# Würfel, Spiele
# und
# ‘Die Siedler von Katan’

Mirko Junge
http://www.geocities.com/junge_m
mailto:junge_m@web.de

25. Oktober 2000

## Inhaltsverzeichnis



# 1 Würfel und Spiele

## 1.1 Einführung

Es gibt zahlreiche Spiele, bei denen Würfel eine entscheidende Rolle spielen. Allgemein kann man unterscheiden:

– Würfel als Fortbewegungsallocator

  (z.B. Monopoly, Mensch ärgere Dich nicht)

– Würfel als Rohstoffzuteiler

  (z.B. Risiko, Siedler von Catan)

– Würfel als Spielstein

  (z.B. Chase)

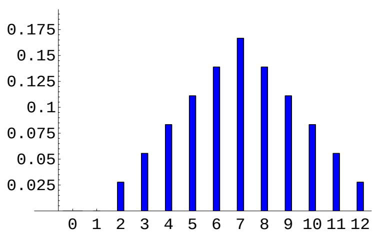
Das Spiel mit dem die Verteilungen der Wurfergebnisse so wichtig wurden, daß sich ein genaueres Studium der Verteilungen lohnt heißt ‘Die Siedler von Catan’: Das Spiel wird mit zwei 6er Würfeln gespielt, wobei die geworfenen Augen zu einer Zahl addiert werden. Das Spielfeld besteht aus einer Fläche, die aus vielen gleichgroßen, verschiedenen bedruckten Sechsecken, die die unterschiedlichen Rohstoffe symbolisieren, zusammengelegt wird. Auf jedes der Sechsecke wird jeweils ein Zahlen-Chip von 2 bis 12 gelegt[1]. Besitzt man an der Ecke eines Sechsecks eine Siedlung bzw. eine Stadt deren Zahl gerade gewürfelt wurde, so erhält man eine bzw. zwei Einheiten des entsprechenden Rohstoffs. In den zwei Spielphasen braucht man die einzelnen Rohnstoffe in unterschiedlichen Kombinationen[2].
Auch wenn dies eine äußerst rudimentäre und keinesfalls eindeutige Beschreibung des Spiels ist, so wird doch deutlich, daß die Währscheinlichkeiten die entsprechenden Zahlen auf den Rohstoff-Sechsecken zu würfeln von elementarer Bedeutung für das Spiel sind.

Zu Begin des Spiels muß der erste Spieler eine Siedlung und eine Straße setzen. Da es für die Siedlung im Verlauf des Spieles bei entsprechender Würfelzahl die angrenzenden Rohstoffe gibt, wird man bemüht sein die erste Siedlung so zu plazieren, daß sie möglichst an Sechsecke mit den häufiger auftretenden Zahlen liegt, also 6 und 8[3]. Reihum setzten die anderen Spieler ihre erste Siedlung. Der letzte Spieler setzt auch gleich seine zweite Siedlung und zweite Straße, dann der vorletzte..., bis der erste Spieler wieder an der Reihe ist. Eine Besonderheit der zweiten Anfangsrunde besteht darin, daß man die entsprechenden Rohstoffkarten von allen an die Siedlung angrenzenden Sechsecken als eine Art ‘Start-Kapital’ erhält.
Aus dem ganzen Procedere ist leich zu sehen, daß mit steigender Zahl der Spieler derjenige, der als erster und als letzter seine Siedlungen setzten muß, immer stärker benachteiligt wird: Zum einen wird die Zahl der Spieler, die ihm seine Ausgangsituation verbauen können immer größer, zum anderen ist die Auswahl am Schluß immer geringer und vor allem aber stehen ihm immer schlechtere Ecken zur Verfügung. Auch ist eine strategische Kombination der beiden Anfangzüge, um so den Grundstein für die längste Handelsstraße zu legen, immer schwieriger.[4]

[1] Die Zahlen-Chips sind nicht gleichverteilt: Im Grundspiel gibt es jeweils ein Mal die 2 und die 12, alle anderen Zahlen sind doppelt vorhanden. Auf die Würfelwahrscheinlichkeiten hat diese Verteilung jedoch keinen Einfluß.

[2] Im ersten Teil des Spiels baut man hauptsächlich Verbindungen, also Straßen bzw. Schiffahrtswege (Holz & Lehm bzw. Holz & Wolle) und Siedlungen (Holz & Lehm & Getreide & Wolle), in dem zweiten Städte (3×Erz & 2×Getreide)

[3] Die Zahl 7, die bei der Summe von zwei 6er Würfeln die häufigste Kombination ist, hat eine besondere Bedeutung und kann im Standard-Spiel nicht auf einem Rohstoff-Sechseck liegen. Graphisch erhält man für die Verteilung:



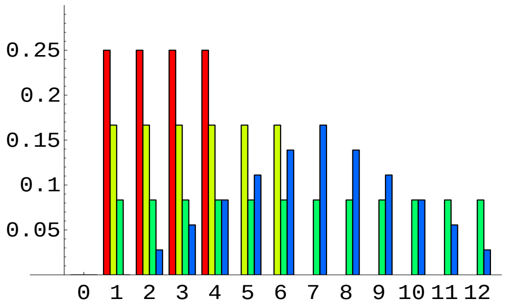

[4] Es gibt Leute die behaupten, daß man bei gleichstarken Siedler-Spielern nur mit der längsten Handelsstraße und/oder der größten Rit-

Um den Ausgleich dieses Nachteils soll es in den folgenden Zeilen gehen. Es wird versucht durch eine Veränderung der Verteilung des Würfelergebnisses das Spiel fairer zu gestalten. Hierzu gibt es grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten, die sich nicht gegenseitig ausschließen:

1. Veränderung der festen Verteilung der Würfelergebnisse in eine andere feste Verteilung
2. Freie Wahl des Würfelergebnisses in einem Teil der Fälle[5] oder sogar allen Fällen.
3. Veränderung der Reihenfolge der Spieler in jeder Runde
4. Veränderung der festem Zahlen-Chip/Rohstoff-Sechseck Kombinationen im Laufe des Spiels.

## 1.2 Verteilung

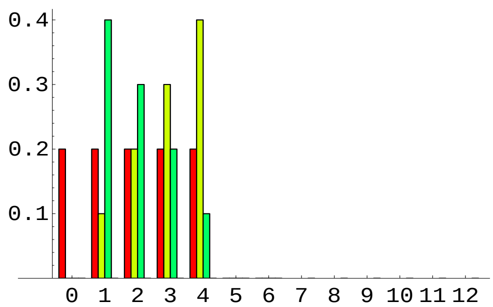
Für die Verteilungsfunktion der Augenzahlen von unterschiedlichen Würfeln erhält man die folgenden Graphen:




Die roten Balken geben die Wahrscheinlichkeiten für einen vierseitigen Würfel wieder, die gelben für einen 6 seitigen und die grünen für einen 12 seitigen. Die blauen Baken sind die graphische Representation der Verteilung der Summe von zwei 6 seitigen Würfeln.
Mit Hilfe dieser Funktionen lassen sich die Erwartungswerte, also die mittleren Wahrscheinlichkeiten der Würfergebnisse beschreiben. Die Verteilungsfunktion ist die charakterisistische Eigenschaft eines Würfels. Durch Summation mehrerer Würfel lassen sich verschiedene Verteilungsmuster bilden. Eine einfache Methode ein gegebenes Verteilungsmuster zu approximieren besteht in der Verwendung vielseitiger Würfel. Symetrische, reguläre, polyhedrische Würfel gibt es mit 4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 48, 60 und 120 Seiten[1]. Desweiteren gibt es noch aus Dreiecken, sowie aus Tropezoiden zusammengesetzte Würfel.

### 1.2.1 Vorüberlegungen

Sei $D_i$ die Zahl der unterschiedlichen Seiten des Würfels $i$, $d_{i,j}$ deren Ausprägung und $p_{i,j}$ deren Wahrscheinlichkeit, $j = 2, \ldots \max(D_i)$.
Für die Betrachtungen über die Verteilungen der Summe von Würfeln werden die folgenden 3 Würfel und ihre additiven Kombinationen exemplarisch untersucht:




Bei dem roten Würfel handelt es sich um einen gleichverteilten 5-seitigen Würfel[6]. Also:

$$D_1 = 5, \quad d_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad p_{1,j} = 1/5, \quad j = 1, \ldots 5 \tag{1}$$

Die grüne (Würfel 2) und die gelbe (Würfel 3) Verteilung sind Rampenfunktionen[7], die mit Hilfe eines 10-seitigen Würfels gebildet werden können. Auch ein 10-seitiger Würfel kann, entsprechend der Abhandlung in der letzten Fußnote, z.B. durch einen 20zig-seitigen Würfel gebildet werden. Hier ist

$$D_2 = 4, \quad d_2 \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad p_2 = [1/10, 2/10, 3/10, 4/10] \tag{2}$$
$$D_3 = 4, \quad d_3 \in \{4, 3, 2, 1\}, \quad p_3 = [4/10, 3/10, 2/10, 1/10] \tag{3}$$

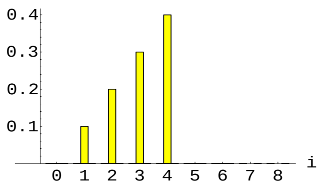
### 1.2.2 Faltung

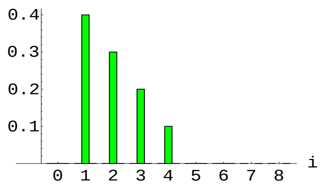
Graphisch kann man sich das Faltungsintegral wie folgt verdeutlichen: Die beiden Funktionen werden sozusagen aneinander vorbeigeschoben und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert. Durch Integration von $f(t-u)\,g(u)$ erhält man den entsprechenden Wert des Faltungsintegrals bzw. durch Summation von $f(j-i)\,g(i)$ erhält man die Faltungssumme.

**Definition 1 (Faltung, diskret)** *Seien $f(j)$ und $g(j)$ abschnittsweise diskrete Funktionen, so ist die Faltung der Funktionen definiert als*

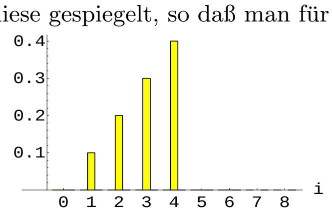
$$f(j) \star g(j) = \sum_{i=0}^{j} f(j-i)\,g(i) \tag{4}$$

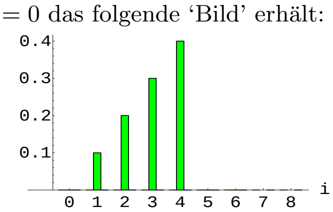
Betrachtet werden der 'gelbe' ($g(i)$) und der 'grüne' ($f(j-i)$) Würfel (siehe Kap. 1.2.1). Für die Funktinen $g(i)$ und $f(i)$ erhält man die folgenden Darstellungen:




Durch den Term $j-i$ im Funktionsargument der Funktion $f$ wird diese gespiegelt, so daß man für $i = 0$ das folgende 'Bild' erhält:




Diese beiden Funktionen werden, wie oben beschrieben aneinander 'vorbeigeschoben'.

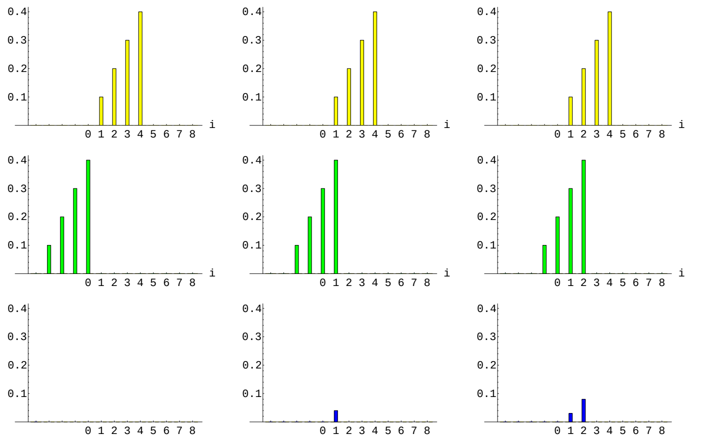
termacht gewinnen kann. Wobei anzumerken ist, daß bei gleichstarken Spielern einem Spieler nur in den seltensten Fällen gelingen wird, sowohl die längste Handelsstraße als auch die größte Rittermacht zu erhalten.

[5] Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß eine Würfelseite blank ist, also keine Augen enthält, siehe unten.

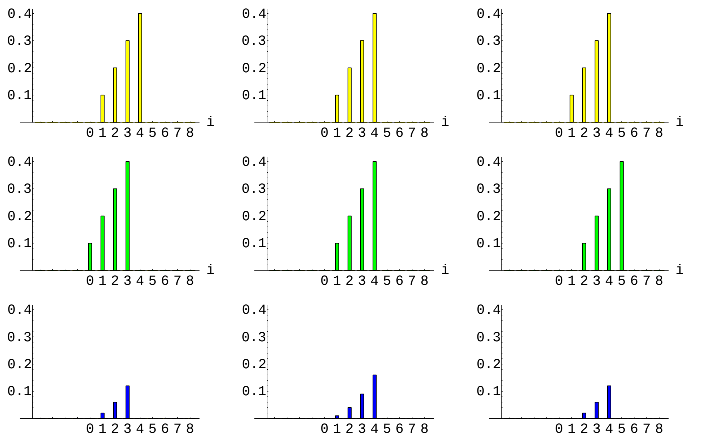
[6] Der Einfachheit halber wurde ein Würfel mit 5 Seiten gewählt, dieser wäre jedoch ein nicht symetrischer, nicht regulärer und nicht polyhedrischer Würfel und damit nach der Arbeit von Klaus Æ. Mogensen[1] nicht sicher fair. Markiert man jeweils 4 Seiten eines fairen, 20zig-seitigen Würfels mit der gleichen Zahl, so erhält man bezogen auf die Wahrscheinlichkeiten einen 5-seitigen Würfel. Ein 20zig-seitiger Würfel kann ein symetrischer, regulärer, polyhedrischer Würfel und somit fair sein. Ein aus ihm gewonnener '5-seitige Würfel' wäre ebenfalls fair. q.e.d.

[7] Rampenfunktionen habe besondere Eigenschaften in bezug auf die Faltung, die sie für eine graphische Veranschaulichung besonders geeignet erscheinen lassen (siehe unten).

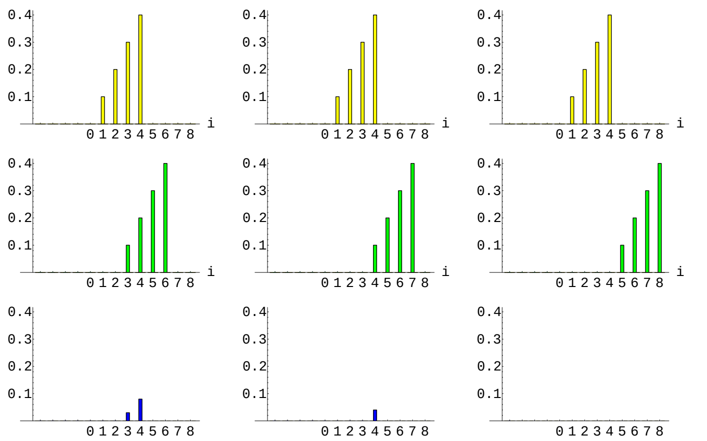
Für die Summenwerte 1, 2 und 3 erhält man die folgenden Spalten:



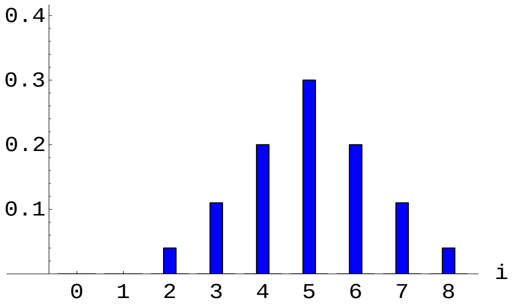
Den Wert der Faltung erhält man durch Summation der einzelnen blauen Säulen in jedem Funktionsdiagramm. Für den Summenwert von 1: 0, für 2: 1/25, und für 3: 11/100.
Entsprechende Diagramme kann man für Summenwerte von 4, 5, 6



und 7, 8, 9 erstellen:



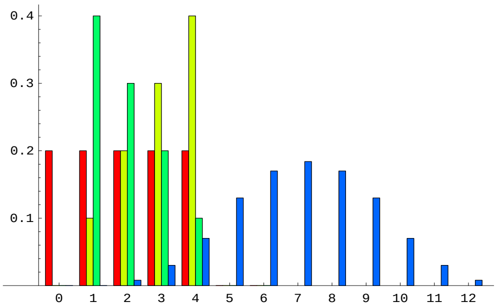
Die Faltungssumme läßt sich als Diagramm darstellen:



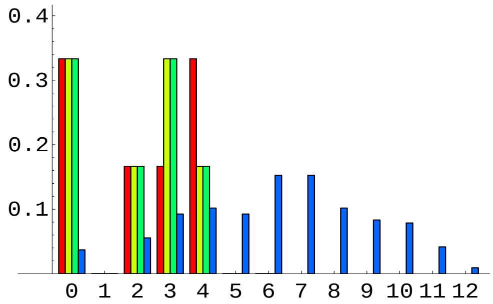

Aus den Rampen-Verteilungen der beiden Würfel ist durch die Summation der beiden Würfelwerte fast[8] eine Dreiecksverteilung geworden:

| $n$ | Faltungs-Summe | Dreiecks-Verteilung |
|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |
| 3 | $\frac{11}{100}$ | $\frac{19}{150}$ |
| 4 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{16}{75}$ |
| 5 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |
| 6 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{16}{75}$ |
| 7 | $\frac{11}{100}$ | $\frac{19}{150}$ |
| 8 | $\frac{1}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |

Bildet man die Summe aller drei Würfel (siehe Kap. 1.2.1), so müssen für die Berechnung der Verteilungsfunktion die drei Verteilungsfunktionen der einzelnen Würfel miteinander gefaltet werden. Aufgrund der Assiziativität der Faltung können erst zwei Verteilungen miteinander gefaltet werden und dann dieses Ergebnis mit der Verteilungsfunktion des dritten Würfels.
Man erhält (rot, gelb, grün die Würfel, blau das Faltungsergebnis):



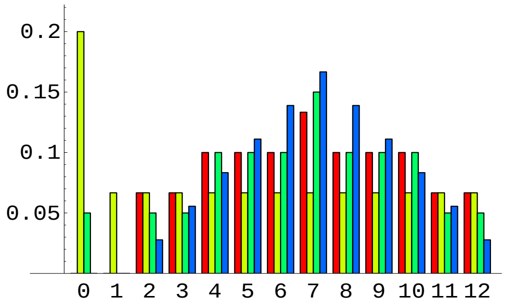

Durch Kombination zweier oder mehrerer nicht gleich verteilter Würfel lassen sich auch bizarste Verteilungsmuster erzeugen bzw. approximieren. In der folgenden Abbildung sind drei 6er Würfel (rot, gelb, grün) mit den Seiten $(0, 0, 2, 3, 4, 4)$, $(0, 0, 2, 3, 3, 4)$ und $(0, 0, 2, 3, 3, 4)$ miteinander gefaltet worden:




[8] Die Werte für 3, 4 und 6, 7 sind mit 11/100 bzw. 1/5 kleiner als die der durch Maximum- und Minimum-Wert beschriebenen Dreiecksverteilung (19/150 bzw. 16/75).

### 1.2.3 Anwendung

Die Betrachtungen in den letzten Abschnitten wurden angestellt, um das Spiel 'Die Siedler von Catan' fairer zu gestatalten. Die Summe der zwei 6er-Würfel mit denen normalerweise gespielt wird, lassen sich durch eine Dreieckverteilung mit 6 Wahrscheinlichkeitsstufen (in Bild blau) beschreiben.
Eine Glättung dieser Verteilung durch Reduktion der Wahrscheinlichkeitsstufen von 6 auf 3 (1/20, 2/20, 3/30) unter Verwendung eines 20-seitigen Würfel kann wie folgt aussehen (im Bild grün)[9]:




Hierbei beträgt, bei einem fairen Würfel, die Wahrscheinlichkeit für jede Seite des 20zig-seitigen Würfels 1/20. Eine beliebige Verteilung kann also durch eine Quantisierung in 20 Zwanzigstel approximiert werden.
Eine Approximation der dreistufigen Verteilung ohne leere Würfelseite kann man durch Verwenden eines dreißig seitigen Wüfels erreichen (im obigen Bild rot). Hier betragen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der Stufen 2/30, 3/30 und 4/30. Als Beispiel für eine Gleichverteilung mit hohem Wahlanteil (leere Würfelseiten) ist im Bild mittels eines dreißig seitigen Würfel konstruiert (gelb, Wahrscheinlichkeiten von $6/30 = 1/5$ für die freie Wahl und $2/30 = 1/15$ für eine fest vorgegebene Zahl).
Allgemein gilt, je mehr Seiten der Würfel hat, desto besser die Approximation. Jedoch ist zu beachten, daß ganz abzusehen von der Schwierigkeit der Beschaffung, die Fairnis eines 100[10]- oder gar 120-seitigen Würfels deutlich schwieriger zu verifizieren ist, als die eines 12-, 20- oder 30-seitigen.

[9] Die Augenzahl Null beschreibt eine nicht markierte Seite, die entweder zum nochmaligen Würfeln zwingt oder als freie Wahl des Würfelergebnisses interpretiert werden kann, siehe unten.

[10] Entsprechend der Arbeit 'Properties of Dice' von Klaus Æ. Mogensen [1] ist ein nicht symetrischer, regulärer, polyhedrischer Würfel nicht fair.

## 1.3 Reihenfolge

## 1.4 Einführung und Anwendung

Bei Mehrpersonenspielen kann die Reihenfolge mit der die Spieler ihre Züge ausführen dürfen von entscheidender Bedeutung sein. So hat z.B. bei Monopoly[8][9] der Spieler, der zuerst auf ein Feld gelangt immer die Möglichkeit dies zu kaufen. Dieser Vorteil verliert sich erst nach vielen Runden, zu einem Zeitpunkt zu dem bereits alle Grundstücke verkauft sind. Ein ausgeglicheneres Spiel würde sich ergeben, wenn zu Beginn jeder Runde die Reihenfolge neu festgelegt werden würde. Die folgende Vorschrift ermöglicht dies:

- Jeder Spieler erhält einen Würfel mit dem die Position innerhalb der Runde festgelegt wird.
- Am Anfang der Runde würfelt jeder Spieler mit dem vor ihm liegenenden Positionswürfel die Position seien links Nachbarns. Er gibt den Würfel mit dem Resultat an diesen weiter. Die niedrigste Augenzahl beginnt.
- Haben zwei Würfel die gleiche Augenzahl wird zwischen diesen Personen ein Stechen durchgeführt. Beginnend mit der niedrigsten gleichen Augenzahl. Entsprechend des Ausganges werden die Spieler in die Runde eingegliedert.

Mit dieser einfachen Vorschrift lassen sich tatsächlich reihenfolgenabhängige Spiele deutlich fairer gestalten. Zwanglos drängen sich die folgenden Fargen auf: Wie oft kommt es vor das zwei Personen die gleiche Zahl gewürfelt haben und die Reihenfolge durch ein Stechen ermittelt werden muß? Was passiert mit der Häufigkeit dieses Ereignisses, wenn man 4 seitige, 6 seitige, 12 seitige oder gar 20 seitige Würfel benutzt? Wäre es sinnvoller die Summe zweier 6 seitiger Würfel statt eines 12 seitigen zu benutzen?

### 1.4.1 Berechnung bei 'gleichverteilten Verteilungen'

Für den Fall daß es nach den Würfen für die Rangfolge kein Stechen geben muß, ist es erforderlich daß alle $n$ Personen unterschiedliche Zahlen würfeln. Für einen $m$-seitigen Würfel bei dem jede der $m$ Seiten gleich wahrscheinlich ist, erhält man für die Wahrscheinlichkeit eines Stechens ($P_{stechen}$) die folgende Formel:

$$P_{stechen}\,|_{n=2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \tag{5}$$

$$P_{stechen}\,|_{n=3} = 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right)\right)\right) \tag{6}$$

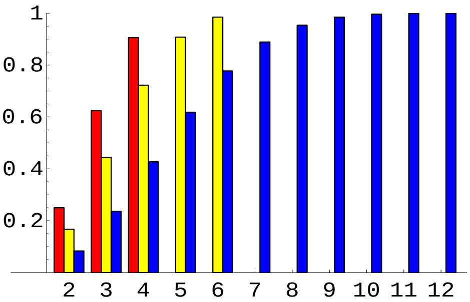
$$P_{stechen} = 1 - \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{m}\right) \tag{7}$$

Für die Herleitung betrachte man zuerst den den zwei Personenfall ($n = 2$). Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit[11] legt man den Wurf des Spielers als gegeben fest, der den ersten Wurf macht.[12] Damit der zweite Spieler nicht die gleiche Zahl wie der erste würfelt muß er eine andere Zahl werfen. Die Wahrscheinlichkeit mit der der erste Spieler eine bestimmte Zahl wirft sei $p$, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Spieler diese Zahl nicht wirft zu $1-p$. Bei einem fairen $m$-seitigen Würfel gilt $p = 1/m$. Die Wahrscheinlichkeit eines Stechens beschreibt die Wahscheinlichkeit das die beiden Würfe eben nicht unterschiedlich sind. Somit ergibt sich die Gleichung 5.
Für den Fall von drei Spielern ($n = 3$) darf der dritte Spieler nicht die Augenzahl des ersten und auch nicht die des zweiten würfeln. Heraus ergibt sich zwanglos Gleichung 6.

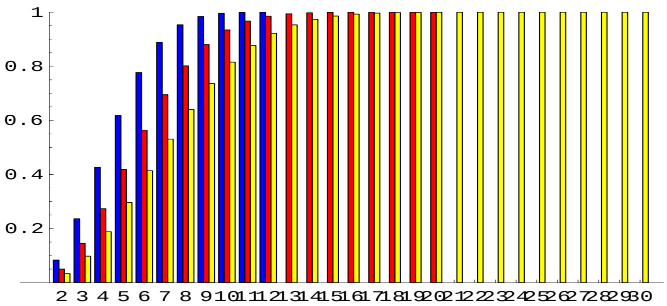
[11] Es ist hier wichtig zu beachten, daß im Folgenden von sogenannten fairen Würfeln ausgegangen wird, bei denen jede der Würfelseiten gleich wahrscheinlich ist. Es sei darauf hingewiesen, daß diese Annahme *nicht* für die Summe zweier Würfel gilt (siehe unten)!

[12] Dieser Wurf muß nicht zeitlich vor dem anderen Wurf liegen. Es wird nur willkürlich ein Spieler ausgewählt, dessen Wurf als Bezugsgröße gewählt wird.

Entsprechendes gilt für $n$ Spieler. Ist $n > m$, gibt es also mehr Spieler als Würfelseiten, kommt es immer zu Stechen, $P_{stechen}\,|_{n>m} = 1$. Der besseren Übersicht wegen sind in den folgenden Graphiken nur die von 1 verschiedenen Wahrscheinlichkeiten dargestellt:




Die roten Balken entsprechen dem Ergebnis für einen 4-seitigen Würfel, die gelben für die eines 6-seitigen und die blauen für die eines 12-seitigen.
Entsprechend der Intuition sinkt die Wahrscheinlichkeit für ein Stechen, i.e. die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei Personen die gleiche Augenzahl würfeln, bei gegebener Spielerzahl, mit einer Zunahme der unterschiedlichen Würfelseiten.
Würfel mit mehr Seiten sind in der folgenden Abbildung visualisiert (blau: 12er, rot: 20er und gelb: 30er Würfel):




### 1.4.2 Berechnung bei 'nicht gleichverteilte Verteilung'

Wie bereits graphisch dargestellt ist die Verteilung der Summe von zwei gleichverteilten Würfeln nicht gleichverteilt, sondern dreiecksverteilt. Die obigen Überlegungen lassen sich somit aufgrund der dort gemachten Annahme der Gleichverteilung nicht anwenden.
Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Wurfergebnisse sind nicht mehr gleichwahrscheinlich. Somit ist es wichtig zu wissen, welche Zahl ($i$) bzw. welche Wahrscheinlichkeit ($p_i$) der erste Spieler gewürfelt hat. Der zweite Spieler muß damit kein Stechen von nöten ist, eine der verbleibenenden Zahlen würfeln. Für $n = 2$ ergibt sich:

$$P_{stechen} = 1 - p_2(1-p_2) + p_3(1-p_3) + \ldots + p_{2m}(1-p_{2m}) = \tag{8}$$

$$= \sum_{i=2}^{2m} p_i^2 \tag{9}$$

Unter Berücksichtigung von

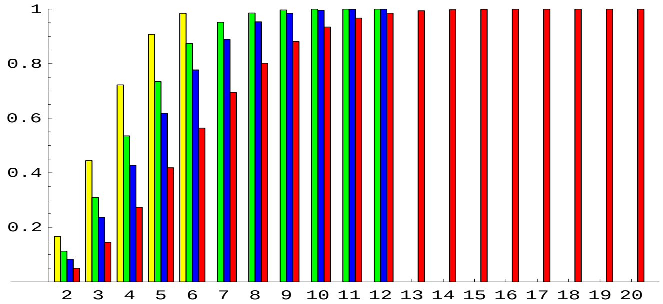
$$1 - p_i = \sum_{j=2, j\neq i}^{2m} p_j \tag{10}$$

erhält man für n=3:

$$\begin{aligned} P_{stechen} &= \sum_{j=2}^{2m} \left( p_j \sum_{i=2,i\neq j}^{2m} \left( p_i \sum_{k=2,k\neq i,k\neq j}^{2m} p_k \right) \right) = \\ &= \sum_{j=2}^{2m} \left( p_j \sum_{i=2,i\neq j}^{2m} \left( p_i \big(1-(p_j+p_i)\big) \right) \right) \end{aligned} \tag{11}$$

Durch eine entsprechend weitere Verschachtelung der Summen kann man die Formeln für $n > 3$ direkt ableiten.

Graphisch ist das Ergebnis für zwei 6er Würfel in der nachfolgenden Graphik grün dargestellt. Die grünen Säulen für ein Würfelergebnis von 10, 11 und 12 konnten mangels Rechenleistung nicht exakt berechnet werden und fehlen deshalb in der folgenden Tabelle und sind in der Graphik mit dem Wert '1' angenähert. Die gelben Säulen entsprechen einem 6er, die blauen einem 12er und die roten einem 20ziger Würfel:




Aus der Graphik erkennt man, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Stechen mit zwei 6er Würfeln (grün) größer ist als für einen 12er Würfel.
Die exakten Werte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

| $n$ | Würfel | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4er D-4 | 6er D-6 | 12er D-12 | 2×6er 2× D-6 | 20er D-20 | 30-er D-30 |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{73}{648}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ |
| 3 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{17}{72}$ | $\frac{401}{1296}$ | $\frac{29}{200}$ | $\frac{22}{225}$ |
| 4 | $\frac{29}{32}$ | $\frac{13}{18}$ | $\frac{41}{96}$ | $\frac{12487}{23328}$ | $\frac{1093}{4000}$ | $\frac{47}{250}$ |
| 5 | 1 | $\frac{49}{54}$ | $\frac{89}{144}$ | $\frac{25697}{34992}$ | $\frac{2093}{5000}$ | $\frac{1111}{3750}$ |
| 6 | 1 | $\frac{319}{324}$ | $\frac{1343}{1728}$ | $\frac{13211219}{15116544}$ | $\frac{11279}{20000}$ | $\frac{1861}{4500}$ |
| 7 | 1 | 1 | $\frac{3071}{3456}$ | $\frac{28777613}{30233088}$ | $\frac{138953}{200000}$ | $\frac{2986}{5625}$ |
| 8 | 1 | 1 | $\frac{39547}{41472}$ | $\frac{603546367}{612220032}$ | $\frac{3206389}{4000000}$ | $\frac{108053}{168750}$ |
| 9 | 1 | 1 | $\frac{122491}{124416}$ | $\frac{406921373}{408146688}$ | $\frac{17619167}{20000000}$ | $\frac{1863583}{2531250}$ |
| 10 | 1 | 1 | $\frac{495739}{497664}$ | | $\frac{373810837}{400000000}$ | $\frac{20638831}{25312500}$ |
| 11 | 1 | 1 | $\frac{2984059}{2985984}$ | | $\frac{773810837}{800000000}$ | $\frac{33295081}{37968750}$ |
| 12 | 1 | 1 | $\frac{35829883}{35831808}$ | | $\frac{15764297533}{16000000000}$ | $\frac{1050262789}{1139062500}$ |

### 1.5 Zahlen-Chip/Rohstoff-Sechseck Kombinationen

# 2 'Die Siedler von Catan' House Rules

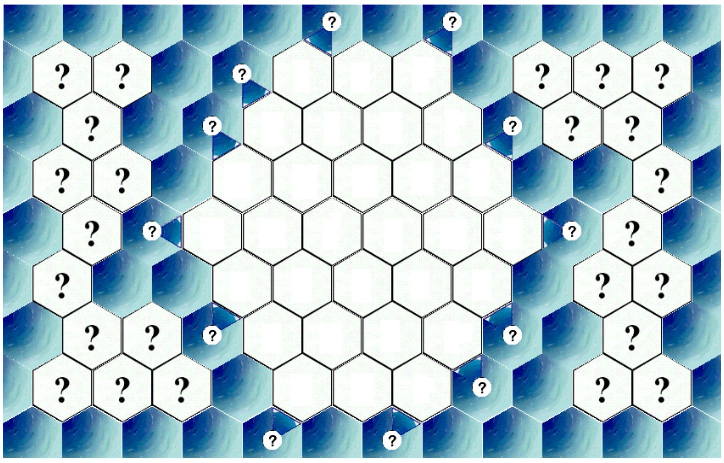
## 2.1 Material

Für die Spielvariante 'Groß-Katan' benötigt man zwei Basis-Spiele und zwei Basis-Spiel Erweiterungen. Um die erneute Geldausgabe zu vermeiden wurde die folgende Tabelle erstellt. Die in der Spalte 'Fehlt' angegebenen Sechsecke sind die fehlenden, wenn man die Erweiterungen und die Seefahrer besitzt. Desweiteren fehlen natürlich noch jeweils 4 Siedlungen und drei Schiffe pro Spieler, aber die kann man ja auch mit farbigen Würfeln etc. markieren.

| 6-Ecke | Siedler | S.Erw. | Seefahrer | S.Erw. | Fehlt |
|---|---|---|---|---|---|
| Getreide | 4 | 2 | 1 | | 1 |
| Holz | 4 | 2 | 1 | | 1 |
| Schaf | 4 | 2 | 1 | | 1 |
| Lehm | 3 | 2 | 2 | | |
| Erz | 3 | 2 | 2 | | |
| Wüste | 1 | 1 | 3 | | |
| Wasser | 9 | 2 | 12 | 6 | |
| Gold | | | 2 | 1 | |
| Chips | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | |
| 3 | 2 | 3 | 1 | | |
| 4 | 2 | 3 | 1 | | |
| 5 | 2 | 3 | 1 | | |
| 6 | 2 | 3 | 1 | | |
| 7 | 2 | 3 | 1 | | |
| 8 | 2 | 3 | 1 | | |
| 9 | 2 | 3 | 1 | | |
| 10 | 2 | 3 | 1 | | |
| 11 | 2 | 3 | 1 | | |
| 12 | 1 | 2 | 1 | | |
| S.-Pkt. | | | 8 | 6 | |
| Je Farbe | | | | | |
| Straßen | 15 | | | | 0 |
| Schiffe | | | 15/18 | | 0/3 |
| Dörfer | 5 | | | | 0 |
| Städte | 4 | | | | 4 |

## 2.2 Standard, 6 Spieler

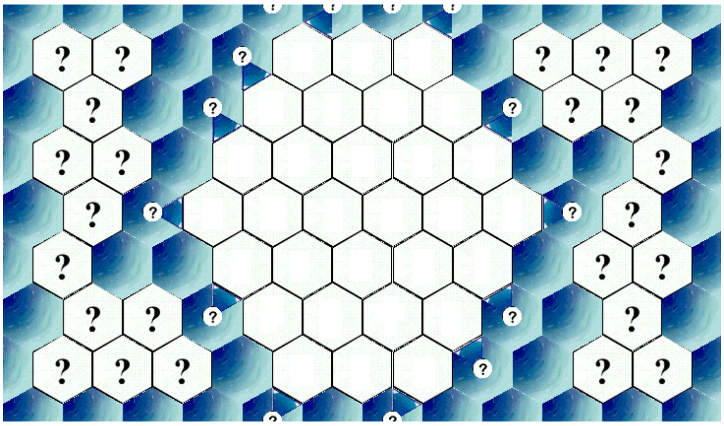
Alle Rohstofffelder, jedoch nicht die Goldfelder werden gemisch. Die Mittelinsel wird aus den gemischten Sechsecken gezogen und offen hingelegt. Zu dem Rest der Karten werden die Goldfelder und 5 Wasserfelder hinzugegeben und gemischt. Die 12 jeweils fehlenden Felder der beiden Inseln werden verdeckt aufgefüllt, so daß man zum folgeden Spielplan gelangt:



Alle Zahlenchips kommen in den schwarzen Beutel und werden gemischt. Die Felder der Hauptinsel bekommen zufällig einen Chip, wobei darauf geachtet wird, daß keine 6 neben einer 6 oder 8 bzw. keine 8 neben einer 6 oder 8 liegt. Sollte sich dies dennoch ergeben, so wird die entsprechende 6 oder 8 an die nächste mögliche Stelle auf dem Spielplan gelegt.
Jeder Spieler erhält 5 Siedlungen und 8 Städte plus 15 Straßen und 15 Schiffe.
Die 6 Spieler bilden 3 Paare, die Partner sitzen sich jeweils gegenüber.
Die Partner untereinander dürfen nur Rohstoffkarten tauschen und diese nur im Verhältnis 1:1.
Während ein Spieler einen Zug ausführt dürfen seine Mitspieler eine Sonderbauphase anmelden. Die Sonderbauphase schließt sich direkt an die Bauphase des Spielers an. Hierbei gilt die gleiche Reihenfolge wie im sonstigen Spiel auch: Zuerst ist der dem jetztigen Spieler folgende Spieler mit der Sonderbauphase an der Reihe, dann der nächstfolgende etc. Während der Sonderbauphase kann nicht in Häfen, der Bank oder mit Mitspielern getauscht werden und es kann keine weitere Sonderbauphase angemeldet werden. Nach der Sonderbauphase wird das normale Spiel fortgesetzt.
Das Spiel endet, sobald ein Spieler 18 Siegpunkte erreicht hat.

## 2.3 Die Welt ist rund

Wie die Erde ist Catanien jetzt rund, d.h. man kann von der einen Spielfeldseite über den Rand zur anderen segeln[13]. Von West nach Ost mit 2 Segelschiffen, von Nord nach Süd mit nur einem Segelschiff[14].



Jeder Spieler erhält 3 zusätzliche Schiffe, also insgesamt 5 Siedlungen und 8 Städte plus 15 Straßen und 18 Schiffe.
Ansonsten gelten die oben beschriebenen Standardregeln.

## 2.4 Verschärft

Catanien ist immer noch rund.
Nur 7 Zahlen-Chips (2, 3, 4, 5, 9, 10, 11) kommen bei 24 zu entdeckenden Sechseckfeldern[15] in den Beutel.
Sobald ein Spieler ein Schiff (später auch Straße) setzt, an deren Ende eine Landschaft ohne Zahlen-Chip liegt, zieht der Spieler aus dem Beutel per Zufall einen Zahlen-Chip und legt ihn auf diese Landschaft.
Sind die Zahlen-Chips aus dem Beutel alle eingesetzt, muß der Spieler den fehlenden Zahlen-Chip von der Hauptinsel wegnehmen und auf die Insel-Landschaft legen. Dabei gelten die folgenden Regeln:

1. Der Spieler darf einen Zahlen-Chip nur von einer solchen Landschaft wegnehmen, an der er selbst mindestens eine Siedlung oder Stadt stehen hat.
2. Jeder Siedlung oder Stadt auf der Hauptinsel muß mindestens eine Landschaft mit einem Zahlen-Chip verbleiben. Keine Siedlung oder Stadt auf der Hauptinsel darf also völlig ohne Rohstoff-Erlöse sein!
3. Auch auf den kleinen Inseln dürfen rote Zahlen-Chips nicht nebeneinander liegen.

Wenn ein Spieler bei der Befolgung dieser Regeln keinen Zahlen-Chip von der Hauptinsel wegnehmen dürfte, ist es ihm erlaubt, diese Regeln in der Reihenfolge der Regelnummern zu brechen, bis ihm die Wegneahme eines Zahlen-Chips möglich ist.
Ansonsten gelten die oben beschriebenen Regeln von 'Die Welt ist rund'.

## 2.5 Hammerhart

Die Errichtung der Häfen kostet Rohstoffe:


Errichtet werden dürfen die Häfen nur an den im Spielplan ausgewiesenen Stellen.
Es gibt einen Sonder-Siegpunkt für das Erreichen von fremden Inseln. Für seine erste Siedlung, die ein Spieler auf einer fremden Insel gründet, erhält er einen Sonder-Siegpunkt. Eine Insel muß vollständig von Wasser umgeben sein, kann jedoch auch nur ein Sechseck groß sein.
Ansonsten gelten die oben beschriebenen 'Verschärft'en Regeln.

## 2.6 D-12 Mania

Die Zahlenchips werden durch D-12 Würfel ersetzt:[16] Auf jedem Rohstofffeld der Hauptinsel liegt ein Würfel, der zu Beginn des Spieles geworfen wurde. Die Zahl auf dem D-12 Würfel entspricht dem Zahlenchip. Rohstoffe werden bei Gleichheit von D-12 Würfel und normalen Spielwürfel ausgezahlt. Spielt man mit zwei 6er Würfeln, so kann die 1 nicht fallen, das entsprechend besetzte Feld ist also ohne Ertrag. Der Wurf einer 7 ist am wahrscheinlichsten (1/6). Auch hier werden die entsprechenden Rohstoffe ausgeteilt und erst danach die Zahl der Karten gezählt. Ist diese bei einen Spieler größer als 7, so muß dieser Spieler mindestens die Hälfte der Karten abgeben.
Wird der Räuber von einem Feld entfernt, so wird der D-12 Würfel erneut geworfen und das Rohstofffeld bekommt eine neue Wertigkeit.
Welche Zahlen auf benachbarten Sechseckfeldern nebeneinander liegen ist ohne Bedeutung.
Ansonsten gelten die oben beschriebenen 'Hammerhart'en Regeln.

## 2.7 D-12 Madness

Zusätzlich zur 'D-12 Mania' wird an jede Stelle von der der Seeräuber entfernt wird ein D-12 Würfel gelegt (natürlich nachdem dieser geworfen wurde). So produzieren dann die Wasserfelder entsprechend des D-12 Würfels und zwar je nach Wahl ein Lehm oder ein Erz.

[13] Eigentlich ist Catanien bei der gegebenen Beschreibung gar nicht rund, sondern ein Torus. Ein Rechteck läßt sich nämlich nicht verzerrungsfrei auf eine Kugel projezieren. Verbindet die Ost- und die West-Seiten miteinander, so entsteht ein Zylinder. Werden jetzt auch noch Nord- und Süd-Seite miteinander verbunden, so gelangt man zu einem Torus (Doughnut).

[14] Hiebei ist zu beachten, daß die Regel, daß ein Dorf immer zwei Kantenlängen von einem Anderen entfernt liegen muß, in den Fällen nicht gilt, in denen Wasser zwischen den Landfeldern liegt!

[15] Zu beachten ist hier allerdings, daß nicht alle der 24 Felder Rohstofffelder sind und somit nicht alle 24 Felder einen Zahlenchip benötigen.

[16] Aufgrund der nicht geringen Anzahl von D-12 Würfeln (30 für die Hauptinsel, plus maximal 24 für die beiden kleinen, zu entdeckenden Inseln) sollte man diese aus Kosten- und Verfügbarkeitsgründen im Großhandel, also z.B. bei [4] erwerben.

# Literatur


[1] Properties of Dice
Als HTML: http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm
Als .PDF: http://www.geocities.com/junge_m/prop_dice.pdf
Klaus Æ. Mogensen

[2] Fair Dice
3D-Animationen: http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.html
Grundüberlegungen: http://mathworld.wolfram.com/Dice.html
Mathematica Notebook: http://mathworld.wolfram.com/notebooks/FairDice.m
Weisstein, E. W.

[3] Fair Dice
Diaconis, P.; Keller, J. B.
Amer. Math. Monthly 96, 337-339, 1989

[4] Dice & Games Hobby Games Accessories
Dice & Games, Ltd
http://www.dice.co.uk/hob.htm

[5] Fair Dice
http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm
Pegg, E. Jr.

[6] Dice with Fair Sums
Robertson, L. C.; Shortt, R. M.; Landry, S. G.
Amer. Math. Monthly 95, 316-328, 1988.

[7] Univariate Discrete Distributions
Johnson, N.L.; Kotz, S.; Kemp, A.W.
John Wiley & Sons, 1993
ISBN 0-471-54897-9

[8] Anti-Monopoly
Anspach, R.
http://www.antimonopoly.com/

[9] Monopoly
http://www.monopoly.com/