

TÖMEG ÉS FREKVENCIA KAPCSOLATA

1. Bevezető

A tömeg és a frekvencia kapcsolatának kérdése évekkel korábban merült fel bennem, amikor a semleges atomok tömegét egy egyszerű fizikai modell alapján szerettem volna elméletileg meghatározni. A periódusos rendszer atomjainak túlnyomó része, mai ismereteink szerint, magas hőmérsékletű csillagokban, *szupernovákban* szintetizálódik. A folyamatot intenzív elektromágneses és neutrínó sugárzás kíséri, az extrém magas hőmérsékleten a neutrínó sugárzás is Maxwell-Boltzmann eloszlást követi az EM sugárzáshoz hasonlóan. A szupernova relatíve rövid élete során hatalmas energiát, azaz hatalmas nagyságú tömeget sugároz ki a világűrbe, a hiányzó tömeg a semleges atomtömegek kötési energiáiban realizálódik. A sugárzás energia-eloszlását Planck sugárzási törvénye írja le, amely a sugárzási frekvencia függvénye. Feltételeztem, hogy a sugárzás oszcillátorai maguk a semleges atomok, melyekhez meghatározott frekvenciák tartoznak. Az egyes atomi frekvenciákról feltételeztem, hogy azok a semleges atomok tömegével fejezhetők ki. Az egyszerű fizikai modell végül várakozáson felül sikeresnek bizonyult, sikerült elméleti alapon meglepő pontossággal kiszámítani a semleges atomok tömegét. A modell szerint az A tömegszámú atomhoz rendelhető frekvencia:

$$\omega^2 \sim A, \quad (1.1)$$

azaz a sugárzási frekvencia négyzete arányos az atom tömegszámával. A semleges atomok számítási modelljével másutt részletesen foglalkozom a honlapomon.

Az egyszerűsége ellenére sikeres modell (1.1) következménye megmozgatta a fantáziámat, töprengéseim a tömeg fogalmának újszerű megközelítésére vezettek.

2. A tömegfrekvencia, az energia alsó korlátja

A fekete test elektromágneses sugárzásának fizikai modelljében (Planck, 1900) alapvető az oszcillátor fogalom. Planck sugárzási elméletében az oszcillátorok pusztán csak a frekvenciájukkal és energiájukkal definiáltak, de szükségtelen ismerni ezen oszcillátorok rugóállandóját, tömegét és amplitúdóját. A klasszikus fizikában az oszcillátorok három fontos jellemzőjét az ismert képlet köti össze:

$$m\omega^2 = k, \quad (2.1)$$

ahol k az oszcillátor rugóállandója. A rugóállandó arányos a kölcsönható erővel, amelyről gravitáció esetén tudjuk, hogy arányos m -el. Tehát a fenti képlet a következő alakban is felírható:

$$m\omega^2 = k \sim mM \Rightarrow \omega^2 \sim M. \quad (2.2)$$

A semleges atomtömegek elméleti számítási modelljében ezt az arányosságot tételeztem fel, mely sikeresnek bizonyult. Hasonló arányosságot mutat a centripetális erő kifejezése is:

$$F = m\omega^2 r \quad (2.3)$$

ugyanis ennek az erőnek a negatívja a tömeg tehetetlenségére jellemző centrifugális erő, amelynek kifejezésében szimmetrikus szerepben és arányosan szerepel a tömegen kívül a keringési sugár és a frekvencia négyzete. A tömeg és a centrifugális erő eredete a fizika történetében mindig kérdéses volt, Newton fizikájában a tömeg axiomatikus fogalom. A modern részecske-

fizikai elmélet a tömeg eredetét összekapcsolja egy bizonyos *Higgs* részecskének létezésével, amelynek kísérleti igazolása, vagy cáfolata a közeljövő feladata. A jelen munkában a tömeg és a frekvencia kapcsolatát vizsgáljuk. Hipotézisünk szerint a tömeg és frekvencia kapcsolata SI rendszerben:

$$m = D\omega^2; \quad D = 1 \text{ kgs}^2, \quad (2.4)$$

ahol D egységnyi értékű dimenzionáló tényező. Ennek következményeit vizsgáljuk meg a következőkben.

A fizikában korlátos mennyiségekkel dolgozunk, tehát feltehető, hogy a frekvenciának is van egy legkisebb értéke (alsó korlátja, kvantuma), akkor (2.4) a következő alakban is felírható:

$$m = D(n\omega_0)^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad D = 1 \text{ kgs}^2 \quad (2.5)$$

Az m tömeg nyugalmi energiája:

$$E = mc^2 = Dc^2(n\omega_0)^2 \equiv Dc^2\omega_0 \times n^2\omega_0 = \hbar\Omega, \quad (2.6)$$

ahol bevezettük a Planck állandót:

$$\hbar \equiv Dc^2\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \hbar / Dc^2. \quad (2.7)$$

Az Ω frekvenciát az m tömeghez tartozó *fotonfrekvenciának* nevezzük. Az (2.7) kifejezés definiálja a frekvencia ω_0 alsó korlátját SI rendszerben. Ennek ismeretében megkaptuk az *energia alsó korlátját* is:

$$E_0 = \hbar\omega_0 = \hbar^2 / Dc^2. \quad (2.8)$$

Tetszőleges m tömeg nyugalmi energiája (2.6) szerint a következő alakban is felírható:

$$E = Dc^2\omega^2 = Dc^2(n\omega_0)^2 = n \times Dc^2\omega_0 \times \omega = n\hbar\omega. \quad (2.9)$$

Ez emlékeztet Planck tételére, miszerint a fekete test oszcillátorainak energiája ilyen alakban írható fel. A kvantummechanika ehhez hozzátette a zérusponti energiát is:

$$E = (n + 1/2)\hbar\omega; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

A kvantummechanikát figyelembe véve, tetszőleges m tömeghez rendelhető tömegfrekvencia:

$$m = D\omega^2 = D(n + 1/2)^2\omega_0^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Az (2.8) klasszikus eredménytől eltérően, $n = 0$ esetben kapjuk meg a legkisebb tömeget, a legkisebb energiát, és a legkisebb frekvenciát:

$$m_0 = \frac{1}{4} D \omega_0^2; \quad E_0 = m_0 c^2 = \frac{1}{4} \hbar \omega_0; \quad \omega_0 = \frac{\hbar}{D c^2} . \quad (2.12)$$

FONTOS: A (2.11) alapvető összefüggés nemcsak a minimális frekvenciára érvényes, hanem minden olyan ω_0 frekvenciára, amelyre teljesül:

$$\omega = (n + 1/2) \omega_0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Az ω_0 frekvenciát az m tömeg sajátfrekvenciájának nevezzük, mely speciálisan a frekvencia elemi kvantuma is lehet.

3. Kölcsönhatások hatótávolsága

Az energia elemi kvantuma (2.12) szerint elképzelhetetlenül kicsi:

$$E_0 = m_0 c^2 = \frac{1}{4} \hbar \omega_0 \equiv \frac{\hbar^2}{4 D c^2} = 3.093... \times 10^{-86} J . \quad (3.1)$$

Az energia elemi kvantumának ismeretében kiszámíthatjuk az alapvető fizikai kölcsönhatások hatótávolságait, melyeket az energia alsó korlátja limitál.

A gravitációs kölcsönhatás hatótávolsága:

$$G m M / R_H = E_0 \Rightarrow R_H = G m M / E_0 , \quad (3.2)$$

A képletből kiszámíthatjuk például két elektron gravitációs hatótávolságát:

$$R_H = G m_e^2 / E_0 = 1.790... \times 10^{+15} \text{ méter} . \quad (3.3)$$

Hasonlóan számolható két elektron elektrosztatikus hatótávolsága ($k = \text{Coulomb áll.}$):

$$R_H = k e^2 / E_0 = 7.457... \times 10^{+57} \text{ méter} . \quad (3.4)$$

A két alapvető kölcsönhatás hatótávolságának aránya:

$$G m_e^2 / k e^2 = 2.400... \times 10^{-43} . \quad (3.5)$$

Nagyságrendek összehasonlítása: a fénysebesség 3×10^8 méter/másodperc. Ha a világegyetem sugarát 15 milliárd fényévnek vesszük, ekkor ez méterben 1.5×10^{26} méter. Ezek ismeretében az alapvető kölcsönhatások fentiekben számolt hatótávolságai gyakorlatilag végtelenek. (A számítások a Függelék részben vannak.)

4. Az energiafrekvencia fogalma

A tömegfrekvenciához hasonlóan vezetjük be az *energiafrekvenciát*. Az m tömeghez rendelhető nyugalmi energia:

$$E = mc^2 = Dc^2\omega^2; \quad D = 1 \text{ kgs}^2 \text{ (SI)} \quad (4.1)$$

A fénysebesség felírható a következő alakban is:

$$c = r\omega = 1 \text{ méter} \times \omega_c, \quad (4.2)$$

amely szerint az energia a frekvencia negyedik hatványával arányos:

$$E = mc^2 = D\omega_c^2\omega_m^2 = D_E\omega_E^4; \quad D_E = 1 \text{ Js}^4 \text{ (SI)} \quad (4.3)$$

A továbbiakban elhagyjuk a felesleges indexeléseket, a tömeghez frekvencia-négyzetet, az energiához a frekvencia negyedik hatványát rendeljük.

A D dimenzionáló faktor ennek megfelelően változik (SI rendszer):

$$E = mc^2 = D\omega^4 = \hbar \times \Omega; \quad D = 1 \text{ Js}^4 \quad (4.4)$$

Itt az ω frekvenciát *energiafrekvenciának* nevezzük, szemben a tömegfrekvenciával. Az Ω fotonfrekvencia definíciója természetesen nem változott.

Az eddigiekben megadott definíciók a tömeg-, illetve energiafrekvenciát, valamint a fotonfrekvenciát egyértelműen definiálják. Fontos, hogy ezek a definíciók „felülről” kompatibilisek a hagyományos tömeg, energia és frekvencia fogalmakkal.

A Stefan-Boltzmann törvény

A fentiekben az energiához a frekvencia negyedik hatványát rendeltük. Ennek jogosságát a híres *Stefan-Boltzmann* törvény is alátámasztja. Már a tizenkilencedik század végén a kísérleti és elméleti vizsgálatok megmutatták, hogy a fekete test egységnyi felülete által kisugárzott összteljesítmény (minden hullámhosszra összegezve, azaz a folytonos hullámhosszra integrálva) az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos:

$$P_{\text{ug}} = \sigma T^4. \quad (4.5)$$

Ez a Stefan-Boltzmann törvény. 1894-ben *W. Wien* tisztán elméleti úton vezette le a következő összefüggést a fekete test sugárzás maximális erősségű hullámhosszára:

$$\lambda_{\text{max}} T = b = \text{állandó}. \quad (4.6)$$

Ez a törvény mind a mai napig igaznak bizonyult és egyben az utolsó olyan törvény a hőmérsékleti sugárzásra, mely a klasszikus termodinamika és a klasszikus statisztikus fizika alapján le lehetett vezetni. Wien „eltolódási törvénye” azt mondja ki, hogy a maximális erősségű sugárzás hullámhossza a fekete test spektrumában a hőmérséklet növekedésével fordított arány-

ban csökken. Planck sugárzási elmélete mindkét fontos törvényt igazolta, sőt elméleti úton a korábban kísérletileg ismert konstansokat is meghatározza:

$$\sigma = \left(\pi^2 / 60\right) k^4 / \hbar^3 c^2$$

$$\sigma = 5.670400 \times 10^{-8} W / m^2 K^4$$
(4.7)

A „b” Wien állandó a Planck sugárzási törvényből vezethető le szélsőérték számítással:

$$b = (2\pi\hbar c / k) / 4.965...$$

$$b = 2.8977685... \times 10^{-3} m K$$
(4.8)

Ezek a jelenleg legpontosabbnak tartott CODATA adatok (k a Boltzmann állandó). Mindezekből következik, hogy a maximális energiájú EM sugárzás frekvenciája arányos a T abszolút hőmérséklettel:

$\omega_{\max} = 2\pi c / \lambda_{\max} = 2\pi c T / b \cong 5 \times kT / \hbar \sim T$

(4.9)

Ennek ismeretében kimondhatjuk, hogy a Stefan-Boltzmann törvény szerinti sugárzási teljesítmény a maximális sugárzási frekvencia negyedik hatványával is arányos. A fekete test által kisugárzott energia a sugárzási teljesítmény időintegrálja, mely természetesen szintén arányos a maximális sugárzási frekvencia negyedik hatványával.

Összefoglalva, az energia kifejezésére a fizikában számos képletet, kifejezést használunk, melyek egymásba kölcsönösen egyértelmű módon átalakíthatók. Planck sugárzási elméletéből itt precízen igazoltuk, hogy az energia ekvivalens módon kifejezhető a frekvencia negyedik hatványával.

Függelék (Számítások)

A kölcsönhatások hatótávolságai:

REM RH.BAS 2008.november Sarkadi Dezső

REM POWER BASIC

X\$ = "===== RH.BAS ====="

CLS: PRINT: PRINT X\$: PRINT

DEFDBL A-Z

REM DUPLA PONTOSAG

PI = 4 * ATN(1)

REM PI SZAMITASA

REM FIZIKAI ALLANDOK =====

C0 = 299792458#

REM FENYSEBESSEG(SI)

K = 8.9876D9

REM COULOMB ALLANDO(SI)

GK = 6.6742D-11

REM GRAVITACIOS ALLANDO(SI)

HV = 1.054571596D-34

REM PLANCK ALLANDO (SI)

ET = 1.60217653D-19

REM ELEMI TOLTES(SI)

ME = 9.109381881D-31

REM ELEKTRON TOMEKE (kg)

E0 = (HV / C0)^2 / 4

REM ENERGIA KVANTUMA (J)

REM HATOTAVOLSAGOK =====

RHG = GK * ME^2 / E0

REM GRAV. HATOTAVOLSAG(m)

RHE = K * ET^2 / E0

REM ELEMI TOLTES HATOTAV(m)

TÖMEG ÉS FREKVENCIA KAPCSOLATA Szerző: Sarkadi Dezső 2009 január

<http://www.geocities.com/fhunman/massfreq.pdf>

HH = GK * ME^2 / (K * ET^2) REM GRAV / EM KH. ARANYA

REM =====

PRINT "C0 / 1D+8 ="; C0 / 1D+8: PRINT

PRINT "E0 ="; E0: PRINT

PRINT "10 * RHG ="; 10 * RHG: PRINT

PRINT "RHE ="; RHE: PRINT

PRINT "HH= "; HH: PRINT

END

Eredmények:

===== RH.BAS =====

C0 / 1D+8 = 2.99792458

E0 = 3.093504430909236E-86

10 * RHG = 1.790302001518547E+16

RHE = 7.457851269584185E+57

HH= 2.400560076626958E-43

Nagyléptékű távolságok:

1 Astronomical Unit = 149 598 000 000 meters

1 fényév = 9.4605284×10^{15} meters = kb. 10^{16} méter

15 millárd fényév = 1.5×10^{10} fényév

15 billion lightyear = $1.41907926 \times 10^{26}$ meter (15 milliárd fényév)

Világegyetem sugara kb.: 1.5×10^{26} méter