

ΠΑΡΑΛΙΓΟ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΕΝΤΑΓΩΝΑ: ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ

Μπάμπης Τουμάσης
Νόρμαν 33-35, 262 23, Πάτρα
Τηλ: 2610-455003
toumasis@sch.gr

Περίληψη

Ο Άλμπρεχτ Ντύρερ είναι ίσως ο πιο σπουδαίος καλλιτέχνης που έχει προσφέρει η Γερμανία στη Δυτική κουλτούρα. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια ξεχασμένη εργασία του Ντύρερ, η οποία συνίσταται σε μία προσεγγιστική κατασκευή του κανονικού πενταγώνου με διαβήτη, που θεωρείται ακόμη η γρηγορότερη γνωστή μέθοδος για πρακτική σχεδίαση. Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποιες ιδέες και υποδείξεις για την ενσωμάτωση της παραπάνω κατασκευής στη διδακτική πράξη.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά και η τέχνη είναι αχώριστα συνδεδεμένα, όχι μόνο με την έννοια ότι η τέχνη δανείζεται συνέχεια στοιχεία από τα μαθηματικά, αλλά και επειδή και τα δύο αντιπροσωπεύουν τη τάξη, την αρμονία και την ομορφιά τα μαθηματικά στη φύση και η τέχνη ως έκφραση του δημιουργικού ένστικτου του ανθρώπου[1]. Οι εικαστικές τέχνες δεν είναι δυνατόν να νοηθούν ανεξάρτητα από τα μαθηματικά και ιδιαίτερα από τη Γεωμετρία. Γενικά η αρχιτεκτονική σύλληψη, η γλυπτική και η ζωγραφική υλοποιούνται πάντοτε με τη βοήθεια των νόμων του ρυθμού, της αναλογίας, της αρμονίας και της αισθητικής πληρότητας.

Τέχνη και Γεωμετρία ιδιαίτερα, αποτελούν ένα αναπόσπαστο σύμπλεγμα. Το γεωμετρικό σχήμα έπαιζε ανέκαθεν πρωταγωνιστικό ρόλο στις εικαστικές τέχνες. Ο καλλιτέχνης, ως συνθέτης και δημιουργός εμψύχωνε τα απλά αδρανή και αμίλητα γεωμετρικά σχήματα και τα έβαζε να μιλήσουν στις συνθέσεις του [2]. Τα στοιχεία που δανείζονται οι τέχνες από τη Γεωμετρία είναι το σημείο η γραμμή, τα σχήματα των επιπέδων και στερεών αντικειμένων και η προοπτική. Τα στοιχεία αυτά συντίθενται κάθε φορά με βασικούς άξονες την οπτική ισορροπία, τη συμμετρία και την αναλογία, προκειμένου να αποδώσουν σε μια σχεδιαστική λύση αρμονία, πληρότητα και κάλος [3].

Κάθε φορά που εμφανίζονται νέα μαθηματικά αντικείμενα ως αποτέλεσμα της μαθηματικής έρευνας, όπως π.χ. η Διαφορική Γεωμετρία, η Τοπολογία και η μοντέρνα Άλγεβρα κατά τον 19^ο αιώνα ή τα Φράκταλ κατά τον 20^ο αιώνα [4], ένας μεγάλος αριθμός ζωγράφων, γλυπτών ή αρχιτεκτόνων ανακαλύπτουν θέματα μέσα σ' αυτόν τον πρόσφατο μαθηματικό χώρο. Η μαθηματική τέχνη συμβάλλει έτσι στην ανανέωση της εικαστικής τέχνης. Και δεν υπάρχει αμφιβολία ότι με το πέρασμα του χρόνου όλο και περισσότεροι καλλιτέχνες θα αντλούν ένα μέρος της έμπνευσης τους από τα μαθηματικά αντικείμενα [5].

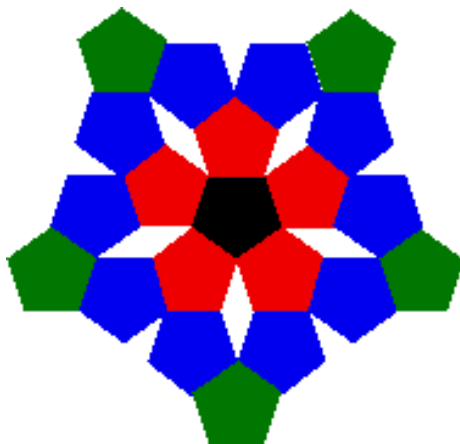
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μεγάλου ζωγράφου, ο οποίος ενσωμάτωσε στα έργα του γεωμετρικά στοιχεία, ενώ υπήρξε παράλληλα και σπουδαίος ερασιτέχνης μαθηματικός ήταν ο Άλμπρεχτ Ντύρερ (Albrecht Durer, 1471-1528). Ο Ντύρερ, που πέρα των άλλων ήταν και μεγάλος διανοητής, θεωρείται ο πατέρας της μοντέρνας Γερμανικής ζωγραφικής και συχνά θεωρείται ως ο ενσαρκωτής της αναγέννησης στη Γερμανία [6]. Καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του ασχολήθηκε με όλα εκείνα τα προβλήματα που εμπίπτουν στην περιοχή της γεωμετρικής τέχνης και που αργότερα διαμόρφωσαν αυτό που αποκαλούμε σήμερα αισθητική ή θεωρία του κάλους. Ένα από τα διασημότερα έργα του είναι το χαρακτηριστικό με τίτλο «Μελαγχολία», που το φιλοτέχνησε το 1514. Στο έργο αυτό είναι έκδηλα τα μαθηματικά στοιχεία, με το πολύεδρο, τη σφαίρα και το μαγικό τετράγωνο να κατέχουν περίοπτη θέση [7,8] (σχήμα 1).



Σχήμα 1 : Μελαγχολία, χαρακτηριστικό του Ντύρερ

Το 1525 ο Ντύρερ εξέδωσε ένα βιβλίο με τίτλο “Οδηγίες για τη μέτρηση με κανόνα και διαβήτη”, στο οποίο ασχολούνται με τη θεωρία της προοπτικής και τις γεωμετρικές κατασκευές. Στο βιβλίο αυτό δίνει έμφαση στην κατασκευή των κανονικών πολυγώνων, ιδιαίτερα δε εκείνων που δεν προκύπτουν άμεσα από το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο.

Ο Ντύρερ ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου. Ο αριθμός 5 ασκούσε μια μαγεία στους καλλιτέχνες της εποχής εκείνης επειδή ήταν ταυτισμένος με τη μυστική και θεϊκή τελειότητα. Ο αριθμός αυτός πολλαπλασιαζόμενος επί τον εαυτό του κάθε φορά επαναλαμβάνεται ($5 \cdot 5 = 25$, $25 \cdot 5 = 125$, $125 \cdot 5 = 625 \dots$). Στο Μεσαίωνα ο αριθμός 5 αναφέρονταν σε όλα τα ζωντανά είδη (πουλιά, ψάρια, φυτά, ζώα και ανθρώπινα όντα) και συμβόλιζε τα πέντε πλάσματα του Θεού. Ένας λόγος παραπάνω ήταν επίσης το ότι ο λόγος της διαγωνίου του κανονικού πενταγώνου προς την πλευρά του ισούται με το χρυσό λόγο Φ , οποίος από την αρχαιότητα αντιπροσώπευε την απόλυτη αρμονία. Τόσο ο Ντύρερ όσο και Λεονάρντο ντα Βίντσι, κατανόησαν τη σημασία του κανονικού πενταγώνου και ήθελαν να κατασκευάζουν με απλό και γρήγορο τρόπο ένα τέτοιο θεϊκό πολύγωνο. Ο Ντύρερ επιπλέον ασχολήθηκε και με πλακοστρώσεις κανονικών πενταγώνων και γενικότερα με διακοσμητικά σχήματα που ως βασικό συστατικό στοιχείο είχαν το κανονικό πεντάγωνο (σχήμα 2).



Σχήμα 2: Πλακόστρωση Ντύρερ με κανονικά πεντάγωνα

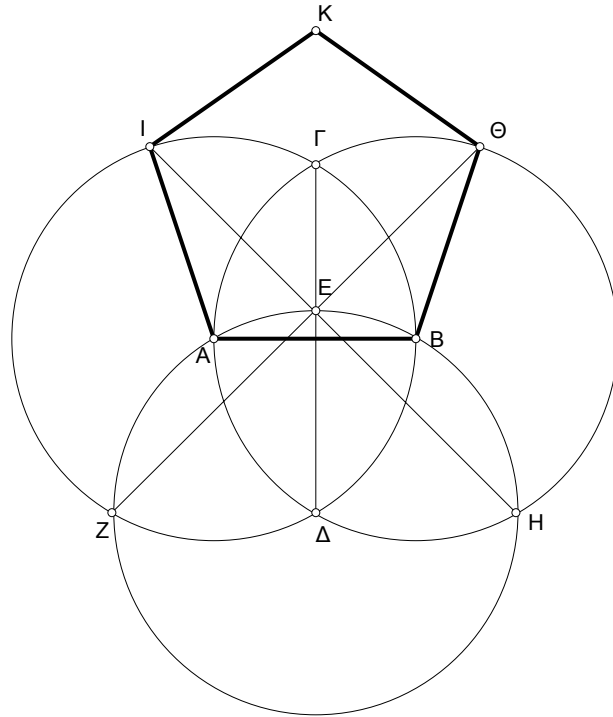
Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με την προσεγγιστική κατασκευή του κανονικού πενταγώνου, που πρότεινε ο Ντύρερ στο προαναφερθέν βιβλίο του και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποιες ιδέες για την αξιοποίηση της στη διδακτική πράξη.

Προσεγγιστική κατασκευή κανονικού πενταγώνου από τον Ντύρερ.

Ο Ντύρερ γνώριζε την ακριβή κατασκευή του κανονικού πενταγώνου με κανόνα και διαβήτη, όπως δίνεται από τον Ευκλείδη στα «Στοιχεία». Το ενδιαφέρον του για μια γρήγορη και πρακτική κατασκευή του κανονικού πενταγώνου προήλθε από την ανάγκη για την κατασκευή τέτοιων πενταγώνων από τους τεχνίτες των Μεσαιωνικών χρόνων και αργότερα της Αναγέννησης, λόγω της διαδεδομένης χρήσης τους στη διακόσμηση, τόσο των Ισλαμικών όσο και των Γοτθικών έργων τέχνης [9]. Οι κατασκευές αυτές προκειμένου να είναι εύχρηστες, έπρεπε να είναι απλές, γρήγορες και το κυριότερο να γίνονται με ένα συγκεκριμένο άνοιγμα του διαβήτη, γιατί δεν υπήρχε κάποια τεχνική να επανακτούσαν το αρχικό άνοιγμα μόλις αυτό άλλαζε.

Τα βήματα της κατασκευής είναι τα παρακάτω [10](σχήμα 3):

1. Ανοίγουμε το διαβήτη, διατηρώντας το άνοιγμά του σταθερό καθ' όλη την κατασκευή, και έστω A, B τα σημεία που ορίζονται από τα άκρα του.
2. Με ακτίνα AB κατασκευάζουμε δύο κύκλους με κέντρα τα A και B , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Γ και Δ .
3. Κατασκευάζουμε τον κύκλο κέντρου Δ και ακτίνας ΔA , ο οποίος θα διέλθει από το B και θα τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ στο E και τους κύκλους με κέντρα τα A και B στα σημεία Z και H .
4. Φέρουμε τη ZE , η οποία τέμνει τον κύκλο κέντρου B στο Θ και την HE , η οποία τέμνει τον κύκλο κέντρου A στο I .
5. Κατασκευάζουμε τους κύκλους με κέντρα τα Θ και I και την ίδια αρχική ακτίνα AB , οι οποίοι τέμνονται στο K . Το ζητούμενο κανονικό πεντάγωνο είναι το $AB\Theta KI$.



Σχήμα 3 : Προσεγγιστική κατασκευή κανονικού πενταγώνου

Το πεντάγωνο αυτό δημιουργεί αμέσως την αίσθηση ότι είναι κανονικό· ότι έχει δηλαδή όλες τις πλευρές και τις γωνίες ίσες. Αυτό, βέβαια, είναι αληθές όσο αφορά τις πλευρές του, αφού αυτές είναι ακτίνες κύκλων, οι οποίοι έχουν παραχθεί από διαβήτη με σταθερό άνοιγμα ίσο με AB . Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και ως προς τις γωνίες του. Ως γνωστόν η κεντρική γωνία ενός κανονικού πενταγώνου είναι 72° , ενώ η γωνία των κορυφών του ισούται με 108° . Στην πραγματικότητα, όπως θα δούμε παρακάτω, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Theta} = 108^\circ 21' 58''$, δηλαδή, κάτι λίγο περισσότερο από 108° , έτσι ώστε κάποια άλλη γωνία της κορυφής θα πρέπει να είναι λίγο μικρότερη από 108° .

Απόδειξη:

Πράγματι, $\hat{B}\hat{A}\hat{I} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Theta}$ και κάθε μια από τις γωνίες $\hat{B}\hat{\Theta}\hat{K}$ και $\hat{A}\hat{I}\hat{K}$ είναι ελαφρώς μεγαλύτερες από 107° , ενώ η γωνία $\hat{\Theta}\hat{K}\hat{I}$ είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από 109° , κάτι που είναι δύσκολο να εντοπιστεί σε ένα σχήμα που γίνεται με το χέρι.

Παρατηρώντας το σχήμα 3 βλέπουμε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο και το τετράπλευρο $AB\Delta Z$ είναι ρόμβος από κατασκευή, οπότε $\hat{A}\hat{Z}\Delta = 60^\circ$ και $BZ = AB\sqrt{3}$ (το διπλάσιο του ύψους ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς AB). Το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{E}\hat{Z}\Delta = 45^\circ$, οπότε $\hat{B}\hat{Z}\Theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $BZ\Theta$ θα έχουμε: $\frac{BZ}{\eta\mu\hat{B}\hat{\Theta}Z} = \frac{B\Theta}{\eta\mu\hat{B}\hat{Z}\Theta}$, δηλαδή

$$\frac{AB\sqrt{3}}{\eta\mu\hat{B}\hat{\Theta}Z} = \frac{AB}{\eta\mu 15^\circ} \text{ ή } \eta\mu\hat{B}\hat{\Theta}Z = \sqrt{3}\eta\mu 15^\circ, \text{ οπότε } \hat{B}\hat{\Theta}Z \approx 26,63387984^\circ.$$

Στο τρίγωνο $BZ\Theta$ θα έχουμε

$$\hat{Z}\hat{B}\hat{\Theta} = 180^\circ - \hat{B}\hat{Z}\hat{\Theta} - \hat{B}\hat{\Theta}Z = 180^\circ - 15^\circ - 26,63387984^\circ \approx 138,3661202^\circ,$$

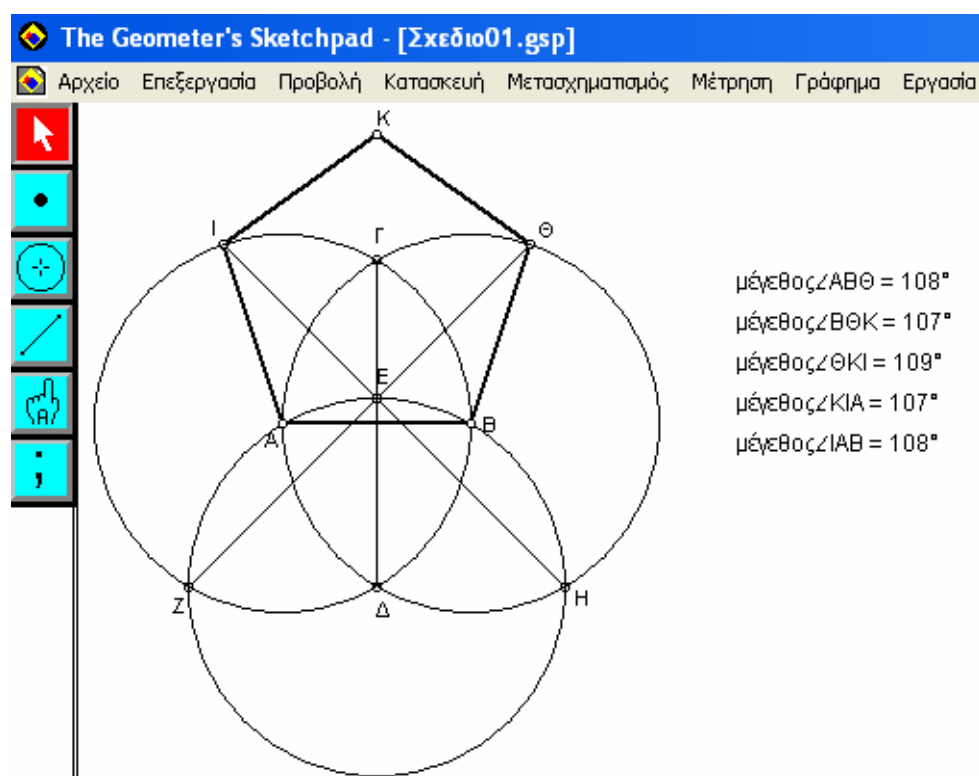
οπότε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Theta} = \hat{Z}\hat{B}\hat{\Theta} - \hat{Z}\hat{B}\hat{A} \approx 138,3661202^\circ - 30^\circ \approx 108,3661202^\circ$ ή $108^\circ 21' 58''$.

Διδακτική αξιοποίηση

Αυτό που δίνει ιδιαίτερη αξία στην παραπάνω προσεγγιστική κατασκευή από διδακτική άποψη είναι το γεγονός ότι είναι σχετικά απλή, γρήγορη και δίνει πολύ καλή προσέγγιση, έτσι που με το μάτι δεν διακρίνει κανείς ότι το πεντάγωνο δεν έχει όλες τις γωνίες των κορυφών του ίσες. Το πεντάγωνο, δηλαδή, φαίνεται κανονικό μολονότι στην πραγματικότητα δεν είναι. Γι' αυτό ακριβώς μπορεί να αποτελέσει ένα πρώτης τάξεως παράδειγμα προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στα μαθηματικά δεν είναι φρόνιμο να βασιζόμαστε μόνο στις αισθήσεις μας προκειμένου να αποφανθούμε εάν μια πρόταση είναι αληθής ή όχι αλλά απαιτείται η απόδειξη, η οποία θα επιβεβαιώσει πέρα κάθε αμφισβήτησης την ορθότητα ενός συμπεράσματος. Η προσεγγιστική κατασκευή του Ντύρερ είναι ένα παράδειγμα μέσω του οποίου καταδεικνύεται η αξία, η χρησιμότητα και η ανάγκη της μαθηματικής απόδειξης.

Σε ένα πρώτο επίπεδο η προσεγγιστική αυτή κατασκευή μπορεί να προταθεί από το διδάσκοντα ως θέμα δραστηριότητας μετά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας κατασκευής του κανονικού πενταγώνου με κανόνα και διαβήτη. Οι μαθητές μπορεί να εργαστούν πρώτα με τα γεωμετρικά τους όργανα και αφού διαπιστώσουν ότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση από την ακριβή κατασκευή, να αναζητήσουν μια αυστηρή απόδειξη, η οποία θα βεβαιώνει ότι η κατασκευή δεν οδηγεί πραγματικά σε κανονικό πεντάγωνο.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε ο διδάσκων να κατασκευάσει στο Sketchpad [11] ένα αρχείο με την κατασκευή του Ντύρερ και να το παρουσιάσει στους μαθητές μετά την εργασία με τα γεωμετρικά όργανα. Οι μαθητές έτσι θα είχαν τη δυνατότητα να πειραματιστούν και να διερευνήσουν την ακρίβεια της κατασκευής, αξιοποιώντας τη δυνατότητα του λογισμικού να μετράει γωνίες (σχήμα 4).

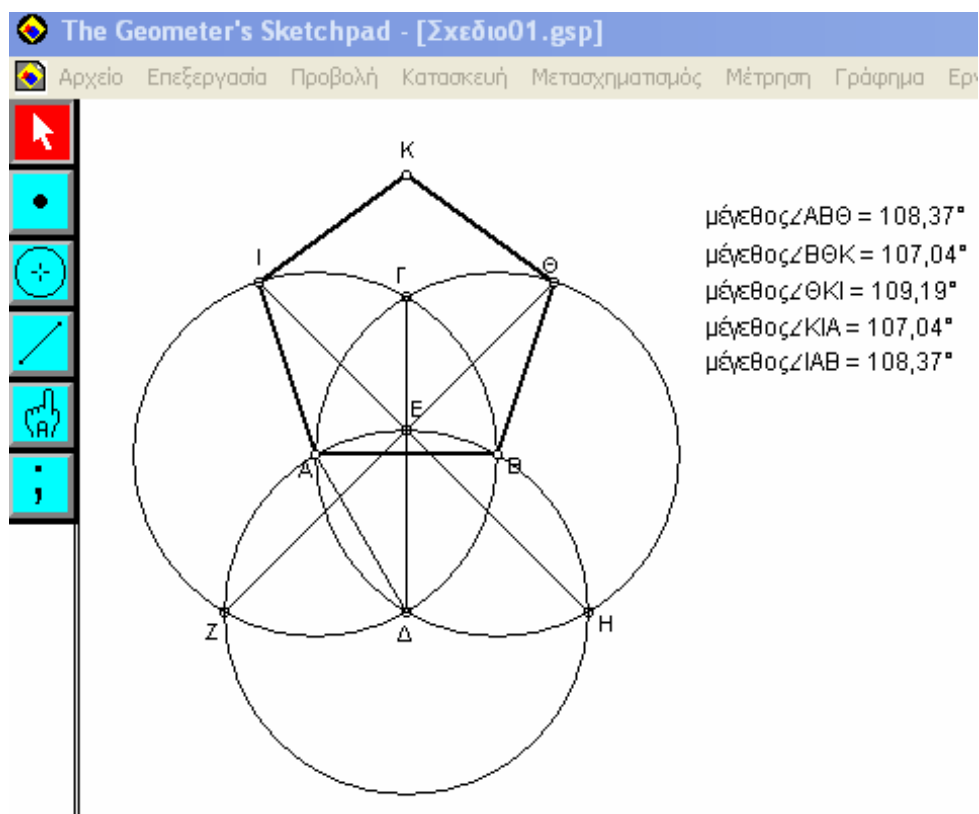


Σχήμα 4

Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν ότι το μέτρο των γωνιών των κορυφών δεν είναι ακριβώς 108° , οπότε δεν πρόκειται για κανονικό πεντάγωνο, αλλά για ένα «παραλίγο» κανονικό πεντάγωνο. Εδώ, βέβαια, είναι δυνατόν να προκληθεί μια ενδιαφέρουσα συζήτηση στην τάξη σχετικά με τα σφάλματα στρογγυλοποίησης του λογισμικού. Ως γνωστόν, το Sketchpad, καθώς επίσης και όλα τα παρεμφερή λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, στρογγυλοποιεί τα μέτρα των γωνιών στον πλησιέ-

στερο ακέραιο. Αυτό δημιουργεί κάποιο πρόβλημα, αφού το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, έτσι όπως το υπολογίζει το λογισμικό, είναι 539° και όχι 540° .

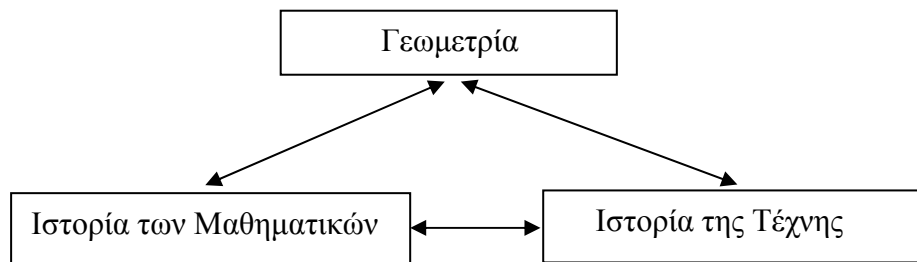
Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί εύκολα εάν το λογισμικό ρυθμιστεί έτσι ώστε τα μέτρα των γωνιών να υπολογίζονται με ακρίβεια δύο ή τριών δεκαδικών ψηφίων. Στο σχήμα 5 φαίνονται οι μετρήσεις των γωνιών του πενταγώνου του Ντύρερ από το Sketchpad με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων. Εδώ το άθροισμα των γωνιών βγαίνει $540,01^\circ$ και γίνεται πλέον κατανοητό ότι όσο η ακρίβεια μέτρησης γίνεται μεγαλύτερη (περισσότερα δεκαδικά ψηφία) τόσο το σφάλμα μικραίνει και το άθροισμα των γωνιών προσεγγίζει τις 540° .



Σχήμα 5

Στη συνέχεια η παρακίνηση για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού θα προέκυπτε τώρα , όχι από την ανάγκη επιβεβαίωσης, αφού την εργασία αυτή την έχει αναλάβει το λογισμικό πέραν κάθε αμφιβολίας, αλλά από καθαρή περιέργεια να διερευνήσουμε παραπέρα για πιο λόγο συνέβη αυτό και έτσι να κατανοήσουμε καλύτερα το όλο θέμα [12].

Σε ένα δεύτερο επίπεδο, το παραπάνω θέμα θα μπορούσε να αποτελέσει το αντικείμενο ενός project ή συνθετικής δημιουργικής εργασίας με διαθεματικό περιεχόμενο. Οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν και να συνθέσουν γνώσεις από διάφορους θεματικούς άξονες, όπως δείχνει το σχήμα 6.



Σχήμα 6

Η εργασία αυτή θα μπορούσε να βασιστεί σε κάποια ερωτήματα όπως τα παρακάτω:

Ερωτήματα προς διερεύνηση από τη Γεωμετρία:

- Τι ονομάζουμε κανονικό πεντάγωνο και ποιες είναι οι ιδιότητές του;
- Η κατασκευή του Ντύρερ μας δίνει κανονικό πεντάγωνο;
- Γιατί το πεντάγωνο δεν είναι κανονικό;
- Πώς μπορεί να αποδειχθεί ότι το πεντάγωνο δεν είναι κανονικό;

Ερωτήματα προς διερεύνηση από την ιστορία των Μαθηματικών:

- Ποια είναι η σχέση μεταξύ Γεωμετρίας και Τέχνης γενικότερα;
- Ποια είναι ειδικότερα η σχέση μεταξύ Γεωμετρίας και Ζωγραφικής;
- Ποιοι μεγάλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τις εφαρμογές των μαθηματικών στην τέχνη;
- Ποιοι μεγάλοι καλλιτέχνες χρησιμοποίησαν μαθηματικούς νόμους και αντικείμενα στην τέχνη τους;

Ερωτήματα προς διερεύνηση από την ιστορία της Τέχνης:

- Πώς η ανάγκη για εικαστικές δημιουργίες επηρέασε την εξέλιξη της Γεωμετρίας;
- Ποιες ήταν οι μαθηματικές τεχνοτροπίες στη ζωγραφική;
- Ποιοι μεγάλοι ζωγράφοι έδωσαν ώθηση στην εξέλιξη της Γεωμετρίας;

Επέκταση

Για παραπέρα εξερεύνηση, αναζήτηση και προβληματισμό μπορούν να δοθούν από το διδάσκοντα τα παρακάτω δύο θέματα:

α) Να μελετηθεί η προσεγγιστική κατασκευή που πρότεινε ο Λεονάρντο ντα Βίντσι για το κανονικό πεντάγωνο και να γίνουν συγκρίσεις με την κατασκευή του Ντύρερ.

Η κατασκευή αυτή βασίζεται στα παρακάτω βήματα (σχήμα 7):

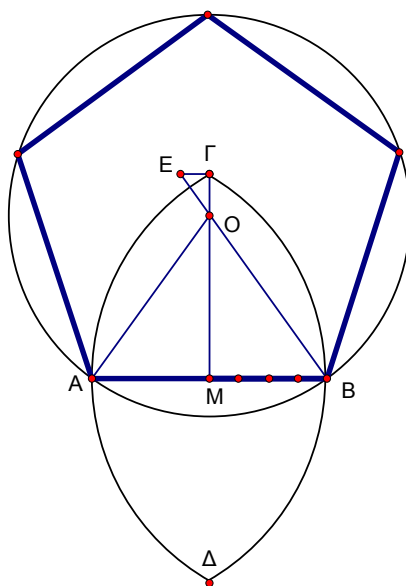
1. Έστω AB η πλευρά του κανονικού πενταγώνου με $AB = a$.
2. Κατασκευάζουμε κύκλους ακτίνας a με κέντρα τα A και B , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Γ και Δ πάνω στη μεσοκάθετο του AB .
3. Διαιρούμε το AB σε οκτώ ίσα μέρη.
4. Φέρνουμε την $GE \parallel AB$ με $GE = a/8$.
5. Οι BE και GM τέμνονται στο O , που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο ζητούμενο κανονικό πεντάγωνο.
6. Κατασκευάζουμε τέσσερις επιπλέον επίκεντρες γωνίες ίσες με την $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και σχηματίζονται οι κορυφές του κανονικού πενταγώνου.

Εδώ παρατηρούμε ότι αφού τα τρίγωνα MBO και GEO είναι όμοια θα ισχύει ότι $\frac{MO}{OG} = \frac{BM}{GE} = \frac{4}{1}$ και αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευ-

ράς a , το ύψος του $\Gamma M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Επίσης θα έχουμε ότι $\frac{MO}{MO + OG} = \frac{4}{5}$ ή

$$\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{4}{5} \text{ ή } MO = \frac{4}{5} M\Gamma = \frac{4}{5} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}. \text{ Ισχύει ακόμη ότι}$$

$\hat{M}\hat{O}\hat{B} = 35,817525^{\circ}$, ενώ ως γνωστόν, το μισό της κεντρικής γωνίας του κανονικού πενταγώνου είναι 36° .

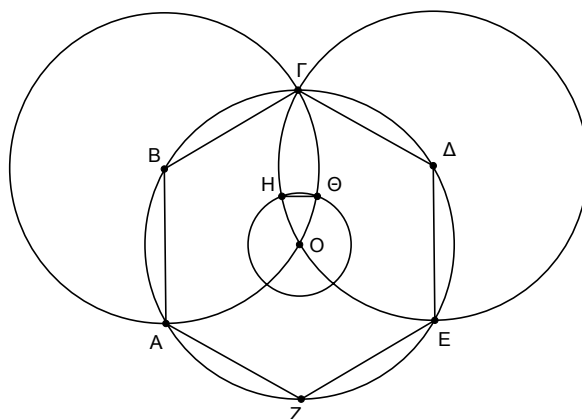


Σχήμα 7

Η κατασκευή αυτή περιέχει τα εξής βήματα (σχήμα 8):

1. Κατασκευάζουμε έναν κύκλο κέντρου O και το εγγεγραμμένο σ' αυτόν κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$.
2. Με κέντρα τα B και Δ και ακτίνα $BO = O\Delta$ κατασκευάζουμε δύο κύκλους που διέρχονται από το Γ .
3. Με κέντρο O και ακτίνα το $1/3$ της ακτίνας του αρχικού κύκλου, κατασκευάζουμε έναν κύκλο, ο οποίος τέμνει τους κύκλους με κέντρα B και Δ στα σημεία H και Θ αντίστοιχα.

4. Η $H\Theta$ είναι η πλευρά του ζητούμενου κανονικού εννεαγώνου.



Σχήμα 8

Μεγάλο ενδιαφέρον από διδακτική άποψη θα είχε να διερευνηθεί ο τρόπος που επινοήθηκαν οι παραπάνω προσεγγιστικές κατασκευές των Ντύρερ και Λεονάρντο ντα Βίντσι. Προφανώς αυτές δεν εμφανίστηκαν από το πουθενά ως προϊόν θείας επιφοίτησης, αλλά στηρίχθηκαν σε κάποια ευρετική διαδικασία, η οποία αξιοποιεί τη δύναμη της ανάλυσης που προηγείται μιας γεωμετρικής κατασκευής (π.χ. στο [5], υπάρχουν υποθετικές ανακατασκευές). Ο τρόπος αυτός επινόησης μπορεί να προκαλέσει στην τάξη μια πολύ ενδιαφέρουσα συζήτηση, όχι μόνο για το ζήτημα της απόδειξης, αλλά για το πλήρες σχήμα «ανάλυση-σύνθεση-απόδειξη-διερεύνηση» που συνιστά την πεμπτουσία μιας αυστηρής γεωμετρικής κατασκευής. Αλλά το ζήτημα αυτό είναι δυνατόν να αποτελέσει το θέμα μιας ξεχωριστής εργασίας με πλούσιες διδακτικές προεκτάσεις.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] **Φίλη, Χ.:** *Γεωμετρία και τέχνη: Δυο παράλληλες αναζητήσεις*, Πρακτικά του 17^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., 2000.
- [2] **Pumfrey, E. & Beardon, T.:** *Art and mathematics-mutual enrichment*, Micromath, 18(2), 2000, pp.21-26.

- [3] **Τουμάσης, Μπ. & Αρβανίτης, Τ.:** *Μαθηματικά και τέχνη: Διακοσμητικά σχήματα με χρήση γεωμετρικού λογισμικού*, Πρακτικά του 17^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., 2002.
- [4] **Τουμάσης, Μπ. & Αρβανίτης, Τ.:** *Αξιοποίηση του Sketchpad για τη δημιουργία και εξερεύνηση του κόσμου των φράκταλ*, Πρακτικά του 23^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., 2006.
- [5] **Coolidge, J.L.:** *The mathematics of great amateurs*, Oxford University Press, 1950.
- [6] **Βικιπαίδεια.:** *Άλμπρεχτ Ντύρερ*, http://el.wikipedia.org/wiki/Άλμπρεχτ_Ντύρερ
- [7] **Federico, P.J.:** *The Melancholy Octahedron*, Mathematics Magazine, 30-36, 1972.
- [8] **Rivera, C.:** *Melancholia*, www.primepuzzles.net/melancholia.htm
- [9] **Walton, K. D.:** *Albrecht Durer's Renaissance connections between Mathematics and Art*, Mathematics Teacher, 87(1994), 278-282.
- [10] **Pedoe, D.:** *Geometry and the liberal arts*, Penguin, London, 1976.
- [11] **The Geometer's Sketchpad**, Key Curriculum Press, Berkeley, 1995 (Ελληνική έκδοση: Καστανιώτης, Αθήνα, 2000).
- [12] **Τουμάσης, Μπάμπης :** *Έχει κάποια αξία το μαθηματικό λογισμικό για την κατασκευή μιας απόδειξης;*, Πρακτικά του 21^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε., 2004, 251-259.

ABSTRACT

Perhaps the most important artist Germany has contributed to Western culture is Albrecht Durer. In the present paper we present a forgotten Durer work which consists of an approximate construction for regular pentagon with a compass which is still the quickest method known for practical drawing. Next we offer some ideas and suggestions in order to incorporate the above construction in the teaching process.