UNIVERSIDAD DISTRITAL FJDC
FAC. TECNOLÓGICA
ESPECIALIZACIÓN EN TELECOMUNICACIONES
MEDIOS DE TRANSMISIÓN
"Características de propagación y coeficientes de circuito distribuido"

Prof. Francisco J. Zamora

1. Naturaleza de los problemas en las líneas de transmisón:

Típicamente el trabajo del ingeniero referente a las líneas de transmisión consiste en establecer las especificaciones de la LT para ajustarse al sistema en conjunto, tales como la impeancia característica Zo, el coeficiente de atenuación permitido, la constante de fase (o la velocidad de fase vp), para cierta frecuencia o conjunto de ellas. Otros aspectos como tensiones de ruptura, corrientes máximas, temperatura de operación y especificaciones mecánicas se consideran demasiado especializadas y por lo general no se estudian en cursos básicos de LTs.

Para la mayoría de casos prácticos en nuestro medio los diseños pueden verse limitados por la disponibilidad y costos de las líneas de transmisión. Es entonces habilidad del ingeniero juzgar las modificaciones que debe aceptar y en cuales partes del sistema que está diseñando es más conveniente aplicarlas. Esta labor, como muchas otras, solo se puede perfeccionar con la práctica y experiencia profesional.

El objetivo de esta parte del curso es comprender las relaciones directas e inversas que existen entre las constantes relativas a la propagación en las LTs, como α, β y Zo, con los parámetros de circuito distribuido asociados a las líneas, tales como R, G, L y C para una frecuencia dada. También se pretende establecer cómo dependen estos parámetros de las especificaciones físicas y geométricas de las LTs.

2. Soluciones calculadas en el plano complejo:

Recuérdese que los parámetros α y β describen completamente la propagación de las ondas de voltaje y corriente en una LT, para determinada frecuencias ω. Además la línea tiene una impedancia característica, cuando no hay reflexiones, Zo = Ro + jXo (y que normalmente a altas frecuencias Xo es mucho menor que Ro para muchas LTs). Si se consulta Trsys2.mcd se encontraran las expresiones que relacionan y definen dichos parámetros, como son:

$$\gamma^2 := (R + j\cdot\omega\cdot L)\cdot(G + j\cdot\omega\cdot C)$$

$$\gamma := \alpha + j\cdot\beta$$

$$\alpha + j\cdot\beta = \sqrt{(R + j\cdot\omega\cdot L)\cdot(G + j\cdot\omega\cdot C)}$$

$$\frac{V1}{I1} := \frac{V}{I} = \frac{R + j\cdot\omega\cdot L}{\alpha + j\cdot\beta} = \frac{R + j\cdot\omega\cdot L}{\sqrt{(R + j\cdot\omega\cdot L)\cdot(G + j\cdot\omega\cdot C)}} = \sqrt{\frac{R + j\cdot\omega\cdot L}{G + j\cdot\omega\cdot C}} = Zo = Ro + j\cdot Xo$$

Es posible definir un conjunto de valores en forma polar para relacionar los anteriores parámetros. Las operaciones que se efectúan son:

$$\alpha := |\gamma| \cdot \cos(\psi) \qquad \beta := |\gamma| \cdot \sin(\psi)$$

donde :

$$|\gamma| := \sqrt{\left(R^2 + \omega^2 \cdot L^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(G^2 + \omega^2 \cdot C^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \psi := \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot C}{G}\right)\right)$$

y

$$Ro := |Zo| \cdot \cos(\theta o) \qquad Xo := |Zo| \cdot \sin(\theta o)$$

donde

$$|Zo| := \sqrt{\frac{\left(R^2 + \omega^2 \cdot L^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(G^2 + \omega^2 \cdot C^2\right)^{\frac{1}{2}}}} \qquad \theta o := \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot C}{G}\right)\right)$$

Las anteriores relaciones permiten calcular las constantes de propagación e impedancia característica a partir de los parámetros de circuito distribuído.

Ejemplo:

Los coeficientes de circuito con elementos distribuídos de un sistema de línea telefónica montada en postes, con conductores de cobre de 0.128" de diámetro y distanciados 12" entre sus centros son:

$$R := 6.74 \frac{ohm}{mi} \qquad G := 0.29 \cdot 10^{-6} \frac{siemens}{mi}$$

$$L := 3.52 \cdot 10^{-3} \frac{henry}{mi} \qquad C := 8.7 \cdot 10^{-9} \frac{farad}{mi}$$

Estos parámetros se midieron a una frecuencia de 1000 Hz. Encontrar la atenuación, velocidad de fase, e impedancia característica de la línea a esa frecuencia.

$$f := 1000 \ Hz \qquad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$mag\gamma := \sqrt{\left(R^2 + \omega^2 \cdot L^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(G^2 + \omega^2 \cdot C^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad mag\gamma = 0.036 \frac{1}{mi} \qquad mag\gamma = 2.209 \cdot 10^{-5} \ m^{-1}$$

$$\psi := \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot C}{G}\right)\right) \qquad \psi = 81.374 \ deg \qquad \psi = 1.42 \ rad$$

Los parámetros de propagación de onda armónica son:

$$\alpha := mag\gamma \cdot \cos(\psi) \qquad \beta := mag\gamma \cdot \sin(\psi) \qquad vp := \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = 5.332 \cdot 10^{-3} \, \frac{1}{mi} \qquad \beta = 0.035 \, \frac{1}{mi} \qquad vp = 1.788 \cdot 10^{5} \, \frac{mi}{s}$$

Luego los parámetros de impedancia serán:

$$magZo := \sqrt{\frac{\left(R^2 + \omega^2 \cdot L^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(G^2 + \omega^2 \cdot C^2\right)^{\frac{1}{2}}}} \qquad \theta o := \frac{1}{2} \cdot \left(atan\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) - atan\left(\frac{\omega \cdot C}{G}\right)\right)$$

$$magZo = 650.355 \, ohm \qquad \theta o = -8.322 \, deg$$

y

$$Ro := magZo \cdot \cos(\theta o) \qquad Xo := magZo \cdot \sin(\theta o)$$

$$Ro = 643.507 \, ohm \qquad Xo = -94.132 \, ohm$$

Obsérvense las siguientes relaciones de fase, que son frecuentes para muchas líneas de transmisión en el rango de audio a RF:

$$atan\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) = 73.052 \, deg \qquad atan\left(\frac{\omega \cdot C}{G}\right) = 89.696 \, deg$$

Obsérvese que las diferencias de las diferentes componentes respecto a 90 grados tienen una relación de magnitud superior a 50 veces. Este hecho merece resaltarse pues es comun para muchas líneas de transmisión en rangos de kHz hasta GHz.

$$\frac{atan\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) - \frac{\pi}{2}}{atan\left(\frac{\omega \cdot C}{G}\right) - \frac{\pi}{2}} = 55.758$$

A manera de ejercicio se sugiere al estudiante:

1. Calcular el efecto de asumir G=0, indicando las variaciones porcentuales de los nuevos valores y concluyendo. También se recomienda observar el comportamiento al variar otros parámetros y la frecuencia.

2. Encontrar la atenuación y velocidad de fase a una frecuencia de 100 MHz, para la línea de transmisión cuyos coeficientes de circuito distribuído son:

$$R := 0.098 \, \frac{ohm}{m} \qquad G := 1.50 \cdot 10^{-6} \, \frac{siemens}{m} \qquad L := 0.32 \cdot 10^{-6} \, \frac{henry}{m} \qquad C := 0.0345 \cdot 10^{-9} \, \frac{farad}{mi}$$

3. Las soluciones en "altas frecuencias":

Las condiciones de frecuencia que producen ángulos de fase cercanos a 90 grados para R+jωL y G+jωC son de interés las componentes reactivas son mucho mayores que las disipativas. Esto obviamente es posible si al aumentar ω los valores de R y G (que no son fijos sino que también aumentan con ω) crecen de manera más lenta que la primera potencia de ω (luego se verá que R es independiente de f para bajas frecuencias y para altas es proporcional a la raíz de f, así como G se acerca asintónicamente a una fracción despreciable de ωC).

Se recomienda al estudiante consultar las aproximaciones que pueden hacerse para encontrar soluciones aproximadas, empleando el teorema del binomio (Chipman, p.54). En este documento no se utilizarán dichas aproximaciones dado que el MathCad no tiene ningún inconveniente en utilizar las expresones generales para cualquier rango de frecuencia. Estas aproximaciones entran a ser importantes en cálculos que deban realizarse con calculadoras de mano.

Cabe mencionar aquí nuevamente un caso especial que se observa de estos resultados, cuando se cumple la expresión (R/2ωL - G/2ωC) tiende a cero. Esta es la condición de Heaviside, de la cual resulta que si R,L,G y C no dependen (significativamente) de la frecuencia, Ro, ω/β, Xo y α se hacen independientes de la frecuencia, obteniendo una línea indistorsionada (a menos para ciertos rangos de frecuencia).

Aunque la condición de Heaviside es interesante, no es realizable para rangos importantes de frecuencia por costos, retardos y dependencia práctica de R,L, G y C de la frecuencia. Pero lo interesante es que si ωL/R y ωC/G son mucho mayores que la unidad, nuevamente Ro, ω/β, Xo y α se hacen independientes de la frecuencia (mientras los parámetros no lo sean significativamente). Las aproximaciones resultantes son conocidas como las aproximaciones de alta frecuencia y son:

$$\alpha_{hf} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{Zo} + G \cdot Zo \right)$$

$$vp_{hf} := \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Zo_{hf} := R_{hf} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Xo_{hf} := 0$$

La frecuencia mínima que se puede considerar como hf depende de los valores relativos de R,L,G y C así como de la exactitud que se desee en los cálculos. Estos valores pueden encontrarse por encima de algunos kHz o cientos de kHz según las líneas y sus aplicaciones. El más sensible de los parámetros es α, el cual de pende de R y G y varía significativamente con f.