

NAVIGATIONAL ALGORITHMS

La Derrota

© Andrés Ruiz
San Sebastián - Donostia
43° 19' N, 002° W
<http://www.geocities.com/andresruizgonzalez>

NAVIGATIONAL ALGORITHMS

La Derrota

© Andrés Ruiz
San Sebastián - Donostia
43° 19' N, 002° W
<http://www.geocities.com/andresruizgonzalez>

NAVIGATIONAL ALGORITHMS

La Derrota

© Andrés Ruiz
San Sebastián - Donostia
43° 19'N 002°W
<http://www.geocities.com/andresruizgonzalez>

NAVIGATIONAL ALGORITHMS

La Derrota

© Andrés Ruiz
San Sebastián - Donostia
43° 19'N 002°W
<http://www.geocities.com/andresruizgonzalez>

NAVIGATIONAL ALGORITHMS

La Derrota

© Andrés Ruiz
San Sebastián - Donostia
43° 19'N 002°W
<http://www.geocities.com/andresruizgonzalez>

NAVIGATIONAL ALGORITHMS

La Derrota

© Andrés Ruiz
San Sebastián - Donostia
43° 19'N 002°W
<http://www.geocities.com/andresruizgonzalez>

Índice

La derrota	3
Variables	3
Latitud Media.....	3
Variables	3
Posición de Llegada	4
Rumbo y Distancia entre dos puntos	4
Ejemplo	4
Derrota Loxodrómica.....	4
Partes Meridionales o Latitud aumentada	5
Casos singulares.....	5
Posición.....	6
Rumbo y Distancia	6
Derrota Ortodrómica.....	6
Variables	6
Rumbo inicial y Distancia entre dos puntos.....	7
$(B1, L1, D, Ri) \Rightarrow (B2, L2)$	7
Ecuación de la latitud para la longitud media	8
Ejemplo	8
Derrota Mixta.....	8
Ortodrómica vectorial.....	8
Ecuación Vectorial	8
Distancia y Rumbo inicial	8
Vértices	8
Cruce con el ecuador: nodos	8
A1. Algoritmos	9
A2. Ejemplos	9
A3. Software	10
A4. Código fuente	10
A5. Bibliografía	10

Resumen

¿Cómo navegamos desde nuestra posición actual hasta el punto de destino?, ¿A que rumbo debemos pilotar, y cual es la distancia que nos separa de nuestra llegada? Este documento responde a estas preguntas y hace un repaso de las diversas técnicas analíticas para resolver los correspondientes problemas.

Se aborda la derrota loxodrómica, su forma simplificada de cálculo basada en la latitud media, y la derrota ortodrómica y mixta. La ortodrómica se resuelve empleando la trigonometría esférica y el análisis vectorial.

Por ultimo se añaden unos ejemplos ilustrativos, y se adjuntan unas tablas de latitudes aumentadas, de ayuda en la resolución de los problemas asociados a la loxodrómica.

© Andrés Ruiz

1999 - 2007

San Sebastián – Donostia

43° 19'N 002°W

<http://www.geocities.com/andresruizgonzalez>

La derrota

En navegación, al trasladarnos de un lugar a otro se puede hacer a rumbo constante, (derrota loxodrómica), o siguiendo lo más fielmente posible un círculo máximo, que marca la distancia más corta entre dos puntos de la esfera terrestre, (derrota ortodrómica).

Generalmente se distinguen dos tipos de problemas:

1. *Directo*: consistente en hallar la situación de llegada, a partir de una de salida, cuando se navega una distancia a un rumbo dado.
2. *Inverso*: calcula el rumbo y la distancia entre una posición de salida y otra de llegada.

Estos problemas se resuelven usando diversas técnicas y aproximaciones. Existen métodos gráficos sobre la carta náutica, y analíticos que no necesitan a priori de ella. La Tierra se puede considerar como una esfera, como un elipsoide de revolución, o como un geoide, (superficie equipotencial en el campo de la gravedad terrestre).

Asumiendo un modelo esférico de La Tierra, el error cometido para grandes distancias, (varios miles de millas), es de unas pocas millas, que generalmente es muy inferior al error debido a la deriva, a los errores de gobierno y al abatimiento.

Para distancias no muy grandes se puede utilizar sin cometer errores considerables, y despreciando los incrementos de distancia, el método más simple, que utiliza un modelo esférico de La Tierra y considera la diferencia en longitud entre dos puntos, proporcional a la latitud media.

Variables

Las variables generales usadas en los cálculos de derrotas son las siguientes:

B1	Latitud del punto de partida
L1	Longitud del punto de partida
B2	Latitud del punto de destino
L2	Longitud del punto de destino
d	Distancia entre 1 y 2
R	Rumbo
ΔB	Diferencia de latitud
ΔL	Diferencia de longitud

Se consideran la latitud Norte y la longitud Este, como positivas.

	Intervalos
B	$-90^\circ \text{ (S)} \leq B \leq +90^\circ \text{ (N)}$
L	$-180^\circ \text{ (W)} \leq L \leq +180^\circ \text{ (E)}$
R	$0^\circ \leq R \leq 360^\circ$
d	$d > 0$

Latitud Media

Variables

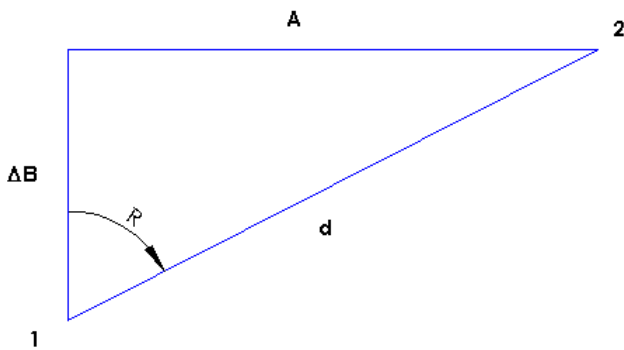
A	Apartamiento
B_m	Latitud media

Este método es una aproximación a la derrota loxodrómica, que simplifica los cálculos, consiguiendo un error aceptable en navegación dentro de unos **Límites de aplicación**:

- $B_m < 60^\circ$
- $d < 200 \text{ nm}$
- $\Delta B < 5^\circ$

Se utiliza sobre todo cuando se navega por estima, en donde si se obtiene una situación verdadera que corrija la estimada, dentro de un intervalo de tiempo aceptable, el error obtenido en esta simplificación es totalmente despreciable.

Se basa en la resolución del triángulo plano de la figura, y en la relación entre el apartamiento y la diferencia de longitud:



Relación entre el apartamiento y la diferencia de latitud.

- $\Delta B = d \cos R$
- $A = d \sin R$
- $\Delta L = A / \cos B_m$
- $B_m = (B_1 + B_2) / 2$

Posición de Llegada

$$\Delta B = d \cos R$$

$$A = d \sin R$$

$$\Delta L = A / \cos B_m$$

$$B_2 = B_1 + d \cos R$$

$$L_2 = L_1 + d \sin R / \cos B_m$$

Rumbo y Distancia entre dos puntos

$$\Delta B = B_2 - B_1$$

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$A = \Delta L \cos B_m$$

$$d = \sqrt{\Delta B^2 + A^2}$$

$$R = \arctan(A / \Delta B)$$

$$d = d / 60 \text{ [nm]}$$

$$\text{if}(R < 0) \ R = R + 360^\circ$$

Ejemplo

$$(B_1, L_1) = (43^\circ 40.5'N \ 02^\circ 00.00'W)$$

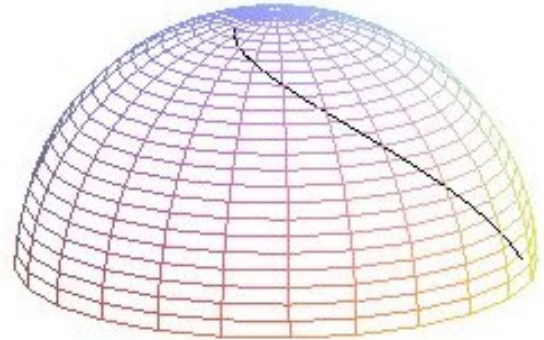
$$(B_2, L_2) = (45^\circ 36.2'N \ 03^\circ 15.5'W)$$

$$d = 127.56 \text{ millas náuticas}$$

$$R = 335.09^\circ$$

Derrota Loxodrómica

Cuando se navega a rumbo constante R , se sigue una loxodrómica sobre la superficie del mar. Esta línea corta a todos los meridianos bajo el mismo ángulo R .



Loxodrómica sobre la esfera terrestre.

En la *carta mercatoriana*, la derrota loxodrómica se traza como una recta.



Loxodrómica sobre la carta mercatoriana.

Resuelve analíticamente los problemas de derrota trazados en una carta náutica mercatoriana. Utiliza la diferencia de partes meridionales, $m = \Delta M$, para el cálculo de la diferencia de longitud, ΔL , en función del rumbo, R :

$$\tan R = \Delta L / m$$

Según esto la ecuación de la Loxodrómica queda:

$$L_2 = L_1 + m \tan R$$

La distancia navegada se obtiene en función de la diferencia de latitud, ΔB , y del rumbo:

$$d = \Delta B / \cos R$$

Partes Meridionales o Latitud aumentada

Para calcular la latitud aumentada correspondiente a una latitud, es necesario integrar la distancia del ecuador al paralelo de dicha latitud, a lo largo del meridiano.

En un elipsoide de eje mayor a , eje menor b y de excentricidad e , se tiene:

$$L_2 = L_1 + \tan R \int_{B_1}^{B_2} \frac{1 - e^2}{\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)} \cdot dB$$

$$M(B) = a \int_0^B \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \cdot dB$$

Integral que se puede aproximar por un desarrollo en serie, en donde la precisión obtenida depende del grado de la expansión:

$$M = a \log_e 10 \log \tan \left(45 + \frac{L}{2} \right) - a \left(e^2 \sin L + \frac{e^4}{3} \sin^3 L + \right.$$

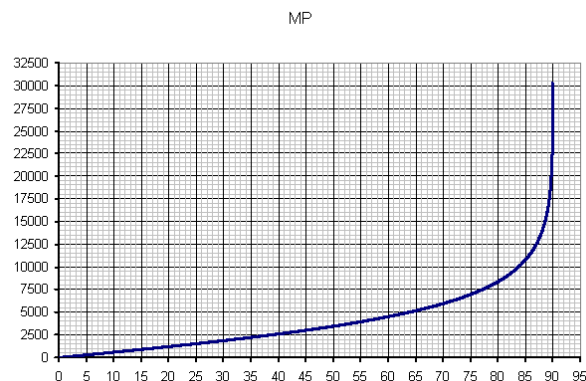
$$\left. \frac{e^6}{5} \sin^5 L + \dots \right),$$

Y de forma exacta:

$$M(B) = a \cdot \ln \left(\tan(45 + B/2) \left(\frac{1 - e \cdot \sin B}{1 + e \cdot \sin B} \right)^{e/2} \right)$$

Tomando como modelo de La Tierra el elipsoide **WGS84**, (World Geodetic System), el algoritmo de cálculo es el que sigue:

```
a = 6378137/1852
f = 1.0/298.257223563
e = sqrt(2*f-SQ(f))
M1 = log(10)*log10(tan( 45+B/2) )
M2 = SQ( eoe )*sin( B )
M3 = pow( eoe, 4 )/3*pow( sin( B ), 3)
M4 = pow( eoe, 6 )/5*pow( sin( B ), 5)
M = a*(M1-M2-M3-M4)
```



Curva de M frente a la latitud

Si se toma un **modelo esférico** de La Tierra, los dos ejes son iguales:

Ejes: $a = b = R_T = 360 \cdot 60 / (2\pi)$ [millas náuticas]

Achatamiento: $f = 1 - b/a = 0$

excentricidad: $e = 0$

Con estas simplificaciones la integral tiene solución exacta.

$$M = a \int_0^B \sec B \cdot dB$$

$$M = 21600 / (2\pi) \cdot \ln(\tan(45 + B/2))$$

Expresiones equivalentes utilizando las funciones hiperbólicas son:

$$M = 21600 / (2\pi) \cdot \operatorname{arctanh}(\sin B)$$

$$M = 21600 / (2\pi) \cdot \operatorname{arcsinh}(\tan B)$$

Casos singulares

Si se navega siguiendo un paralelo o un meridiano el rumbo toma un valor en el cual las funciones trigonométricas se anulan o se hacen infinitas, y las diferencias de latitud o de longitud toman valores singulares:

	R [°]	sin R	cos R	tan R	ΔB	ΔL
N	0	0	1	0	d	0
E	90	1	0	∞	0	d/cos B
S	180	0	-1	0	-d	0
W	270	-1	0	∞	0	-d/cos B

Posición

Datos necesarios:

- Posición de salida
- Rumbo
- Distancia navegada.

Latitud de Llegada:

$$\Delta B = d/60 * \cos(R)$$

$$B2 = B1 + \Delta B$$

Longitud de Llegada:

```
if( R == 90 || R == 270 )
    ΔL = d/60 * sin R/cos B
else {
    m = (M(B2)-M(B1))/60
    ΔL = m * tan R
}
```

$$L2 = L1 + \Delta L$$

Rumbo y Distancia

Datos necesarios:

- Posición de salida
- Posición de llegada

$$\Delta B = B2 - B1$$

$$\Delta L = L2 - L1$$

$$m = (M(B2)-M(B1))/60$$

Rumbo:

```
if( abs( m ) > 0 ) {
    R = atan( ΔL/m )
    if( m >= 0 AND ΔL >= 0 )
        R = R
    else if( m <= 0 AND ΔL >= 0 )
        R = R + 180°
    else if( m <= 0 AND ΔL <= 0 )
        R = R + 180°
    else if( m >= 0 AND ΔL <= 0 )
        R = R + 360°
}
// ΔB = 0
else if( ΔL > 0 )
    R = 90°
else if( ΔL < 0 )
    R = 270°
```

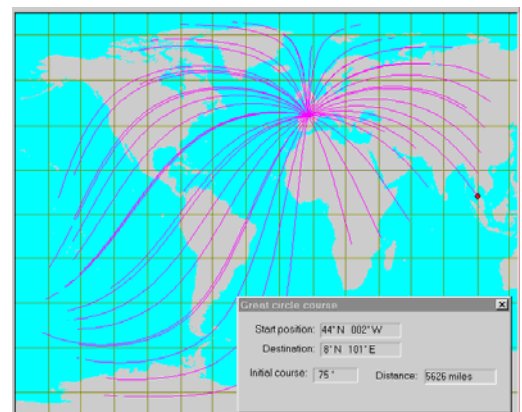
Distancia (millas náuticas):

```
if( R == 90 OR R == 270 )
    // cos R = 0
    d = |ΔL*cos B1|
else
    d = ΔB / cos R
d = d * 60
```

Derrota Ortodrómica

Variables

- D** Distancia Ortodrómica entre 1 y 2
- Ri** Rumbo inicial



Ortodrómicas desde una misma posición a diversos destinos

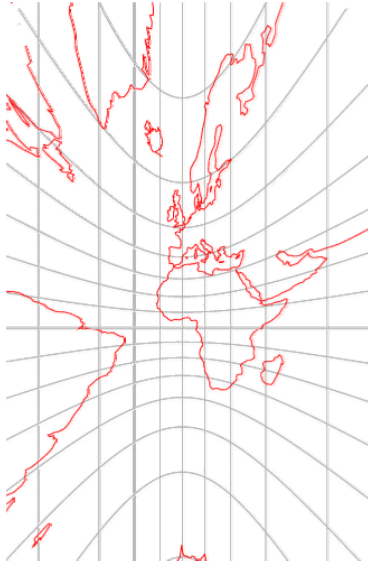
La **derrota Ortodrómica** resuelve el problema del rumbo y la distancia, a lo largo de un círculo máximo entre el punto de partida y el de llegada. Es el camino más corto entre dos puntos de una esfera, por lo que para distancias grandes el ahorro en el tiempo de navegación es importante.

Supone por lo tanto un modelo esférico de La Tierra.

Recibe el nombre de economía o **ganancia** de una derrota entre dos puntos, la diferencia de distancias que resulta de navegar por loxodrómica y por ortodrómica. Esta distancia crece al:

- Crecer la latitud
- Al decrecer la diferencia de latitud entre los dos puntos
- Al crecer la diferencia de longitud

Con este tipo de derrotas se utilizan las cartas náuticas de *proyección gnomónica*, ya que en ellas cualquier recta que se trace, es un arco de círculo máximo. Por lo tanto para trazar una derrota ortodrómica en ella basta con unir con una recta los puntos inicial y final.



Carta gnomónica.

La navegación que sigue una derrota ortodrómica tiene el inconveniente de que el rumbo es cambiante a lo largo de esta. En la práctica se divide la derrota Ortodrómica en tramos entre los cuales se navega por una loxodrómica, en la que el rumbo es constante: **Sistema de navegación por puntos**.

Un **círculo máximo** es generado por la intersección entre la superficie de una esfera y un plano que pase por su centro, (en realidad se trata de una circunferencia). Es el mayor círculo que puede ser trazado en la superficie de una esfera, y el arco que pasa por dos puntos representa la distancia más corta entre estos dentro de la superficie esférica.

Cualquier par de puntos están unidos por un solo círculo máximo, salvo los puntos correspondientes a las antípodas, (diametralmente opuestos; separados 180°), ya que están conectados por un número infinito de círculos máximos, (el rumbo y la distancia entre un punto y su antípoda no están definidos).

Todo círculo máximo bisecciona a otro. A excepción del ecuador, todo círculo máximo tiene una mitad en el hemisferio norte y la otra en el sur.

Todo par de puntos pertenecientes a un círculo máximo y separados 180°, tienen la misma latitud en valor, y de distinto nombre, y están separados 180° en longitud.

El punto de máxima latitud recibe el nombre de **vértice**, para cada círculo máximo hay dos vértices, uno en cada hemisferio y separados 180° en longitud.

Se llaman **nodos** a los dos puntos de cruce del círculo máximo con el Ecuador, en ellos la latitud es $B_0 = 0^\circ$, y la longitud esta separada de los vértices 90°: $L_0 = L_v \pm 90^\circ$

Rumbo inicial y Distancia entre dos puntos

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$-180^\circ \leq \Delta L \leq 180^\circ$$

$$D = \arccos(\sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos \Delta L)$$

$$D = 60 \cdot D_{\text{[millas náuticas]}}$$

$$R_i = \arccos\left(\frac{\sin B_2 - \cos D \sin B_1}{\sin D \cos B_1}\right)$$

$$\text{If } (\Delta L < 0) \quad R_i = 360 - R_i$$

$$(B_1, L_1, D, R_i) \Rightarrow (B_2, L_2)$$

$$cD = 90 - D/60$$

$$B_2 = 90^\circ - \arccos(\sin B_1 \sin cD + \cos B_1 \cos cD \cos R_i)$$

$$\Delta L = \arccos\left(\frac{\sin cD - \cos(90^\circ - B_2) \sin B_1}{\sin(90^\circ - B_2) \cos B_1}\right)$$

$$L_2 = L_1 + \Delta L$$

Ecuación de la latitud para la longitud media

Considerando una derrota ortodrómica desde el punto (B1, L1) al (B2, L2), la latitud Bm en el punto de longitud media Lm es [10]:

$$L_m = (L_1 + L_2) / 2$$

$$\tan B_m = \frac{\tan B_1 + \tan B_2}{2 \cos\left(\frac{L_2 - L_1}{2}\right)}$$

Empleando esta ecuación es posible hallar de forma sencilla las coordenadas de los puntos intermedios de la derrota ortodrómica, dividiendo cada tramo en dos partes iguales y calculando Lm y Bm para cada subtramo de forma recursiva.

Ejemplo

(B1, L1) = (43° 40.5'N 02° 00.0'W)

(B2, L2) = (45° 36.2'N 03° 15.5'W)

D = 127.56 millas náuticas

Ri = 335.09°

Derrota Mixta

Para limitar la latitud máxima en la derrota ortodrómica, y evitar así los hielos o el mal tiempo cerca de los polos, se utiliza una **derrota mixta**.

Se navega por ortodrómica hasta el paralelo de latitud extrema fijado, por loxodrómica a través de este paralelo hasta encontrar de nuevo el círculo máximo y de nuevo por ortodrómica hasta el punto de destino.

Ortodrómica vectorial

En construcción

Ecuación Vectorial

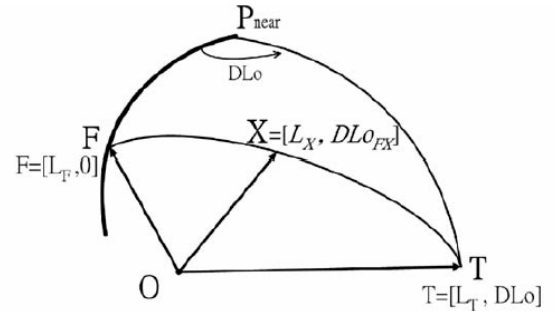


Figure 4. An illustration for three co-planar position vectors on the great circle track.

$$\vec{F} = [\cos L_F, 0, \sin L_F],$$

$$\vec{T} = [\cos L_T \cdot \cos DLo, \cos L_T \cdot \sin DLo, \sin L_T],$$

$$\vec{X} = [\cos L_X \cdot \cos DLo_{FX}, \cos L_X \cdot \sin DLo_{FX}, \sin L_X],$$

$$\vec{X} \bullet (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = 0$$

Distancia y Rumbo inicial

$$D = R_e \arccos[V_1 \cdot V_2].$$

$$\cos \gamma = \left(\frac{(V_1 \times V_p) \cdot (V_1 \times V_2)}{|V_1 \times V_p| \cdot |V_1 \times V_2|} \right)$$

Vértices

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\lambda \sin \theta - \mu \cos \theta}{\sec^2 \phi} = 0$$

$$\theta_v = \arctan\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

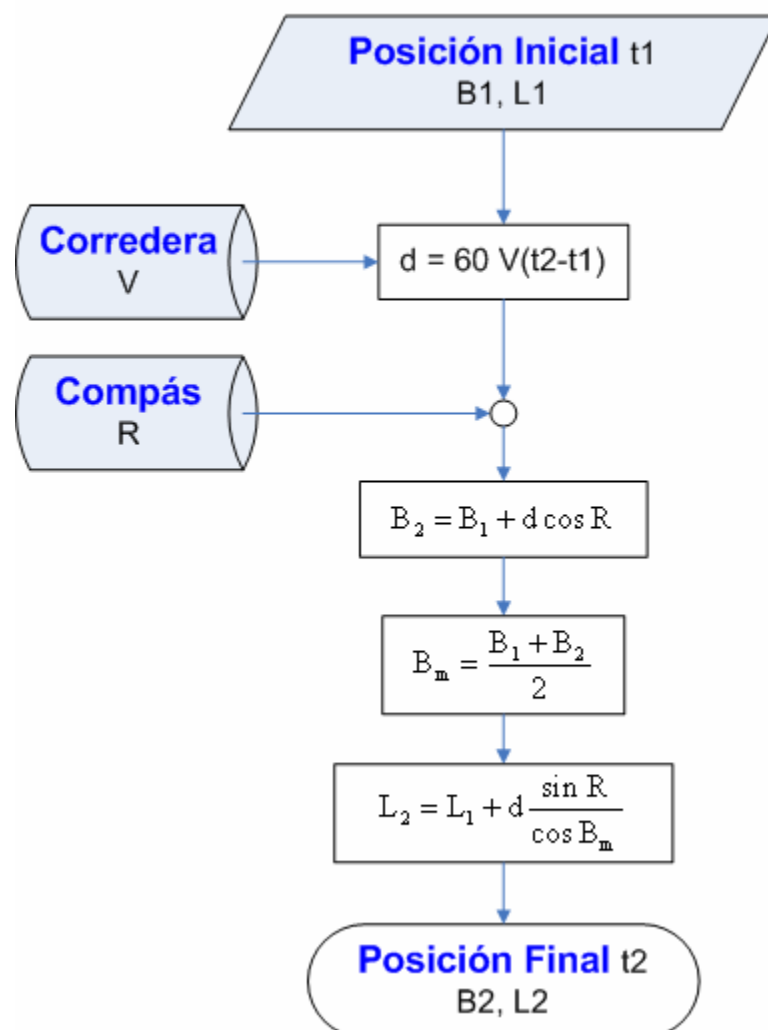
$$\phi_v = \pm \arctan \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

Cruce con el ecuador: nodos

$$\theta_o = \theta_v \pm \pi/2.$$

A1. Algoritmos

Navegación de Estima



A2. Ejemplos

Comparación entre los distintos tipos de derrotas:

Ejemplo 1 pg 368 Bowditch

B1 = 32.245 °

L1 = -66.4817 °

B2 = 36.9783 °

L2 = -75.7033 °

	R	d
Latitud Media	301.9501	536.6754
Loxodrómica	301.8474	538.2231
Ortodrómica	304.5122	536.2734

Ejemplo 2 pg 368 Bowditch

B1 = 75.5283 °

L1 = -79.145 °

R = 155 °

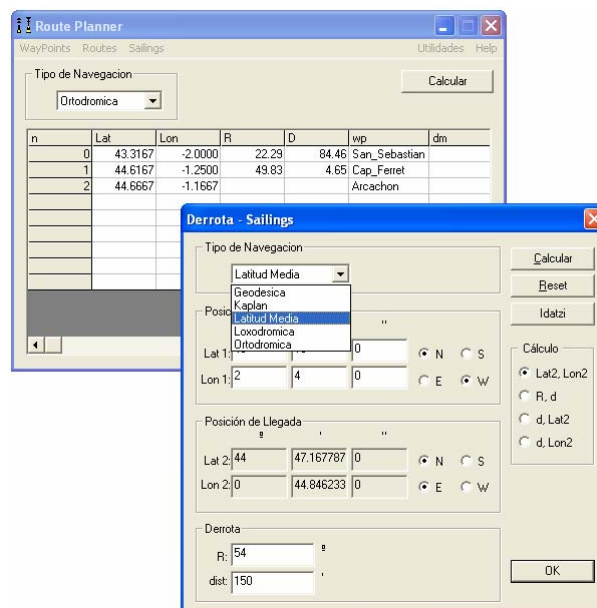
d = 263.5 mn

	B2	L2
Latitud Media	71.5481	-72.5954
Loxodrómica	71.5481	-72.5672
Ortodrómica	71.457	-73.3044

A3. Software

RoutePlanner

Se puede descargar desde la página web del autor.



A4. Código fuente

A5. Bibliografía

1. [Manual de Navegación](#). Martínez Jiménez, Enrique, 1978. ISBN: 84-400-5327-4
2. [Navigation and Piloting](#). **Dutton**. 14th ed. ISBN: 0-87021-157-9
3. [The American Practical Navigator](#). **BOWDITCH**, Nathaniel. 1995. Pub. N°9, DMA.
4. [Navegación Costera](#). Pablo Bernardos de la Cruz, Francisco José Correa Ruiz. Paraninfo, 1990. ISBN: 84-283-1759-3
5. [Admiralty Manual of Navigation, Volume 1, BR 45 \(1\), General, Coastal Navigation and Pilotage](#). 1987-2006, TSO London. ISBN: 978-0-11-772880-6
6. A Vector Solution for Navigation on a Great Ellipse. Michael A. Earle. Journal of Navigation, Volume 53, Issue 03, September 2000, pp 473-481
7. A Novel Approach to Great Circle Sailings: The Great Circle Equation. Chih-Li Chen, Tien-Pen Hsu and Jiang-Ren Chang. Journal of Navigation, Volume 57, Issue 02, May 2004, pp 311-320
8. Vector Solutions for Great Circle Navigation. Michael A. Earle. Journal of Navigation, Volume 58, Issue 03, September 2005, pp 451-457
9. The Vector Function for Distance Travelled in Great Circle Navigation. Wei-Kuo Tseng and Hsuan-Shih Lee. Journal of Navigation, Volume 60, Issue 01, January 2007, pp 158-164
10. Building the Latitude Equation of the Mid-longitude. Wei-Kuo Tseng and Hsuan-Shih Lee. Journal of Navigation, Volume 60, Issue 01, January 2007, pp 164-170

Tablas de partes meridionales

Bowditch:

http://www.nga.mil/MSISiteContent/StaticFiles/NAV_PUBS/APN/Tables/T-06-A.pdf

Estas tablas mezclan conceptos del modelo esférico con el elipsoide WGS72, ver:

"A Comment on Navigation Instruction. Michael A. Earle. Journal of Navigation, Volume 58, Issue 02, pp 337-340"

Marine navigation - Navigational Algorithms:

<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Runway/3568/download/mp.txt>