y a menos de que se especifique lo contrario, la altura de un objeto significa su altura respecto a un plano horizontal que pasa por el punto de observación; su distancia es la distancia horizontal.

1. En un circulo de 10 cm. De radio, una cuerda tiene 15 cm. De longitud. Halle el ángulo en el centro, subtendido por la cuerda.

2. La diagonal de un rectángulo mide 8.25 cm. Y el menor de sus lados 3.14 cm. Calcule el ángulo formado por la diagonal y el lado mayor, y la longitud de este.

3. Un avión de reconocimiento localiza una batería cuyo ángulo de situación es de $-23°10'$. Si el avión vuela a $3{,}000$ metros de altura, halle la distancia a que está la batería de la proyección horizontal del avión.

4. El ángulo de situación de la cresta de un árbol es de $32°$ respecto a un punto situado a 25 metros de su base; halle su altura.

5. Durante un aterrizaje, el piloto desea pasar 10 metros arriba de una pared de 25

metros de altura y tocar tierra 200 metros mas halla de la pared. Halle el ángulo de descenso.

6. Un avión de reconocimiento que vuela a 1000 metros, ve 2 botes delante de el, si sus ángulos de situación son $-42°12'$ y $-31°15'$ respectivamente, halle las distancias de los botes a la proyección horizontal del avión.

7. El ángulo de situación de la cresta de un risco inaccesible es de $48°$; retrocediendo 150 m, el ángulo de situación es $27°$. Halle la altura del risco.

8. Del techo de un edificio de 50 metros el ángulo de situación de un globo es de $+20°$; respecto a una ventana situada a 20 metros debajo del techo, el ángulo de situación es $30°$. Halle

a. la distancia horizontal del globo y

b. la altura del mismo sobre el suelo.

9. Un cuadro de 3.65 metros de alto, cuelga de una pared de tal modo que su arista inferior esta a 3 metros sobre el suelo. Si los ojos del observador están a 1.65 metros de altura, y el ángulo de situación de la arista superior del cuadro es de $44°$, halle la distancia del observador a la pared y la paralaje del cuadro respecto al observador (ángulo subtendido por el cuadro y cuyo vértice esta en los ojos del observador).

10. Un observador ve el ángulo de situación de la punta de una torre situada a 100 metros de él, es de $10°$. Halle la distancia vertical; de los pies del observador, cuya estatura es de 1.8 metros a la base de la torre y diga si están arriba o debajo de esta.

11. Un avión de reacción pasa a $6,000$ metros de altura, en vuelo horizontal sobre una estación radar; 10 segundos después es observado desde el radar con un ángulo de elevación de $49°$. Halle la velocidad de crucero del avión, respecto al suelo.

12. Un avión que vuela a 250 kph respecto al aire, desciende $21°$ respecto a la horizontal. Halle la componente vertical de la velocidad.

13. Halle la altura mínima de un cohete para que pueda ser visto desde un punto situado a 200 Km de distancia, contada de la superficie de la tierra a partir de la plataforma de lanzamiento. El radio de la tierra mide $6,400$ Km. La distancia al lugar de lanzamiento es la longitud del segmento de arco en la superficie de la tierra.

14. Un buque navega 32 Km. al sur y después 15 Km. al oeste. Determine el rumbo que debe tomar para regresar a su punto de partida.

15. Un buque navega 18.3 Km. con un derrotero de $110°$, después recorre 42 Km. a $200°$. Halle el derrotero de regreso al punto de partida y la distancia que debe recorrer para legar a el.

16. Un buque que navega con un derrotero de $60°$, ve una luz cuyo azimuth es de $25°$. Después de recorrer 5 Km. sin cambiar de rumbo, localiza al luz, ahora con un azimuth de $330°$. Halle la distancia que separaba a al luz del buque.

17. Un submarino en reposo ve que en el cuadrante NW navega un destroyer cuyo garrotero es $60°$ y que va a pasar a $1,200$ metros de distancia. Se determina que el destroyer se ha desplazado 100 metros durante 5 minutos. Halle el azimuth del destroyér respecto al submarino, 8 minutos después de haber pasado.

18. Los puntos A y B están: el primero 3.4 Km al sur de C y el segundo a 6.3 Km. al este de este último punto. Halle el azimuth de A respecto a B.

19. Un topógrafo desea determinar la anchura de un río. Al efecto, del punto C de la ribera, ve que el punto A, al otro lado del río queda el $N52°E$; después se desplaza hacia el este, siguiendo la orilla del río hasta el punto B situado a 252 metros de C. si B queda al sur de A, halle la altura buscada.

20. En un lote triangular ABC, $AC = 326$ m apunta al $S82°30'E$ y $CB = 222$ m tiene un rumbo $N61°20'W$. Halle la longitud y el rumbo de AB. (Sugestión: trace la altura relativa del lado AC.)

21. Una antena de TV está sostenida por 3 tirantes de acero sujetas a anclas situadas a 67 metros de la base e igualmente espaciadas alrededor de ella. Halle el ángulo que forma cada tirante con el piso y la suma de sus longitudes, si sus retenes están, respectivamente, a 67, 100 y 125 metros de altura sobre el suelo.

22. Halle las componentes X y Y de los siguientes vectores:

a.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
v	18	10	8	20	25	32	57	128
θ	30^o	225^o	120^o	270^o	130^o	98^o	315^o	-56

23. Halle la magnitud de u la dirección h de los vectores siguientes, de los cuales se conocen sus componentes escalares:

a. $V_x = 3, V_y = 5$

b. $V_z = 210, V_y = -132$

c. $V_z = -12, V_y = -5$

d. $V_z = -203, V_y = -87.6$

24. Una fuerza horizontal de 328.2 Kg está orientada hacia $S28°14'W$. Halle sus componentes Sur y Oeste.

25. Una fuerza horizontal tiene una componente norte de 275 Kg y una oeste de 352 Kg. Halle la magnitud y dirección de la fuerza.

26. Halla las componentes X y Y de la fuerza de 60 kg que aparece en la figura 3.5-8, note en cada caso la selección de los ejes.

27. Un avión sigue un derrotero de $215°$ a 650 kph. Halle la distancia que vuela hacia el sur en una hora.

28. Una partícula tiene una aceleración de 2.92 m / seg.^{2} formando un ángulo de $52°30'$ con el eje X. Halle las componentes X y Y de su aceleración.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 3.

1. Escriba las definiciones de las funciones trigonometricas de un ángulo agudo de un triangulo rectángulo.

2. Sea z la longitud de la diagonal de un retangulo de lados x y y, donde y es mayor que x. Designe por θ el ángulo entre x y z:

a. halle x en términos de y y θ.

b. halle y en términos de z y θ.

3. Sean a y b los ángulos agudos de un triangulo retangulo cuyo cateto opuesto a a vale 1. muestre que $1 + \tan^2 a = \sec^2 b \tan^2 a$

4. Resuelva el triangulo retangulo ACB si:

a. $a = 3, b = 5$

b. $B = 49°10', b = 4.32$

c. $A = 172, c = 268$

5. Un poste de teléfono de 15 metros de longitud, está inclinado $15°$ respecto a la vertical. Diga cuanto aumentara su altura si estuviera vertical.

6. De un punto P se trazan tangentes a un circulo de 10 cm de radio. Si el ángulo que forman es de $23°$, halle la longitud de las tangentes.

7. Respecto a la base y punta de una torre de 40 metros de alto, los ángulos de situación de la parte mas alta de un edificio son, respectivamente, $58°$ y $30°$, halle la altura del edificio y su distancia a la torre si las bases de ambos están en el mismo plano horizontal.

8. Halle las componentes V_x y V_y de los siguientes vectores, de los cuales se conoce su magnitud y su dirección.

- **a.** $v = 25, \theta = 120°$
- **b.** $v = 50, \theta = -79°$

CAPITULO 9

EJERCICIOS 9.2

1. Usando la ley de los senos el elemento que se pide:

- **a.** $A = 60°, B = 45°, a = 10$, encuentre b.
- **b.** $A = 120°, C = 30°, c = 10$, encuentre a.
- **c.** $B = 30°, C = 135°, b = 3\sqrt{2}$, encuentre c.
- **d.** $A = 120°, a = 2\sqrt{3}, b = 1$, encuentre b.
- **e.** $B = 30°, b = 8, a = 8\sqrt{2}$, encuentre A (dos respuestas).

EJERCICIOS 9.3

1. Resuelva los siguientes triángulos, si:

- **a.** $a = 4.22, A = 72°20', B = 45°30'$.
- **b.** $b = 121.2, A = 26°23', C = 44°12'$.
- **c.** $b = 0.5359, A = 41°20', B = 120°12'$.
- **d.** $C = 26°40', B = 37°20', a = 468.3$.
- **e.** $A = 69°59.2', B = 21°25.3', c = 12.568$.
- **f.** $B = 38°38.4', C = 97°21.6', a = 117.05$.

2. Resuelva los siguientes triángulos, si.

- **a.** $a = 4.247, b = 7.680, A = 20°40'$.
- **b.** $c = 43.20, b = 32.91, C = 48°18'$.
- **c.** $b = 16.39, c = 20.11, B = 118°48$
- **d.** $b = 315.0, c = 573.1, B = 57°12'$.
- **e.** $C = 124°12.2', a = 5132.0, c = 7513.3$
- **f.** $A = 51°23.6', a = 18.765, b = 23.523$.

3. Use las fórmulas del problemas 9.2-3 para calcular el área de los siguientes triángulos.

- **a.** $a = 2342, b = 2160, C = 52°17'$.
- **b.** $c = 10.37, A = 21°09', B = 108°43'$.

4. Se desea establecer un puesto A al occidente de B, inaccesible desde este punto. Se escogió entonces un puesto C, al $N31°42'W$ de B, a la distancia $BC = 825.3$ m. A queda ahora al $S41°20'W$ de C, halle la distancia CA.

5. Un hombre desea conocer el ángulo que forma una colina con la horizontal. Al efecto, desde el punto A al pie de la cuesta localiza

- **a.** un punto B de la colina cuya distancia a A, medida con cadena (sobre el suelo), es de 75m. y
- **b.** un punto C, en el mismo plano horizontal de A y contenido en el, plano vertical

que pasa por A y B, situado a 30m. de A. (la proyección horizontal de B, y los puntos A y C están alineados). Si desde C, el ángulo de situación de B es $12°25'$, halle la pendiente de la colina en grados, o sea el ángulo que forma AB con la horizontal.

6. Dos observadores, distantes entre si 3600 m y situados en el mismo plano horizontal, ven al mismo tiempo un aeroplano que vuela entre ellos, de modo que su proyección horizontal está en la línea de ambos. Los ángulos de situación reportados por los observadores fueron $36°22'$ y $45°12'$ respectivamente. Halle la altura del aeroplano respecto al plano horizontal.

7. Un viejo mapa señala un tesoro enterrado en el punto C, que está al, $N70°18'W$ de cierto árbol T. Para evitar una barranca entre T y C, el mapa dice que hay que caminar 315.3 m hacia el $N10°24'W$ y después 260 m hacia el lugar del tesoro. Si el descubridor del mapa ha estudiado trigonometría, ¿ iría a buscar el tesoro? ¿Por que?

8. El piloto de un barco que sigue un derrotero de $290°$, ve en un instante dado que está alineado con 2 faros, que están al $N8°20'E$ respecto a él; ambos faros distan entre si 1.8 km. Diez minutos después ve que sus visuales a los faros forman entre sí un ángulo de $15°10'$ y que el faro que está más hacia el Norte, tiene un azimuth de $50°$, o sea que está hacia el $N50°E$. halle la velocidad del barco.

9. La base de una torre de microondas, tiene un ángulo de elevación de $24°19'$ respecto a un observador situado a 200 m cuesta debajo de la base. Dicho observador también ve que una sección de la torre necesita reparación. Si los ángulos de situación de los extremos de la sección son $48°37'$ y $63°21'$, calcule la longitud de la sección por reparar.

EJERCICIOS 9.4

Utilizando la ley de los cosenos, calcula el elemento del triángulo ABC que se pide.

1. $a = 3, b = 4, C = 60°$, encuentre c.
2. $a = 3, b = 5, c = 6$, encuentre C.
3. $b = 5, c = 7, A = 90°$, encuentre a.
4. $a = 5, c = 13, B = 120°$, encuentre b.

EJERCICIOS 9.5

1. Resolver los siguientes triángulos ABC, si.
   a. $b = 43.70$, $c = 41.70$, $A = 61°10'$.
   b. $c = 5.750$, $a = 1.058$, $B = 118°31'$.
   c. $a = 378.5$, $b = 275.9$, $C = 25°48'$.
   d. $B = 38°06'$, $c = 21.51$, $a = 11.48$.
   e. $a = 321.34$, $b = 249.07$, $C = 30°40.6'$.
   f. $a = 109.03$, $c = 102.12$, $B = 53°23.9'$.
2. Use el método para resolver los triángulos siguientes:
   a. $a = 152.0$, $b = 129.0$, $C = 15°11'$.
   b. $a = 3132$, $b = 2476$, $C = 116°12'$.
   c. $B = 67°20'$, $a = 20.71$, $c = 28.41$.
   d. $b = 6.390$, $c = 4.690$, $A = 126°16$.
   e. $a = 2184$, $b = 717.0$, $C = 34°09'$.
3. Resuelva los siguientes triángulos ABC:
   a. $a = 794.0$, $b = 602.3$, $c = 847.0$.

b. $a = 92.41$, $b = 73.59$, $c = 39.81$.
c. $a = 4.377$, $b = 6.211$, $c = 2.168$.
d. $a = 28.40$, $b = 32.51$, $c = 13.70$.
e. $a = 809.17$, $b = 121.36$, $c = 480.79$.
f. $A = 5134.2$, $b = 9268.7$, $c = 7313.34$.

4. Un topógrafo en B observa dos puntos A y C, en los extremos de un ángulo, si $\overline{BA} = 331.7mts$, $\overline{BC} = 242.2mts$, y el ángulo $ABC = 120°41'$, calcule la distancia $\overline{AC}$.

5. Un triángulo está formado por tres fuerzas, $f_1 = 25.07dinas$, $f_2 = 22.60dinas$ y $f_3 = 41.72dinas$. Calcule el ángulo que forman f_1 y f_2.

6. Los lados adyacentes de un paralelogramo miden 20.62 y $24.73\ cm$. Si una de las diagonales mide $32.04cm$, diga si es la mayor o la menor.

7. Una pieza de artillería está en A y no puede ver el blanco C. Si el puesto de mando B está a $35km$ de A y a 22 de C, calcule la distancia de la pieza al blanco si el ángulo ABC es de $50°10'$.

8. Un aeroplano sale del puerto aéreo A a las $10hrs$ y sigue derrotero de $45°51'$. Volando a $325Kph$. Al mismo tiempo, otro aeroplano sale del puerto aéreo B, situado a $525Km$. Al este de A y vuelve a $280Kph$. Halle el derrotero del segundo aeroplano para que encuentre al primero a las $12hrs$.

9. Un bote patrulla recorre $37.80Km$. Con derrotero $131.3°$ y después $28.30Km$. Con derrotero $036.7°$. Halle el derrotero y la distancia que debe recorrer, para regresar por la ruta más corta.

10. Un buque A zarpa del puerto P con derrotero de $053°36'$ a la velocidad de crucero de $10.30\ nudos$; 45 minutos más tarde zarpa el buque B del mismo puerto con un derrotero de $022°42'$ a la velocidad de crucero de $8.30\ nudos$. Halle la distancia entre los buques 2 horas después de haber zarpado B.(Un nudo es una milla náutica por hora, o sea m/h).

11. Tres aldeas A, B y C distan entre sí $AB = 32km$, $BC = 18km$ y $AC = 20km$. La carretera (recta) de A a C, va a prolongarse para que in nuevo camino que parte de B la encuentren ángulo recto en el punto D. Halle $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 9.

1. Resuelva el triángulo ABC si
a. $A = 30°$, $a = 15$, $c = 10$.
b. $A = 48°20'$, $B = 32°10'$, $c = 122$.
c. $A = 60°$, $b = 25$, $c = 50$.
d. $a = 6$, $b = 5$, $c = 9$.

2. Un tren sale de una estación y viaja a $85kph$ en una vía recta; otro tren sale de la misma estación una hora mas tarde, sobre otra vía recta que forma con la anterior un ángulo de $118°$. Si el segundo tren se desplaza a razón de $50kph$. Halle la distancia entre los trenes 3 horas después de la salida del primer tren.

CAPÍTULO I

I. - SISTEMA DE COORDENADAS EN EL PLANO

1. *Introducción y generalidades.*

La Geometría Análitica surgio durante el Renacimiento, en el siglo XVI, con Renato Descartes.

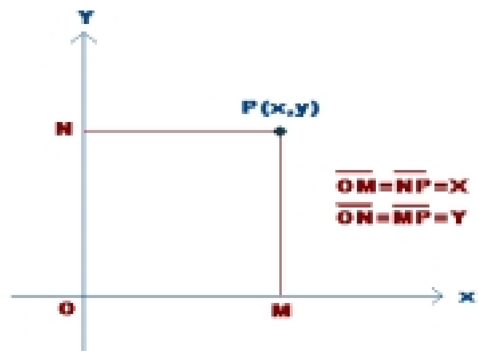
La geometría plantea básicamente dos problemas:

a. **i.** Obtener la gráfica dada una ecuación y,

ii. Obtener la ecuación dadas unas propiedades de la figura.

b. *Def^{n}.Geometría Analítica* es la parte de las matemáticas que relaciona el Álgebra con la Geometría, asociando números con puntos y ecuaciones con figuras.

c. *Pareja ordenada*. La posición de un punto en el plano esta determinada por las distancias a los ejes, donde la distancia sobre el eje X recibe el nombre de *Abscisa* y la distancia sobre el eje Y el de *ordenada*



Represente en un plano cartesiano los puntos

i. $(5,-3)$

ii. $(-8,7)$

iii. $(-2,-3)$

d. *Producto cartesiano*:”A cruz B” es el conjunto formado por las parejas ordenadas (a,b) tales que el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento pertenece al segundo conjunto.

$AxB = \{(a,b)/a \in A \wedge b \in B\}$

ejemplos: sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$ entonces

$AxB = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$BxA = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

Obtenga los productos cartesianos AxA, BxB, $AxAxA$

2. *Sistema de coordenadas en el plano.*

La cardinalidad del Producto Cartesiano de dos conuntos es igual al producto de las cardinalidades de los dos conjuntos, de tal manera que la cardinalidad del producto anterior $n(AxB) = n(A)xn(B) = 3*2 = 6$.

El número de subconjuntos del producto cartesiano es igual a $2^{n(AxB)} = 2^6 = 64$

Si tenemos el producto cartesiano RxR (Reales cruz Reales) el número de subconjuntos ¡ES INFINITO x INFINITO!, por lo que para representar dicho producto cartesiano, utilizemos el plano cartesiano. Entonces los subconjuntos los representamos por las ecuaciones las cuales pueden representar desde un conjunto vacío hasta un conjunto infinito de elementos.

ejemplo: Sea $A_1 = \{\ldots(-5.48,-5.48),\ldots,(0,0),(1,1),(\sqrt{2},\sqrt{2}),(3,3),\ldots\}$ un subconjunto de RxR, donde la regla de correspondencia es ”Conjunto formado por las parejas ordenadas tales que el primer elemento es igual al segundo elemento” y para poder representarlo de una manera más simple escribiriamos $A_1 = \{(x,y)/x = y\}$ o aún más simple $x = y$ el cuál nos representará en el plano cartesiano una recta que bisecta al primer y tercer cuadrante

3. *Segmentos Dirigidos*

Convensión de Signos.

Los segmentos que se dirigen a la derecha son ... $+$

Los segmentos que se dirigen a la izquierda son ...$-$

Los segmentos que se dirigen hacia arriba son ... $+$

Los segmentos que se dirigen hacia abajo son ... $-$

El segmento $\overline{AB} = -\overline{BA}$

Teorema: Sean l una recta cualquiera

A, B, C Tres puntos sobre l

$\Rightarrow$ Se dice que los tres puntos determinan sobre l segmentos tales que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Los puntos A, B, y C, se pueden colocar de 6 maneras diferentes y para todas ellas se cumple el anterior teorema.

Ejemplo:

$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$

pero $\overline{BA} = -\overline{AB}$,

entonces $(-AB) + \overline{AC} = \overline{BC}$

Distancia de un punto a otro:

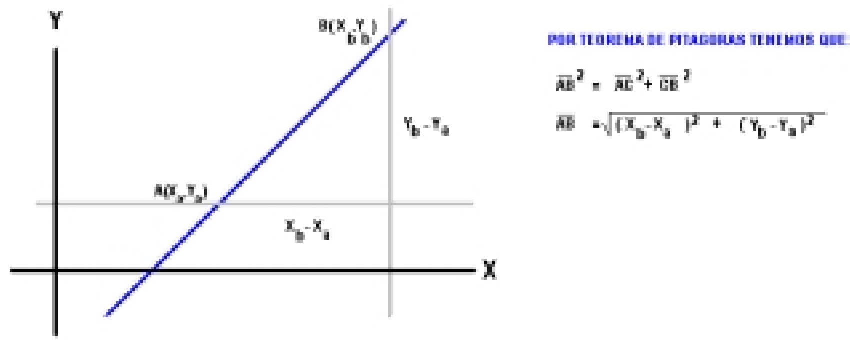
Teorema: Sean l la recta numérica

A, B Dos puntos sobre l

x_a, x_b La distancia DEL origen AL punto respectivamente.

$\Rightarrow$ Se dice que la distancia DEL punto A AL punto B esta determinado por: $AB = x_b - x_a$

4. *Distancia entre dos puntos dados*.



5. *División de un segmento en una razón dada*.

Razón es el cociente de dos cantidades.

Teorema: Sean l la recta numérica

A, B Dos puntos sobre l

(x_a, y_b) (x_b, y_b) Sus coordenadas respectivamente

$\Rightarrow$ Se dice que el punto P divide al segmento AB en dos segmentos tal que:

$$r =: \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x_p - x_a}{x_b - x_p} = \frac{y_p - y_a}{y_b - y_p}$$

Conociendo la razón y las coordenadas inicial y final tenemos.

$$x_p = \frac{x_a + r x_b}{1 + r} \qquad y_p = \frac{y_a + r y_b}{1 + r}$$

6. *Punto medio*.

Teorema: Sean l la recta numérica

A, B Dos puntos sobre l

(x_a, y_b) (x_b, y_b) Sus coordenadas respectivamente.

$\Rightarrow$ Se dice que el punto $P_m(x_m, y_m)$ divide al segmento $\overline{AB}$ en dos segmentos iguales tal que:

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_m = \frac{y_a + y_b}{2}$$

7. *Pendiente de un segmento*. La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación.

Teorema: Sean l la recta numérica

A, B Dos puntos sobre l

(x_a, y_b) (x_b, y_b) Sus coordenadas respectivamente.

$\Rightarrow$Se dice que la pendiente de l esta dada por $m = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$

8. *Ángulo entre dos rectas*.

Sean l_1 y l_2 dos rectas soble el plano

m_1 y m_2 sus pendientes respectivamente

θ angulo formado por l_1 y l_2, donde l_1 es el lado inicial y l_2 el lado final

$\Rightarrow$ Se dice que el ángulo θ formado de l_1 a l_2 esta dado por $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$

9. *Condición de parpalelismo y perpendicularidad*

Sean l_1 y l_2 dos rectas soble el plano

m_1 y m_2 sus pendientes respectivamente

$\Rightarrow$ Se dice que las rectas son:

a. Paralelas si y solamente si $m_1 = m_2$

b. Perpendiculares si y solamente si $m_1 m_2 = -1$

10. *Area de un poligono*

Teorema: Sean $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ Los vertices de un Polígono de n lados sobre el plano.

(x_i, y_i) Sus coordenadas respectivamente.

$\Rightarrow$ Se dice que el área del polígono dado, tomando sus coordenadas en sentido contrario a las menecillas del reloj, esta dada por

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & y_1 \\ y_1 & y_2 & x_3 & \ldots & y_n & x_1 \end{vmatrix}$$

GRUPO 3

1. Dígase el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas dirigidas.

a. El eje X. b)El eje Y. c)Una recta paralela al eje X y dirigida hacia la derecha. d) Una recta paralela al eje X y dirigida hacia la izquierda.

2. Digasé la pendiente de cada una de las siguientes rectas dirigidas:

a. El eje X. b) Una recta paralela al eje X y dirigida ya sea a la izquierda o derecha. c)La recta que pasa por el origen y que biseca el cuadrante I. d)La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante II.

3. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-3,2)$ y $(7,-3)$.

4. Los vértices de un triángulo son los puntos $(2,-2)$, $(-1,4)$, y $(4,5)$ calcular la pendiente de cada uno de los lados.

5. Demostrar por medio de pendientes que los puntos $(9,2)$, $(11,6)$, $(3,5)$ y $(1,1)$. Son vértices de un paralelogramo.

6. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $(3,2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

7. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2,7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, ¿cuál es la abscisa de A y cuál es la ordenada de B.

8. Tres de los vértices de un paralelogramo son $(-1,4)$, $(1,-1)$ y $(6,1)$. Si la ordenada del cuarto vértice es 6, ¿ cuál es su abscisa?.

9. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $(-2,1)$, $(3,4)$, $(5,-2)$. Comprobar los resultados.

10. Demostrar que los puntos $(1,1)$, $(5,3)$, $(8,0)$ y $(4,-2)$ son vértices de un paralelogramo y hallar su ángulo obtuso.

11. Demostrar que los puntos $(1,1)$, $(5,3)$ y $(6,-4)$ son vértices de un triángulo isósceles, y hallar uno de los ángulos iguales.

12. Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $(2,5),(7,3),(6,1)$ y $(0,0)$. Comprobar los resultados.

13. Dos rectas se forman cortando un ángulo de 135^o. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial.

14. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45^o. La recta inicial pasa por los dos puntos $(-2,1)$ y $(9,7)$, y la recta final pasa por el punto $(3,9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2, Hallar la ordenada de A.

15. Por medio de las pendientes demostrar que los tres puntos $(6,-2),(2,1)$ y $(-2,4)$ son colineales.

16. Una recta pasa por los dos punto $(-2,-3)$ y $(4,1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?

17. Hallar la ecuacion a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasan los puntos $(2,-1)$, $(7,3)$.

18. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $(3,-1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

19. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $(-2,5)$ y $(4,1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $(-1,1)$ y $(3,7)$.

20. Una recta l_1 pasa por los puntos $(3,2)$ y $(-4,-6)$ y otra recta l_2 pasa por el punto $(-7,1)$ y el punto A cuya ordenada es $-6.$ Hallar la abscisa del punto A, sabiendo que l_1 es perpendicular a l_2.

GRUPO 5.

En cada uno de los ejercicio 1-25 discutasé la ecuación estudiando las intercepciones simetría y extensión. Después trace la gráfica correspondiente.

1. $5x + 4y - 20 = 0$
2. $3x - 2y = 0.$
3. $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$
4. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0.$
5. $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0.$
6. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0.$
7. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0.$
8. $16x^2 - y = 0.$
9. $16y^2 - x = 0.$
10. $x^2 - y^2 - 9 = 0.$
11. $y = x^3 + x^2 - 9x - 9.$
12. $8x^3 - y = 0.$
13. $x^3 - x - y = 0.$
14. $x^4 - 9x^2 - y = 0.$
15. $x - y^4 + 9y^2 = 0.$
16. $x^2 - y^3 = 0.$
17. $x^2 + y^2 - 4y = 0.$
18. $x^2 - 6x + y^2 = 0.$
19. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14.$
20. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0.$
21. $x^2 + 4x + 3y + 1 = 0.$
22. $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0.$
23. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0.$
24. $4x^2 - y^2 - 2y = 2.$
25. $y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0.$

LA LINEA RECTA: GRUPO 9.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,5)$ y tiene de pendiente 2.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-6,-3)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45^o.

3. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3, y cuya intercepción con el eje Y es -2.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $A(4,2)$ y $B(-5,7)$.

5. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(6,7)$, $D(8,0)$, hallar las ecuaciones de sus lados.

6. Los segmentos que una recta determinan sobre los ejes X y Y son 2 y -3 respectivamente. Hallar su ecuación.

7. Una recta pasa por los dos puntos $A(-3,-1)$ y $B(2,-6)$ hallar su ecuación en la forma simétrica.

8. Una recta de pendiente de -2, pasa por el punto $A(-1,4)$ hallar la ecuación en la forma simétrica.

9. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento $A(-3,2)$, $B(1,6)$.

10. Una recta pasa por el punto $A(7,8)$ y es paralela a la recta $C(-2,2)$ y $D(4,-4)$ Hallar su ecuación.

11. Hallar la ecuación de una recta que pasa por le punto $A(-2,4)$ y determina sobre el eje X el segmento -9.

12. Demostrar que los puntos $A(-5,2)$, $B(1,4)$ y $C(4,5)$ Son colineales hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

13. Hallar la ecuación de la mediatríz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x+3y-15=0$.

Los ejercicios 14-21 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-2,1)$, $B(4,7)$ **y** $C(6,-3)$.

14. Hallar las ecuaciones de los lados.

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuestos $\overline{BC}$.

16. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice B y trisecan al lado opuesto $\overline{AC}$.

17. Hallar los vértices de un triángulo formando por la rectas que pasan por el vértice. A, B y C y son paralelas a los lados opuestos.

18. Hallar las ecuaciónes de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.

19. Hallar la ecuación de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección. Este punto se llama $Circuncentro$.

20. Hallar la ecuación de las alturas y su punto de intersección. Este punto se lama $Ortocentro$.

21. Hallar las coordenadas del pie de la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$. A partir de estas coordenadas hállese la longitud de la altura y luego el área del triángulo.

22. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es de -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+y-8=0$ y $3x-2y+9=0$.

23. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son $3x-8y+36=0$, $x+y-10=0$, $3x-8y-19=0$ y $x+y+1=0$. Demostrar que la figura es un paralelogramo, y hallar las coordenadas de sus vértices.

24. Hallar el área del triángulo rectángulo formados por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $5x + 4y + 20 = 0$.

25. Las coordenadas de un punto P son $(2,6)$, y la ecuación de una recta l es $4x + 3y = 12$. Hallar la distancia del punto P a la recta l siguiendo en orden los siguientes paso,

a. Hallar la pendiente de l,

b. Hallar la ecuación de la recta l', que pasa por P y es perpendicular a l

c. Hallar las coordenadas de P', punto de intersección de l y l', Hallar la longitud del segmento PP'.

26. El punto P de Ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $A(7,-2)$. Calcular la abscisa de P.

27. Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax - By + 4 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $C(-3,1)$ y $D(1,6)$.

28. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $5x - 7y + 27 = 0$, $9x - 2y - 15 = 0$. Hallar sus ángulos y comprobar los resultados.

29. Una recta pasa por los dos puntos $A(-1,3)$ y $B(5,4)$. Escríbase su ecuación en forma de determinante. Verifiquese el resultado desarrollando el determinante.

GRUPO 10.

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que pasa por el punto $(-2,4)$ y tienen una pendiente igual a -3.
2. Hallar la ecuación de una recta determinando los coeficientes de la forma general si los segmentos que determinan sobre los ejes X y Y, es decir sus intercepciones son 3 y $-5,$ respectivamente.
3. Hallar la ecuación de la recta determinando los coeficientes de la forma general que es perpendicular a la recta $3x-4y+11=0$. Y pasa por el punto $(-1,-3)$.
4. Hallar el valor de k para que la recta $kx+(k-1)y-18=0$ sea paralela a la recta $4x+3y+7=0$
5. Determinar el valor de k para que a la recta $k^2x+(k+1)y+3=0$ sea perpendicular a la recta, $3x-2y-11=0$.
6. Hallar la pendiente y la intercepción de la recta $7x-9y+2=0$.
7. Hallar la pendiente, ángulo de inclinación y las intercepciones de la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y es perpendicular a la recta $2x-7y+2=0$.
8. Determinar el valor de k para que la recta $4x+5y+k=0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de área igual a $2\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.
9. En las ecuaciones $ax+(2-b)y-23=0$ y $(a-1)x+by+15=0$ hallar los valores de a y b para que representan las rectas que pasen por le punto $(2,-3)$.
10. Demostrar que la recta que pasa por los puntos $(4,-1)$ y $(7,2)$ bisecta la segmento cuyos segmentos son los puntos $(8,-3)$ y $(-4,-3)$.
11. Demostrar que la rectas $2x-y-1=0$, $x-8y+37=0$ y $2x-y-16=0$. y $x-8y+7=0$ forman un paralelogramo y hallar las ecuaciones de sus diagonales.
12. Demostrar que las rectas $5x-y-6=0$, $x+5y-22=0$. $5x-y-32=0$ y $x+5y+4=0$ forman un cuadrado.
13. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $4x-9y+11=0$ y $3x+2y-7=0$.
14. Hallar las ecuaciones del recta que pasan por el punto $(2,-1)$, y que forma cada una un ángulo de 45^o con la recta $2x-3y+7=0$.
15. Los vértices de un triángulo son $(1,1)$, $(4,7)$ y $(6,3)$ Demostrar que el baricentro (punto de intersección de las medianas), el circuncentro (punto de intersección de las mediatrices) y el ortocentro (punto de interseccion de las alturas) son colineales.
16. Desde el punto $(6,0)$ se trazan perpendiculares a los lados $5x-y-4=0$; $y=1$, y $x-y-4=0$, de un triángulo. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son colineales.

CIRCUNFERENCIA

Circunferencia es el lugar geometrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia constante se llama radio.

Forma ordinaria de la Circunferencia

Sean:

$C(h,k)$ Coordenadas del Centro de la circunferencia.

r Radio. Distancia del centro a la circunferencia.

Entonces se dice que la ecuación de la circunferencia con centro en $C(h,k)$ y radio igual a r está dada por:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Forma ordinaria de la circunferencia

Demostración:

$\overline{CP}=r$

$\sqrt{(x_p-x_c)^2+(y_p-y_c)^2}=r$ sustituyendo

$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$ elevando al cuadrado ambos terminos

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ que es lo que queriamos demostrar.

Ejemplos:

Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(2,-3)$ y un radio igual a 4

$(x-2)^2+[y-(-3)]^2=4^2$ Sustituyendo en la fórmula

$x^2-4x+4+y^2+6y+9=16$ Efectuando los cuadrados

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$ Acomodando términos e igualando a cero.

FORMA CANÓNICA DE LA CIRCUNFERENCIA

Para el caso particular en que el centro C está en el origen, $h=k=0,$ y tenemos

$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$

$x^2+y^2=r^2$ Forma canónica de la circunferencia.

Ejemplo

$x^2+y^2=25$ Circunferencia con centro en el origen y radio igual a 5

FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA CIRCUNFERENCIA.

Ecuación General de Segundo Grado, con dos variables: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sean:

$C : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ una circunferencia en el plano

Entonces se dice que la ecuación de la cincunferencia en su forma general esta dada por:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde

$D = -2h$

$E = -2k$

$F = h^2 + k^2 - r^2$

Demostración:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2 = 0$ Efectuando los productos notables

$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$ Acomodando términos

$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

Si hacemos

$D = -2h$

$E = -2k$

$F = h^2 + k^2 - r^2$

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA SUJETA A TRES CONDICIONES

En la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, hay tres constantes arbitrarias independientes, $h, k, r.$ De manera semejante, en la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ hay tres constantes arbitraias independientes D, E y $F.$ Como la ecuación de toda circunferencia puede escribirse en cualquiera de las dos formas, la ecuación de cualquier circunferencia particular puede obtenerse determinando los valores de tres constantes. Esto requiere tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por tanto, analiticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes. Geométricamente, una circunferencia queda, tambien, perfectamente determinada por tres cualesquiera de sus puntos.

Método 1

Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(4,-1)$, $B(0,-7)$, $C(-2,-3)$.

Supongamos que la ecuación buscada, es en la forma general,

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

En donde las constantes D, E y F deben ser determinadas.

Como los tres puntos están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación general. De acurdo con esto, tenemos las tres ecuaciones siguientes correspondientes a los puntos dados:

$(4,-1) \qquad 4^2+(-1)^2+D(4)+E(-1)+F=0$
$(0,-7) \qquad 0^2+(-7)^2+D(0)+E(-7)+F=0$
$(-2,-3) \qquad (-2)^2+(-3)^2+D(-2)+E(-3)+F=0$
Simplificando y resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incognitas

$$\begin{array}{l} 17+4D-E+F=0 \\ 49-7E+F=0 \\ 13-2D-3E+F=0 \end{array}$$

, Solution is : $\{F=3, E=\frac{52}{7}, D=-\frac{22}{7}\}$

$7x^2+7y^2-22x+52y+21=0$

Método 2

Teorema 1: El centro de una circunferencia pertenece a la mediatriz de cualquiera de sus cuerdas.

Teorema 2: El radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.

Aplicando el teorema 1, vamos a encontrar las mediatrices del segmento $\overline{AB}$ y del segmento $\overline{BC}$ (seleccionados arbitrariamente)

Mediatriz del segmento AB

$m_{AB}=\frac{-7+1}{0-4}=\frac{3}{2}$ perpendicular $m=-\frac{2}{3}$

Punto medio $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-1-7}{2}\right)=(2,-4)$

Ecuación $y+4=-\frac{2}{3}(x-2) \qquad 2x+3y+8=0$

Mediatriz del segmento BC

$m_{Bc}=\frac{-3+7}{-2-0}=-2$ perpendicular $m=\frac{1}{2}$

Punto medio $\left(\frac{0-2}{2}, \frac{-7-3}{2}\right)=(-1,-5)$

Ecuación $y+5=\frac{1}{2}(x+1) \qquad x-2y-9=0$

$$\begin{array}{l} 2x+3y+8=0 \\ x-2y-9=0 \end{array}$$

, Solution is : $\{y=-\frac{26}{7}, x=\frac{11}{7}\}$

$r=\sqrt[2]{\left(0-\frac{11}{7}\right)^2+\left(-7+\frac{26}{7}\right)^2}=\frac{5}{7}\sqrt{26}$

$\left(x-\frac{11}{7}\right)^2+\left[y-\left(-\frac{26}{7}\right)\right]^2=\left(\frac{5}{7}\sqrt{26}\right)^2$

$\left(x-\frac{11}{7}\right)^2+\left(y+\frac{26}{7}\right)^2=\frac{650}{49}$

$7x^2+7y^2-22x+52y+21=0$

Método 3

La ecuación d la circunferencia que pasa por los puntos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ y $C(x_C,y_C)$ esta dada por el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$A(4,-1)$, $B(0,-7)$, $C(-2,-3)$.

$\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 17 & 4 & -1 & 1 \\ 49 & 0 & -7 & 1 \\ 13 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, determinant: $7x^2+7y^2-22x+52y+21=0$

GRUPO 15.

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3,-5)$ y radio 7.

2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,3)$ y $B(-4,5)$. Hallar la ecuación de la curva.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(7,-6)$ y que pasa por el punto$A(2,2)$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,-4)$ y que es tangente al eje Y.

5. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0,-2)$ y es tangente a la recta $5x-12y+2=0$ hallar su ecuación.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-4,-1)$ y que es tangente a la recta $3x+2y-12=0$.

7. La ecuación de una circunferencia es $(x-3)^2+(y+4)^2=36$ demostrar que el punto $A(2,-5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(-4,1)$ es exterior.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x-2y-24=0$, $2x+7y+9=0.$

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7,-5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x-9y-10=0$ y $2x-5y+2=0$.

10. Una cuerda de la circunferencia $x^2+y^2=25$ esta sobre la recta cuya ecuación es $x-7y+25=0$. Hállese la longitud de la cuerda.

11. Hallar la ecuación de la mediatriz de la cuerda del ejercicio 10, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Los ejercicios 12-16 se refieren al triangulo cuyos vertices son $A(-1,0)$, $B(2,\frac{9}{4})$ **y** $C(5,0)$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado BC.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

16. Demostrar que la circunferencia del ejercicio 15 pasa por los pies de las alturas del triángulo.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre el eje X, y que pasa por los dos punto $A(1,3)$ y $B(4,6)$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo eje esta sobre el eje Y y que pasa por los puntos $A(2,2)$ y $B(6,-4)$.

19. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3,3)$ y $B(1,4)$ y su centro esta sobre la recta $3x-2y-23=0$. Hallese su ecuación.

20. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $9x+2y+13=0$, $3x+8y-47=0$ y $x-y-1=0$. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

21. La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2=50.$ El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto $(-2,4)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

22. La ecuación de una circunferencia es $(x-4)^2+(y-3)^2=20$. Hallar la ecuación de la tangente a este circulo en el punto $(6,7)$

23. La ecuación de una circunferencia es $(x+2)^2+(y-3)^2=5$. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto $(3,3)$. Dos soluciones

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7,-5)$ y es tangente a la recta $x-y-4=0$ en el punto $B(3,-1)$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre la recta $6x+7y-16=0$. Y es tangente a cada una de las rectas $8x+15y+7=0$, y $3x-4y-18=0$. (Dos soluciones)

GRUPO 16.

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicio 1-3 reduciendo la ecuación dada a la forma ordinaria, determinar si representa o no un circunferencia si la repuesta es afirmativa, hallar su centro y su radio.

1. $2x^2+2y^2-6x+10y+7=0$.

2. $4x^2+4y^2+28x-8y+53=0$.

3. $16x^2+16y^2-64x+8y+177=0$.

4. Hallar el área del circulo cuya ecuación es: $9x^2+9y^2+72x-12y+103=0$.

5. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es $25x^2+25y^2+30x-20y-62=0$.

6. Demostrar que las circunferencias: $4x^2+4y^2-16x+12y+13=0$ y $12x^2+12y^2-48x+36y+55=0$. Son concéntricas.

7. Demostrar que las circunferencias $x^2+y^2+4x+6y-23=0$ y $x^2+y^2-8x-10y+25=0$. Son tangentes.

8. Demostrar, por dos métodos, que las circunferencias: $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ y $4x^2+4y^2-40x+8y+79=0$. No se cortan.

En cada uno de los ejercicios 9-11, determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados, usando el método del ejemplo 1, Artículo 41.

9. $(0,0)$, $(3,6)$, $(7,0)$

10. $(2,-2)$, $(-1,4)$, $(4,6)$.

11. $(4,-1)$, $(0,-7)$, $(-2,-3)$.

12. La ecuación de una circunferencia es $4x^2+4y^2-16x+20y+25=0$. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta $5x-12y=1$.

13. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia : $x^2+y^2+2x-2y-39=0$ en el punto $(4,5)$.

14. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(11,4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-8x-6y=0$. (2 Sol^n)

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos; $(-1,-4)$, $(2,-1)$ y cuyo centro esta sobre la recta $4x+7y+5=0$.

16. Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta $3x-4y-1=0$ en el punto $(3,2)$ hallar su ecuación. Dos soluciones.

17. Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia: $x^2+y^2-4x+2y-47=0$. En el punto $(6,5)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones).

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(1,4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2+y^2+6x+2y+5=0$ en el punto $(-2,1)$.

19. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(5,9)$, y es tangente a la recta $x+2y-3=0$ en el punto $(1,1)$.

20. Una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos $(0,2)$, $(7,3)$, Hállese su ecuación . (dos soluciones).

21. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta que pasa por el punto $(-1,5)$ no puede ser tangente a la circunferencia $x^2+y^2+4x-6y+6=0$. Interpretar el resultado geométricamente.

22. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre la recta $7x-2y-1=0$ y que es tangente a cada una de las rectas $5x-12y+5=0$ y $4x+3y-3=0$. (dos soluciones.)

23. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son $4x-3y=0$, $4x+3y-8=0$, $y=0$.

24. Hallar las ecuaciones de las rectas que tienen dependiente 5 y son tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-8x+2y-9=0$.

25. Desde el punto $A(-2,-1)$ se traza una tangente al circunferencia $x^2+y^2-6x-4y-3=0$. Si B es el punto de contacto hallar la longitud del segmento AB.

26. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(6,1)$ y es tangente a cada una de las rectas $4x-3y+6=0$, $12x+5y-2=0$. (Dos soluciones).

27. Hallar la ecuación de la circunf. que pasa por $(-3,-1)$ y $(5,3)$ y es tangente a la recta $x+2y-13=0$. (dos soluciones).

GRUPO 20.

Para cada ejercicio es conveniente trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

1. $x^2+y^2+2x-6y+6=0.$

2. $3x^2+2y^2+12x-4y+8=0.$

3. $4x^2-y^2-8x-10y-25=0.$

4. $y^3-x^2+3y^2-4x+3y-3=0.$

5. $xy-3x+4y-13=0.$

6. $2x^2+y^2+16x-4y+32=0.$

7. $3x^2+2y^2+18x-8y+29=0.$

8. $3x^2-2y-42x-4y+133=0$

9. $xy-x+2y-10=0.$

10. $8x^3+24x^2-4y^2+24x-12y-1=0.$

11. $4x^2+4y^2+32x-4y+45=0.$

12. $2x^2+5y^2-28x+20y+108=0.$

13. $x^2-3y^2+6x+6y+3=0$

14. $12x^2+18y^2-12x+12y-1=0.$

15. $12x^2-18y^2-12x-12y-5=0.$

16. $x^2+8x-3y+10=0$

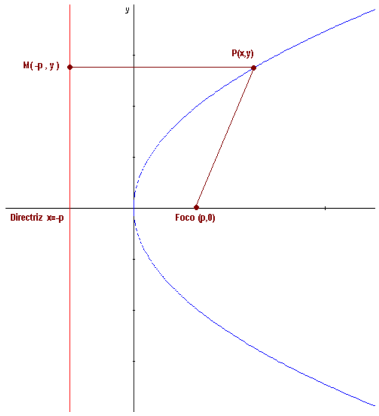
17. $16x^2+16y^2+8x-48y+5=0.$

18. $72x^2+36y^2-48x+36y-55=0$

19. $y^2-6x^2-24x-2y-32=0.$

PARABOLA

Def^{n}: Lugar Geometrico de los puntos del plano que se conservan siempre equidistantes de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.



$\overline{FP} = \overline{MP}$ Modelo de ordenamiento del lugar geométrico.

$\sqrt{(x_p - x_f)^2 + (y_p - y_f)^2} = x - (-p)$ Sustituyendo los datos

$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x + p$ Elevando al cuadrado ambos términos para eliminar la raiz del término de la izquierda

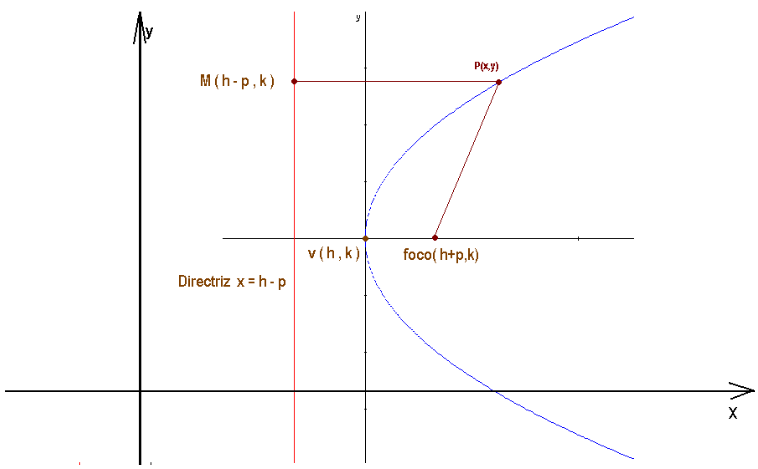
$(x-p)^2 + (y)^2 = (x+p)^2$ Desarrollando los cuadrados de los binomios

$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$ Simplificando términos semejantes

$y^2 = 4px$ **Forma canónica de la Parábola**

La demostración de la Parábola Vertical es similar a la anterior.

Veamos ahora el caso de la parábola con vértice fuera del origen, en un punto de coordenadas $V(h,k)$



$\overline{FP} = \overline{MP}$ Modelo de ordenamiento del lugar geométrico.

$\sqrt{(x_p - x_f)^2 + (y_p - y_f)^2} = x - (h - p)$ Sustituyendo los datos

$\sqrt{[x - (h+p)]^2 + (y-k)^2} = x - h + p$ Elevando al cuadrado ambos términos para eliminar la raiz del término de la izquierda

$(x-h-p)^2 + (y-k)^2 = (x-h+p)^2$ Desarrollando los cuadrados de los binomios

$x^2 - 2xh - 2xp + h^2 + 2hp + p^2 + y^2 - 2yk + k^2 = x^2 - 2xh + 2xp + h^2 - 2hp + p^2$

Simplificando términos semejantes

$y^2 - 2yk + k^2 = 4xp - 4hp$ Acomodando términos

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ **Forma Ordinaria de la Parábola**

GRUPO 23

1. $y^2 = 12x.$
2. $x^2 = 12y.$
3. $y^2 + 8x = 0.$
4. $x^2 + 2y = 0.$
5. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(3,0)$.
6. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0,-3)$.
7. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $y - 5 = 0$.
8. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $x + 5 = 0$.
9. Una parábola cuyo vértice esta en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2,4).$ Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.
10. Foco $(3,4),$ directriz $x - 1 = 0$.
11. Foco $(3,-5),$ directriz $y - 1 = 0$.
12. Vértice $(2,0),$ foco$(0,0)$.
13. Foco $(-1,1),$ directriz $x + y - 5 = 0$.
14. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-4,3)$ y $(-1,3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.
15. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértices y foco son los puntos $(3,3)$ y $(3,1)$ respectivamente. Hallar su ecuación de su directriz y la longitud de su lado.
16. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$ y su foco es el punto $(4,-3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.
17. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto $(0,3)$. Hallar la ecuación de la parábola por los métodos diferentes.

En cada uno de los ejercicios 18-22, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola y hallar las coordenadas del vértice y el foco, las ecuaciones de la directriz y el eje y la longitud del lado recto.

18. $4y^2 - 48x - 20y = 71.$
19. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0.$
20. $y^2 + 4x = 7.$
21. $4x^2 + 48y + 12x = 159.$
22. $y = ax^2 + bx + c.$
23. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(8,-4)$ $(3,1)$.
24. Hallar la ecuación de la parábola del vértice el punto $(4,-1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3,-3)$.
25. Hallar e identificar la ecuación de lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1,1)$.

GRUPO 25

1. **Los problemas enunciados en los ejercicios deben comprobarse gráficamente**.
2. La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es constante

e igual a 14 cm. Hallar las longitudes de los catetos si el área del triángulo debe ser máxima.

3. La suma de dos números es 8. Hallar estos números si la suma de sus cuadrados debe ser mínima.
4. El perímetro de un rectángulo es 20 cm. Hallar sus dimensiones si su área debe ser máxima.
5. Hallar el numero que excede a su cuadrado en un numero máximo.
6. Demostrar que todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo el cuadrado es el área máxima.
7. Una viga simplemente apoyada de longitud l pies esta uniformemente cargada con w libras por pie. En mecánica se demuestra que una distancia de x pies de un soporte, el momento flexionante M en pies-libras esta dado por la formula $M = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2}$. Demostrar que el momento flexionante es máximo en el centro de la viga.
8. Determinar la ecuación del arco parabólico cuyo claro o luz es de 12 m y cuya altura es de 6 m.
9. Determinar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de 150 m y la depresión de 20 m.

ELIPSE

EJERCICIOS. Grupo 27

1. **En cada uno de los ejercicios 1-4 hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar y discutir el lugar geométrico.**
2. $9x^2 + 4y^2 = 36$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$
4. $16x^2 + 25y^2 = 400$
5. $x^2 + 3y^2 = 6$
6. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4,0)$, $(-4,0)$ y cuyos focos son los puntos $(3,0)$, $(-3,0)$.
7. Los vértices de una elipse son los puntos $(0,6)$, $(0,-6)$, y sus focos son los puntos $(0,4)$, $(0,-4)$. Hallar su ecuación.
8. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2,0)$, $(-2,0)$, y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.
9. Los focos de una elipse son los puntos $(3,0)$, $(-3,0)$, y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.
10. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0,-7)$ y pasa por el punto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$.
11. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6},-1)$ y $(2,\sqrt{2})$.
12. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $(\frac{\sqrt{7}}{2},2)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.
13. Hallar los radios vectores del punto $(3,\frac{7}{4})$ que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

En cada uno de los ejercicios $13-15$, **usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados. Redúzcase la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.**

14. Focos $(3,8)$ y $(3,2)$; longitud del eje mayor $= 10$.
15. Vértices $(-3,-1)$ y $(5,-1)$; excentricidad $= \frac{3}{4}$.
16. Vértices $(2,6)$ y $(2,-2)$; longitud del lado recto $= 2$.
17. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y = -8$ es siempre igual al doble de su distancia del punto $(0,-2)$.
18. Hallar e identificar la ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

EJERCICIOS. Grupo 28.

1. Los vértices de una elipse son los puntos $(1,1)$ y $(7,1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.
2. Los focos de una elipse son los puntos $(-4,-2)$ y $(-4,-6)$ y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.
3. Los focos de una elipse son los puntos $(1,-6)$ y $(9,-6)$ y la longitud de cada lado

recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

4. Los focos de una elipse son los puntos $(3,8)$ y $(3,2)$ y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

5. El centro de una elipse es el punto $(-2,-1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3,-1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

6. El centro de una elipse es el punto $(2,-4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2,-4)$ y $(-1,-4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

En cada uno de los ejercicios 8 - 12, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

7. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$.

8. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$.

9. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$.

10. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos $(1,3)$, $(-1,4)$, $(0,3-\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(-3,3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

12. $2x^2 + 3y^2 = 5$.

13. $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$.

14. $9x^2 - 4y^2 = 36$

15. $4x^2 - 9y^2 = 36$

16. $9y^2 - 4x^2 = 36$

17. $x^2 - 4y^2 = 4$

18. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(2,0)$, $V'(-2,0)$ y sus focos son los puntos $F(3,0)$, $F'(-3,0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

19. El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto $(0,5)$ y la excentricidad es igual a 3, hállese la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

20. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

21. Los vértices de una hipérbola son $(0,4)$, $(0,-4)$, y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

22. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\frac{\sqrt{6}}{2}$ y que la curva pasa por el punto $(2,1)$.

23. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado está sobre el eje X. La longitud de cada lado recto es $\frac{2}{3}$, y la hipérbola pasa por el punto $(-1,2)$. Hallar su ecuación.

24. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3,-2)$ y $(7,6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

En cada uno de los ejercicios $12-16$, **usando la definición de la hipérbola**, **hallar la ecuación de dicha curva a partir de los datos dados**. **Mediante un**

cambio de coordenadas, **poner la ecuación en la primera forma ordinaria**.

25. Focos $(-7,3)$, $(-1,3)$; longitud del eje transverso $= 4$.

26. Vértices $(1,4)$, $(5,4)$; longitud del lado recto $= 5$.

27. Vértices $(3,4)$, $(3,-2)$; excentricidad $= 2$.

28. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6,0)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 = 0$

29. La base de un triángulo es de longitud fija siendo sus puntos extremos $(3,0)$ y $(-3,0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4. Trazar el lugar geométrico.

30. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-1,3)$ y $(3,3)$, y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado y de cada lado recto.

31. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-2,2)$ y $(-2,-4)$, y la longitud de su lado recto es 2. Hallar la ecuación de la curva, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

32. El centro de una hipérbola es el punto $(2,-2)$ y uno de sus vértices el punto $(0,-2)$. Si la longitud de su lado recto es 8, hallar la ecuación de la curva, la longitud de su eje conjugado y su excentricidad.

33. Los focos de una hipérbola son los puntos $(4,-2)$ y $(4,-8)$ y la longitud de su eje transverso es 4. Hallar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su lado recto y su excentricidad.

34. El centro de una hipérbola es el punto $(4,-5)$ y uno de sus focos es $(8,5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2, hallar su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

35. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-3,2)$ y $(-3,-2)$, y la longitud de su eje conjugado es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

36. $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$.

37. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$.

38. $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$.

39. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$.

40. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$.

41. $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

42. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4,6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

43. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que sé mueve de tal manera que su distancia del punto $(3,2)$ es siempre igual al triple de su distancia a la recta $y + 1 = 0$.

44. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que sé mueve de tal manera que su distancia del punto $(2,-1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

45. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

46. Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que él lugar geométrico de P es una hipérbola.

47. $3x^2 - y^2 = 2.$

48. $2x^2 - 3y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$.

49. $3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y - 12 = 0$.

50. $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0.$

51. $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$.

52. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

53. $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$

54. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}\,x - 14\sqrt{13}\,y + 117 = 0.$

55. $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0$

56. $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$

57. $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0$

58. $12x^2 + 12xy + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

59. $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0$

60. $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$

61. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0$

62. $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$

63. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

64. Focos $(0,0)$; directriz : $x + 2y + 2 = 0$; excentricidad $= 1$.

65. Focos $(1,-2)$; directriz: $x - 2y = 0$; excentricidad $= \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

66. Focos $(-1,-1)$; directriz: $4x + 3y = 12$; excentricidad $= 5$.

67. Focos $(3,3)$; directriz : $x + 3y = 3$; excentricidad $= 2$.

68. Focos $(1,-3)$; directriz : $3x + y - 3 = 0$; excentricidad $= \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

69. $5x^2 + 9y^2 = 45$.

70. $16x^2 - 9y^2 = 144$.

71. $5x^2 + y^2 = 5$.

72. $2y^2 - 7x^2 = 14$.

73. $9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0$.

74. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 3 = 0.$

75. $x^2 - xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$

76. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6 = 0.$

77. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0.$

78. $3xy - 2x + y - 1 = 0$.

79. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2y - 2x - 1 = 0$.

80. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0.$

81. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0.$

82. $3xy + 2x - y - 2 = 0$.

83. $x^2 + xy + y^2 + x - 3y - 1 = 0.$

84. $2x^2 - xy - 2x + y = 0$.

85. $2x^2 + 2y^2 = 5.$

86. $x^2 + 3y^2 = 5$.

87. $4x^2 + y^2 - 4 = 0.$

88. $xy + 3x + 5y + 3 = 0$.

89. $2xy + 2y^2 + 3x - y - 1 = 0$

90. $x^2 - xy + 2y^2 + x + y - 3 = 0$.

3. REGLAS DE LA DERIVADA.

- Teorema 1: Si f es una función constante, $f'(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$

$\frac{d}{dx}c = 0$

- Regla de la Potencia: Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

- Regla del multiplo constante: Si c es una constante y f es una función diferenciable, entonces $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f'(x)$

- Regla de la Suma: Si tanto f como g son difernciables, entonces

$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

- Regla de la Diferencia: Si tanto f como g son diferncíables, entonces

$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

- Derivada de la función exponencial natural: $\frac{d}{dx}e^n = e^x$

- Regla del Producto: Si tanto f como g son diferncíables, entonces

$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$

- Regla del Cociente: Si tanto f como g son diferncíables, entonces

$\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

REGLA DE LA CADENA

Si existen a la vez las derivadas $g'(x)$ y $f'(g(x))$ y si $F(x) = f(g(x))$, entonces $F'(x)$ existe y esta dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son dos funciones diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$ y úselas para explicar porque su respuesta es razonable.

1. $f(x) = x^2 - 10x + 100$

2. $g(x) = x^{100} + 50x + 1$

3. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

4. $s(t) = t^8 + 6tr^7 - 18y^2 + 2t$

5. $F(x) = (16x)^3$

6. $G(y) = (y^2 + 1)(2y - 7)$

7. $Y(t) = 6t^{-9}$

8. $R(X) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$

9. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

10. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

11. $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

12. $f(u) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

13. $G(s) = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$

14. $H(t) = \sqrt[3]{t}\,(t+2)$

15. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

16. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

17. $y = \sqrt{5x}$

18. $y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$

19. $y = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

20. $y = x^2 + x + x^{-1} + x^{-2}$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $y = A + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2}$

23. $y = \dfrac{3t - 7}{t^2 + 5t - 4}$

24. $y = \dfrac{4t + 5}{2 - 3t}$

25. $y = x + \sqrt[5]{x^2}$

26. $y = x^4 - \sqrt[4]{x}$

27. $u = x^{\sqrt{2}}$

28. $u = \sqrt[3]{t^2} + 2\sqrt{t^3}$

29. $y = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

30. $v = \dfrac{6}{\sqrt[3]{t^5}}$

31. $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{c}{x}}$

32. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

33. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^3-2}$

34. $s = \sqrt{t}\,(t^3 - \sqrt{t} + 1)$

35. El polinomio general de grado n tiene la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde $a_n \neq 0$. Escribe la derivada de P.

Deduce la ecuación de la tangente a cada una de las curvas dadas en el punto indicado.

36. $y = \dfrac{x}{x-3}$, $(6, 2)$