

DIRAC EGYENLET ÉS SAJÁTIMPULZUS

A Dirac egyenlet alternatív értelmezése

1. Bevezetés

P. A. M. Dirac (1902-1984) Nobel-díjas angol fizikus 1928-ban, mindössze 26 éves korában találta meg az akkor még csak két éves *Schrödinger egyenlet* relativisztikus általánosítását. Igaz, még 1926-ban maga Schrödinger, és mások is próbálkoztak a kvantummechanikai hullámeqyenlet relativisztikus általánosításával (*Klein-Gordon egyenlet*), ami sajnos nem felelt meg a várakozásoknak (pl. a hidrogén atom spektrumát hibásan írta le, de más értelmezési nehézségek is jelentkeztek). A Klein-Gordon egyenlet a négyes-impulzus komponenseket négyzetesen tartalmazta, a relativitáselmélet matematikájának megfelelően. Dirac észrevette, hogy a Schrödinger egyenletben az energia az első hatványon szerepel, míg az impulzuskomponensek négyzetesen szerepelnek. Dirac zseniálisan egyszerű módszert talált arra, hogy a relativisztikus hullámeqyenletben a négyes-impulzus komponensek mindegyike csak az első hatványon szerepeljen. A sikerhez Dirac-ot a matematikus képzettsége nagyban segítette, ugyanis célkitűzését a *nem-kommutatív algebra* (mátrixok algebrája) alkalmazásával valósította meg. (Egyébként maga az egész kvantummechanika a nem-kommutatív operátorokra épít: az impulzus, koordináta, pályamomentum, spin, stb. operátorai.)

A Dirac egyenlet relativisztikus invarianciája már „ránézésre” is teljesül, mindemellett a hidrogén atom spektrumát (finomszerkezetét) is helyesen írta le. Ami leginkább meglepő és döbbenetes volt mindenki számára ebben az egyenletben, hogy inherensen (automatikusan) szolgáltatja az elektron-spint, amely a korábbi Pauli elméletben mesterségesen volt hozzá-toldva a Schrödinger egyenlethez. A Dirac egyenletből lehetett következtetni az anyag kétféle megjelenési formájára, az anyagra és antianyagra. Az elektron antianyag párja a pozitív töltésű pozitron, amit először Dirac a protonnal azonosította. A Dirac egyenlet azonban az elektronnal azonos tömegű, de pozitív töltésű „elektront” jósolt, ilyen részecske azonban akkor még nem volt ismert. A pozitront 1932-ben fedezte fel Carl Anderson a kozmikus sugárzásban, de számos pozitron-sugárzó radioaktív izotóp is van. Az utóbbi felfedezése csak évekkel később történt a magfizika gyors fejlődése következtében. A Dirac egyenletet a fizika a mai napig a fermion részecskék (feles spinű részecskék) egzakt hullámeqyenletének tekinti (igazán pontosan az elektronra, pozitronra, és feltevés szerint a neutrínókra érvényes egzakt módon).

Dirac 1930-ban megjelent *A kvantummechanika alapjai (Principles of Quantum Mechanics)* című műve a mai napig használatos alapvető tankönyv lett. Dirac 1933-ban megosztott fizikai Nobel-díjat kapott Erwin Schrödingerrel „az atomelmélet új hatékony formáinak felfedezéséért”.

A jelen munkámban a *Dirac egyenlet egy lehetséges értelmezésével* próbálom bizonyítani a sajátimpulzus fizikai fogalmának realitását, ezzel egyben a „pluszos” relativitáselmélet létjogosultságát. A relativitáselmélet „pluszos” kiterjesztési lehetőségéről a honlapom egy másik dolgozatában írok:

<http://www.geocities.com/fhunman/relativity.pdf> (1.1)

A Dirac egyenletet egyetemista korom óta ismerem és mindig óriási lelkesedéssel töltött el, lenyűgözött Dirac kreativitása, az általa bevezetett matematikai formalizmusa, maga a Dirac egyenlet levezetése. A fizikához való matematikusi hozzáállás módszertani példája nekem is irányt mutatott, hogyan lehet igazán sikereket elérni a fizikában. Diplomamunkámat a Dirac-

egyenlet egy egyszerű molekulafizikai alkalmazásából írtam, a számításokat a kezdetleges „ODRA” számítógéppel végeztem (két szobát foglalt el, és lyukszalaggal volt programozható). Diplomamunkámat 1972-ben jelesen védtem meg a debreceni KLTE elméleti fizikai tanszékén.

Végezetül sajnálatosan figyelmeztetnem kell a munkám Tisztelt Olvasóit, hogy a Dirac egyenlet szépségének és jelentőségének igazi megértéséhez a speciális relativitás elemi ismerete és alapos kvantummechanikai tanulmányok „végigszenvedése” szükségeltetik. Ez hasonló ahhoz, hogy a komolyzenei művek igazi mély átéléséhez, nem is beszélve a színvonalas interpretálásukhoz sokéves zenei tanulmányok szükségesek. Mindazonáltal nagyon reménykedem, hogy műszakiak, matematikai előképzettséggel rendelkező tanárok talán nagy része tudja követni az alapjában véve egyszerű gondolatmenetemet.

Sarkadi Dezső 2008 decembere

2. A Dirac egyenlet

A következőkben természetes fizikai egységrendszert használok, amelyben a fénysebesség, illetve a h -vonás Planck állandó egységnyi értékű. Ebből az következik, hogy a tömeg és energia szinonim kifejezések.

Amint azt a Bevezetésben említettem, az első relativisztikus kvantummechanikai egyenlet még a kvantummechanika születési évében, 1926-ban felírásra került, ez a *Klein-Gordon* egyenlet:

$$\mathbf{p}_\mu \mathbf{p}^\mu \psi \equiv \mathbf{p}_\mu \mathbf{p}_\nu g^{\mu\nu} \psi = m^2 \psi, \quad (2.1)$$

ahol $\mathbf{p}$ a négyesimpulzus operátora, m a részecske tömege és ψ a Schrödinger-féle anyaghullám függvény. A μ, ν indexek négy értéket vehetnek fel, szokásos jelölésük: 0, 1, 2, 3. Az *Einstein-konvenció* szerint az alsó és felső index-párookra összegezni kell.

A $g^{\mu\nu}$ metrikus tenzor a relativitáselmélet alapvető tenzora, mely a speciális relativitáselméletben egyszerű alakú, azaz mátrix alakban felírva csak a főátlóbeli elemei különböznek nullától:

$$g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

A relativitáselmélet a négydimenziós „téridőre” épül, így a metrikus tenzor is 4 x 4-es mátrixba foglalható. Szokásos a speciális relativitásban a metrikus tenzor „szignatúráját” felírni, ami jelen esetben: (+ - - -). A négyes-impulzusra megkövetelt egyenlet a megadott metrikus tenzonnal:

$$p_\mu p^\mu \equiv p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2, \quad (2.3)$$

ahol E a részecske energiája, a p -vel jelölt mennyiségek pedig az impulzus hagyományos koordináta komponenseit jelölik. A (2.1) Klein-Gordon egyenlet (sajátérték-egyenlet) a (2.3) követelmény kvantummechanikai alakja. A Klein-Gordon egyenletet rögtön a felírása után megoldották a hidrogén atom elektronjára, amelynek végeredménye nem egyezett a hidrogén atom kísérleti spektrumával. Jóval később kiderült, hogy ez az egyenlet a hidrogén atom „egzotikus” változatára, a π -mezon atomra sikerrel alkalmazható. A „ π -mezon atom” a hidrogén

atom rövid ideig létező változata, melynél a proton körül az elektron helyett egy negatív töltésű π -mezon részecske kering. A Klein-Gordon egyenletet ma a zérus-spinű mezon-részecskék egzakt relativisztikus hullámegyenletének tartják.

Dirac célja az volt, hogy a (2.1) hullámegyenletnek olyan változatát írja föl, amiben a négyes-impulzus komponensek az első hatványon szerepelnek, mivel a sikeres Schrödinger egyenletben az energia első hatványon szerepel. A matematikusi vénájából következő gondolata egyszerűen az volt, hogy vonjunk gyököt a (2.3) négyzetes relativisztikus követelményből. Hogy a végeredmény megőrizze a formálisan relativisztikus alakot, tagonként kell gyököt vonni. Dirac számára ez nem okozott problémát, a (2.3) egyenlet négyzetgyökét a következő alakban írta fel (bocsánat, hogy kissé eltér a pontos történettől, de a lényeg ugyanaz):

$$p_\mu \gamma^\mu \equiv p_\mu \gamma_\nu g^{\mu\nu} \equiv E\gamma_0 - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3 = \pm m, \quad (2.4)$$

ahol a gamma négyes-vektor elemei mátrixok (nem-kommutatív algebra elemei). A gyökvonás „próbája” a négyzetre-emelés:

$$\left(p_\mu \gamma^\mu\right)^2 \equiv p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = m^2. \quad (2.5)$$

Ebből első látásra az következne, hogy $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu}$, de ez a feltétel nem teljesülhet, ugyanis a gamma mátrixok (*Dirac mátrixok*) nem kommutatívok, és így nem teljesülhet a metrikus tenzorra megkövetelt szimmetria:

$$g^{\mu\nu} \equiv g^{\nu\mu} \equiv g_{\nu\mu} \equiv g_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

A Dirac mátrixok kombinációja (szimmetrizálás) viszont már kielégítheti a (2.6) feltételt:

$$g^{\mu\nu} = \left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) / 2. \quad (2.7)$$

Mindezek ismeretében már felírhatjuk Dirac relativisztikus hullámegyenletét:

$$\mathbf{p}_\mu \gamma^\mu \Psi_\pm = \pm m \Psi_\pm. \quad (2.8)$$

amely feles spinű részecskék egzakt relativisztikus kvantummechanikai hullámegyenlete (sajátérték egyenlet). Meg kell jegyezni, hogy ebben a formában nem szokás felírni, ugyanis a fizikában a negatív tömeg nem értelmezett. Dirac is szembesült a problémával, amit a Dirac-féle „lyukelmélettel” oldotta fel. Ennek részleteibe nem megyek bele, csak annyit említek, hogy a negatív tömeget egy ellentétes elektromos töltésű, de pozitív tömegű részecskével lehet azonosítani. Elektron esetében a negatív tömegű megoldás a pozitív töltésű, de az elektron pozitív tömegével hajszálpontosan megegyező *pozitron részecske* létezését jósolja, amit később meg is találták. Nincs azonban gond a fizikában a negatív energia fogalmával, így a pozitron nyugalmi energiáját negatívnak tekintjük ($E_0 = -mc^2$). A negatív nyugalmi energiájú részecskéket *antirészecskékné* nevezzük. Az *antianyag* antirészecskékből épül fel.

A Dirac mátrixok legegyszerűbb alakjai a *Pauli-féle spin-mátrixokból* épülnek fel, ami a Dirac egyenlet feles spint is magába foglaló tulajdonságát mutatja, nagy meglepetésre. A Dirac mátrixok részleteiről a **Függelékben** számolok be. A Dirac mátrixok legegyszerűbb reprezentációi a (2.8) sajátérték egyenletekben 4×4 -es mátrixok, emiatt a hullámfüggvények

szükségszerűen négykomponensű vektorok alakjában írhatók fel. Fontos megjegyezni, hogy a Dirac hullámfüggvények nem a relativitáselméletben definiált négyes-vektoroknak felelnek meg, mivel nem a Lorentz transzformáció szerint transzformálódnak. A Dirac hullámfüggvényeket *bispinoroknak* nevezik, és Lorentz transzformáció esetén (áttérés másik inerciarendszerre) a bispinorok is transzformálódnak, de a négyes-vektoroktól eltérő módon. A részletekkel itt nem érdemes foglalkozni, mivel azok pontosan megtalálhatók a szakkönyvekben.

A hidrogénatom spektrumát a Dirac egyenlet nagy pontossággal képes leírni, bár 1948-ban piciny eltéréseket mértek, amiben először az elméleti fizikusok nem igazán hittek. De a mérések pontosak és megbízhatóak voltak, így a Dirac egyenlet piciny szépséghibáját korrigálni kellett. A parányi hiba okát a fizikusok abban vélték megtalálni, hogy a Dirac egyenlet nem veszi figyelembe az elektromágneses tér kvantumtulajdonságát. Az *elektromágneses tér kvantumelméletével* (QED-vel) sikerült ezeket a kis eltéréseket értelmezni és nagy pontossággal kiszámítani.

A klasszikus elektromágneses teret a speciális relativitáselmélet képletével veszi figyelembe a Dirac egyenlet:

$$(\mathbf{p}_\mu - qA_\mu)\gamma^\mu\Psi_\pm = \pm m\Psi_\pm, \quad (2.8)$$

ahol q a fermion részecske töltése (elektron esetén $q = -e$, az elemi töltés negatív előjellel) és A_μ az elektromágneses tér (EM) ún. *vektorpotenciálja*. Dirac először nem merte felvállalni ennek az egyenletnek a megoldását a hidrogén atomra (talán a Klein-Gordon egyenlet kudarcáért benne), a feladatot egyik matematikus barátjára bízta. A (2.8) egyenlet megoldása a hidrogén atomra szerencsére teljes sikerre vezetett, ami megalapozta Dirac Nobel-díját.

3. A Dirac egyenlet egy újabb fizikai értelmezése

A Dirac mátrixokra érvényes a jelen munka szempontjából fontos összefüggés:

$$\gamma_\mu\gamma^\mu \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu g^{\mu\nu} \equiv \gamma_0\gamma_0 - \gamma_1\gamma_1 - \gamma_2\gamma_2 - \gamma_3\gamma_3 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \quad (3.1)$$

A gamma mátrixok olyan négyes-vektort alkotnak ezek szerint, melynek a hagyományos impulzuskomponensei *tiszta képzetes egységek* (i = a képzetes egység: $i^2 = -1$) felelnek meg. Az (1.1) munkámban a sajátimpulzust úgy vezettem be, mintha azoknak képzetes komponensei lennének. A Dirac mátrixok tehát éppen a sajátimpulzusnak egy lehetséges reprezentációját alkotják. Ugyancsak az (1.1) dolgozatomban kihangsúlyoztam, hogy a sajátimpulzus nem a részecske térbeli mozgását jellemzi, hanem a részecskének egy olyan (virtuális) belső mozgását, amely a részecske belső kinetikus energiáját jellemzi és hozzájárul a részecske megfigyelhető (kísérleti) tömegéhez. A sajátimpulzus fogalmát a „pluszos” relativitáselméletben értelmeztem, amelyhez rendelhető szignatúra (+ + + +), amely az ismert háromdimenziós *euklideszi tér* négydimenziós változatának felel meg. A „mínuszos” speciális relativitás geometriáját *pszeudoeuklideszi* térnek szokás nevezni, melynek szignatúrája (+ - - -). A „pluszos” relativitáselmélet metrikus tenzora értelemszerűen (a nem jelölt elemek zérusok):

$$G^{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

A „pluszos” relativitásban a sebességnek nincs felső korlátja, tehát a fénysebességnek sincs felső korlátja. A *sajátsebesség*, illetve a sajátimpulzus a részecskéhez rendelhető belső fizikai jellemző, a spinhez hasonlóan. Az elektron spin mérhető mágneses momentummal is jár, melynek ismeretében naiv számítások történtek. Ezek a számítások az elektron „kerületi sebességére” a fénysebességnél nagyobb értékekre vezettek. A klasszikus fizikai kép alapján végzett számítások ugyanis eleve kudarcra vannak ítélve, mivel az elektron a valóságban nem egy gömb alakú képződmény (nem golyó), hanem egy elképzelhetetlen „hullámcsomag”. Az elektronról képet, szobrot senki sem tud alkotni, ezért elképzelni sem tudjuk. Az elektron jellemző paraméterei (tömeg, töltés, spin) csak matematikai formában jelennek meg a fizikai egyenletekben. A matematikai modell által szolgáltatott adatokat a mérési eredményekkel összehasonlítva (a színek spektrum alapján) tudjuk megítélni magának a modellnek a sikerességét.

Mivel a Dirac mátrixok eredetileg az elektron-spinhez köthetők, ráadásul *poláris* négyes-vektort alkotnak (tértükrözéskor előjelet váltanak), alkalmasnak tűnnek egy-egy részecske sajátimpulzus komponenseinek reprezentálására. Az (1.1) munkámban a tömeg szerkezetére a sajátimpulzus figyelembevételével „tömegháromszöget” kaptam:

$$M^2 = R^2 + C^2 . \quad (3.3)$$

Itt M a részecske megfigyelhető tömege, R a maradék tömeg és C a sajátimpulzus tömeg. Természetesen mindkét résztömeg szükségszerűen Lorentz invariáns skalár. A legegyszerűbb választás, hogy *a részecske sajátimpulzus tömegének négyzete legyen arányos a Dirac mátrixok négydimenziós belső szorzatával*:

$$C^2 \sim \gamma_\mu \gamma^\mu \equiv 4 . \quad (3.4)$$

Vizsgáljuk meg a következő sajátérték egyenletet:

$$\mathbf{D}_\mu \mathbf{D}^\mu \Psi = M^2 \Psi , \quad (3.5)$$

ahol a $\mathbf{D}$ operátor:

$$\mathbf{D}_\mu = \mathbf{p}_\mu + k\gamma_\mu ; \quad \mathbf{D}^\mu = \mathbf{p}^\mu + k\gamma^\mu ; \quad (k \text{ valós szám}) . \quad (3.6)$$

A (3.5) egyenlet részletesen:

$$\mathbf{D}_\mu \mathbf{D}^\mu \Psi = (\mathbf{p}_\mu \mathbf{p}^\mu + 2k\mathbf{p}_\mu \gamma^\mu + k^2 \gamma_\mu \gamma^\mu) \Psi = M^2 \Psi , \quad (3.7)$$

mivel

$$\mathbf{p}_\mu \gamma^\mu \equiv \gamma^\mu \mathbf{p}_\mu \equiv \gamma_\mu \mathbf{p}^\mu . \quad (3.8)$$

A hullámfüggvény elégítse ki a Dirac egyenletet ($m = \text{bázistömeg}$):

$$\mathbf{p}_\mu \gamma^\mu \Psi = m \Psi , \quad (3.9)$$

akkor teljesül a Dirac egyenlet „négyzete” is:

$$\mathbf{p}_\mu \mathbf{p}^\mu \Psi = m^2 \Psi, \quad (3.10)$$

valamint (3.1) ismeretében:

$$k^2 \gamma_\mu \gamma^\mu \Psi \equiv 4k^2 \Psi. \quad (3.11)$$

Mindezek alapján a (3.7) sajátérték egyenlet egy algebrai egyenletre vezet:

$$m^2 + 2km + 4k^2 \equiv (m + k)^2 + 3k^2 = M^2. \quad (3.12)$$

A fermion tömegszerkezeti képlete ennek megfelelően:

$$\boxed{\begin{aligned} M^2 &= (m + k)^2 + 3k^2 = R^2 + C^2 \\ R^2 &\equiv (m + k)^2; \quad C^2 \equiv 3k^2 \end{aligned}} \quad (3.13)$$

A fermion részecske *bázistömege*:

$$m = -k \pm \sqrt{M^2 - C^2} \equiv -k \pm \sqrt{M^2 - 3k^2}. \quad (3.14)$$

4. A bozonok tömegszerkezete

Itt most csak a skalárbozonokról lesz szó, de az eljárás értelemszerűen kiterjeszthető vektorbozonokra is. A skalárbozonok egzakt relativisztikus hullámegyenlete a Klein-Gordon egyenlet, melynek megoldása lehet a Dirac-féle bispinor megoldása, de léteznek olyan hullámfüggvények is, melyek nem elégítik ki a Dirac egyenletet, csak a Klein-Gordon egyenletet.

A skalárbozonok tömegszerkezetét (3.5) mintájára a következő hullámegyenlet megoldásával határozzuk meg:

$$\mathbf{D}_\mu \mathbf{D}^\mu \varphi = M^2 \varphi. \quad (4.1)$$

A $\mathbf{D}_\mu$ operátor a következő lesz:

$$\mathbf{D}_\mu = \mathbf{p}_\mu \gamma + k \gamma_\mu; \quad \mathbf{D}^\mu = \gamma \mathbf{p}^\mu + k \gamma^\mu; \quad (k \text{ valós szám}). \quad (4.2)$$

A gamma operátor 4 x 4-es mátrix, amely *kommutál* az impulzus operátorral, *antikommutál* az összes Dirac mátrix-szal, és négyzete egységnyi:

$$\gamma^2 = 1; \quad \mathbf{p}_\mu \gamma = \gamma \mathbf{p}_\mu; \quad \gamma \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma; \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (4.3)$$

A gamma mátrixot a Függelékben adom meg. Mindezek ismeretében a (4.1) hullámegyenlet a következő lesz:

$$\mathbf{D}_\mu \mathbf{D}^\mu \varphi \equiv (\mathbf{p}_\mu \mathbf{p}^\mu + k^2 \gamma_\mu \gamma^\mu) \varphi \equiv (\mathbf{p}_\mu \mathbf{p}^\mu + 4k^2) \varphi = M^2 \varphi. \quad (4.4)$$

Az m „bázistömegre” teljesüljön a Klein-Gordon egyenlet:

$$\mathbf{p}_\mu \mathbf{p}^\mu \varphi = m^2 \varphi, \quad (4.5)$$

és így a (4.4) egyenlet a következő skálárbozon tömeg egyenletre vezet:

$$\boxed{\begin{aligned} M^2 &= m^2 + 4k^2 = R^2 + C^2 \\ R^2 &\equiv m^2; \quad C^2 \equiv 4k^2 \end{aligned}}. \quad (4.6)$$

5. Atommagok tömegszerkezete

A fenti eredmények speciálisan az atommagokra is alkalmazhatók. Az atommag tömege és az egész atom tömege csak kicsit tér el, ezért itt valójában a semleges atomtömegek szerkezetét vizsgáljuk. Az atommag külön vizsgálata az atom egy mesterséges szétválasztását jelenti, ami sok esetben indokolt és előnyös is lehet. Maga az atom egésze azonban sokkal közelebb áll annak természetes állapotához.

A tömeg szerkezetére vonatkozó általános megállapítások az atom nyugalmi tömegére vonatkoznak. A mérések szerint az atomok nyugalmi tömege jó közelítésben arányos az $A = Z + N$ tömegszámmal, ezért feltehetjük, hogy a nukleonok mindegyike azonos mértékben vesz részt a kötési energia kialakításban. Első közelítésben egy atom nyugalmi tömege a következő alakban írható fel:

$$M(A) \cong (Z + N) \times M_0 \equiv A \times M_0, \quad (4.5)$$

ahol M_0 az átlagos atom (nukleon) tömeget jelöli. Az atomok nyugalmi tömegének additív tulajdonságából következik, hogy mind a maradék tömeg, mind a sajátimpulzus tömeg külön-külön additív:

$$R(A) \cong A \times R_0; \quad C(A) \cong A \times C_0. \quad (4.6)$$

Az „elemi” tömegparamétereket az általános tömegszerkezeti képlet köti össze:

$$M_0^2 = R_0^2 + C_0^2, \quad (4.7)$$

és így tetszőleges atom tömegszerkezete közelítőleg:

$$M^2(A) \cong (AM_0)^2 = (AR_0)^2 + (AC_0)^2 \equiv R^2 + C^2. \quad (4.8)$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy tetszőleges atom szerkezetére jellemző derékszögű „tömeg-háromszög” az *elemi tömegháromszög A-szoros nagyításának felel meg*. A valóságban ez csak közelítőleg teljesül, hiszen az atommagok kötése tömegcsökkenésre (tömegdefektusra) vezet. Ez a tömegcsökkenés egyszerűen értelmezhető a tömegszerkezeti képlet alapján. Ugyanis a jelen munka szerint mind a bozon magok ($A = \text{páros}$), mind a fermion magok ($A = \text{páratlan}$) esetében az atomokhoz formálisan *két-dimenziós, euklideszi metrikájú tömegvektor* rendelhető:

$$\mathbf{M}(A) = [R(A), C(A)], \quad (4.9)$$

ahol a kísérleti (megfigyelhető) tömeg értelemszerűen:

$$M(A) = \sqrt{R^2(A) + C^2(A)}. \quad (4.10)$$

Két atom fúziója esetén keletkező atom tömegvektora:

$$\mathbf{M}(A_1 + A_2) = [R(A_1) + R(A_2), C(A_1) + C(A_2)]. \quad (4.11)$$

Mivel a tömegvektorok arányossága az A tömegszámmal nem pontosan teljesül, ezért az euklideszi vektorok tulajdonsága miatt a tömegdefektus egyszerűen értelmezhető:

$$M(A_1 + A_2) \leq M(A_1) + M(A_2). \quad (4.10)$$

Az atomok (atommagok) nukleáris eredetű kötése tehát visszavezethető a tömegszerkezetük euklideszi vektor tulajdonságára.

Az atomok belső energiáját a sajátimpulzusaik határozzák meg, melyek egyértelműen kapcsolatban állnak az atomokat alkotó részecskék (nukleonok, kvarkok) kinetikus, illetve potenciális energiáival. A nukleáris kölcsönhatások során az atomok sajátimpulzusai jelentős mértékben megváltoznak, ami következtében a kölcsönható potenciál is jelentősen megváltozik. Az atomhøj fizikát leíró elektromágneses kölcsönhatás potenciálja lényegesen nem változik a héjat érintő kölcsönhatásoknál, tehát az elektromágneses potenciál jó közelítésben sztatikusnak tekinthető. Ezért sikeres az atom-, illetve molekulafizikában a sztatikus potenciált feltételező kvantummechanikai leírás. Nukleáris kölcsönhatásoknál viszont messzi nem beszélhetünk sztatikus potenciálokról, ezért az erőltetett magfizikai potenciálok sohasem vezethetnek megbízható, egyértelmű eredményre, még a *QCD potenciálok* esetében sem (*Quantum Color Dynamics*). Ennek döbbenetes bizonyítéka, hogy a sokévi intenzív QCD kutatások a mai napig nem vezettek egyetlen kézzelfogható eredményre a magfizikában (ismereteim szerint például még a *deutérium kötési energiáját* sem sikerült kiszámítani a QCD elmélettel). Ennek oka a fentiek értelmében egyszerűen az, hogy a tömeg szerkezetének kérdése, a sajátimpulzus fogalma eddig fel sem merült.

Összefoglalás

A relativitáselmélet általánosításával, valamint ennek alapján a Dirac egyenlet egy új értelmezésével eljutottunk az elemi részek egy egyszerű tömegszerkezeti modelljéhez.

A nukleáris kölcsönhatással, a semleges atomok tömegének eredetével, a jelen munkában ismertett teljesen új fizikai elvek alapján a honlapom más részeiben részletesen foglalkozom.

6. Függelék

A Dirac mátrixok (Dirac bázis)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A gamma mátrix (Dirac bázis)

$$\gamma \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A gamma mátrix *pszeudoskalár*. A relativitáselméletben a skalárok nem transzformálódnak, a töltéshez és a nyugalmi tömeghez hasonlóan. A pszeudoskalár elnevezés onnan származik, hogy tértükrözés esetén gamma mátrix előjelet vált. A tértükrözés a három térkoordináta tükrözését jelenti:

$$P : (x, y, z) \Rightarrow (-x, -y, -z); \quad (P = \text{paritás operátor})$$

$$P : \gamma = -\gamma$$

A gamma mátrix fontos tulajdonságai:

$$\gamma^2 = 1; \quad \gamma^+ = \gamma; \quad \mathbf{p}_\mu \gamma = \gamma \mathbf{p}_\mu; \quad \gamma \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma$$

Mivel a gamma operátor négyzete 1, a sajátértékei ± 1 .

A felsorolt Dirac mátrixok, illetve azok *izomorf reprezentációi* a négydimenziós *bispinor tér* operátorai.