

Capítulo 4

Teoria *Fuzzy*

Este capítulo apresenta enfoques sobre a teoria fuzzy, abordando alguns princípios e conceitos, os quais fornecem um suporte teórico para a elaboração do modelo detalhado no próximo capítulo.

A representação da linguagem natural através de modelos computacionais persiste como desafio para os cientistas da área. Dentre várias dificuldades, a existência de termos vagos e imprecisos na linguagem natural impedem que a tradução ocorra sem perda semântica. A questão é: como representar matematicamente afirmações do tipo “João é alto”, “A noite está quente”?

A matemática e a lógica tradicionais já conseguiram mapear satisfatoriamente um incontável número de processos de cálculo e decisão. Porém, muitas experiências humanas necessitam de uma manipulação mais abrangente do que o simples tratamento de falso ou verdadeiro, sim ou não, certo ou errado.

Neste contexto, a teoria *fuzzy* surge como uma alternativa para representar modelos de raciocínio impreciso, que possuem um papel essencial na notável habilidade humana de tomar decisões racionais, em ambientes de incertezas e imprecisões (Zadeh, 1988).

Em sua essência, a teoria *fuzzy* inspira-se no modo como o cérebro humano adquire e processa informação com baixo custo e alta eficiência (Wang, 1997), isto é, a forma de como a mente humana opera com conceitos subjetivos tais como *alto*, *baixo*, *velho* e *novo* (termos lingüísticos), considerando sua inclinação natural em organizar, classificar e agrupar em conjuntos, objetos que compartilham características ou propriedades comuns (Pedrycz, 1998).

Um fator eminente dessa teoria é a sua capacidade de capturar conceitos intuitivos, além de considerar aspectos psicológicos utilizados pelos seres humanos em seu raciocínio usual, evitando que sua representação seja engessada por modelos tradicionais (Oliveira, 1999).

O surgimento dos conjuntos *fuzzy* e da lógica *fuzzy* possibilitou a representação de várias facetas cognitivas humanas (Yager, 1991). Pesquisas recentes apontam para sistemas *fuzzy*, que foram desenvolvidos para diversas áreas do conhecimento, como controladores de operações automáticas, aplicações industriais, reconhecimento de padrões, imagem e áudio, análise quantitativa, processos cooperativos, sistemas para recuperação de informações e, notadamente, sistemas especialistas (Pedrycz, 1998; Teodorescu, 1999).

A próxima seção aborda alguns conceitos fundamentais dos conjuntos fuzzy, os quais darão suporte aos objetivos deste trabalho.

4.1 Conceitos Básicos sobre Conjuntos *Fuzzy*

Há uma tendência natural dos seres humanos em encapsular objetos semelhantes em conjuntos. Na teoria clássica dos conjuntos, um conjunto A pertencente a um universo de discurso X pode ser representado por uma função característica $A(x)$, $x \in X$, isto é:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X \\ 0, & \text{se } x \notin X \end{cases}$$

Percebe-se que esta estrutura é restritiva, ideal para conjuntos com limites bem definidos, pois, para qualquer objeto que pertença ao universo de discurso X , pode-se determinar com exatidão se o mesmo pertence ou não ao conjunto A . O conceito fundamental dos conjuntos *fuzzy* é suavizar esta restrição.

Conforme Zadeh, (1965), um conjunto *fuzzy* é caracterizado por uma função de pertinência, que mapeia os elementos de um domínio, espaço ou universo de discurso X para um número real em $[0,1]$. Formalmente, $\tilde{A}: X \rightarrow [0,1]$. Desta forma, um conjunto *fuzzy* apresenta-se como um conjunto de pares ordenados, em que o primeiro elemento é $x \in X$, e o segundo, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, é o grau de pertinência ou a função de pertinência de x em \tilde{A} , que mapeia x no intervalo $[0,1]$, ou seja, $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$. A pertinência de um elemento a um determinado conjunto passa a ser uma questão de gradação. Nos casos extremos, o grau de pertinência é 0, ocasião em que o elemento não pertence ao conjunto, ou o grau de pertinência é 1, se o elemento pertence 100% ao conjunto (Turksen, 1991; Zimmermann, 1991). Portanto, um conjunto *fuzzy* surge a partir do “alargamento” de um conjunto clássico (nítido), passando a incorporar medidas de incerteza.

A seguir, serão apresentados os conceitos básicos dos conjuntos *fuzzy*, baseados principalmente em (Klir, 1995; Zimmermann, 1991; Fuhrmann, 1990; Klir, 1988; Dubois, 1980; Zadeh, 1965; Pedrycz, 1998).

Função de Pertinência

A função de pertinência é o componente crucial de um conjunto *fuzzy*, e muitas operações são definidas em conformidade com a mesma (Zadeh, 1965). Uma vez identificados objetos ou conjuntos *fuzzy*, a primeira tarefa a cumprir é descobrir a melhor forma de determinar a função de pertinência (Inuiguchi, 2000; Arslan, 2001).

Muitas vezes, a estimação da função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x)$, em situações do mundo real, vem de informações vagas e incompletas (Belchior, 1997), ocorrendo pela subjetividade dos especialistas, dependendo dos exemplos observados (Tanaki, 1998).

Normalmente, uma função de pertinência está na forma $\tilde{A} : X \rightarrow [0,1]$. Assim sendo, qualquer função assim representada pode ser associada a um conjunto *fuzzy*, dependendo dos conceitos e das propriedades que se deseja representar, considerando-se, ainda, o contexto no qual o conjunto está inserido. No entanto, a literatura já dispõe de famílias de funções de pertinência parametrizadas, como por exemplo (Pedrycz, 1998):

- *Funções Triangulares*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m] \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{se } x \in [m, b] \\ 0, & \text{se } x \geq b, \end{cases}$$

- *Funções Γ*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & \text{se } x > a \end{cases}$$

ou

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2}, & \text{se } x > a \end{cases}$$

para $k > 0$.

- *Funções S*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & \text{se } x \in [a, m] \\ 1-2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \text{se } x \in [m, b] \\ 1, & \text{se } x \in b. \end{cases}$$

- *Funções Trapezoidais*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m] \\ 1, & \text{se } x \in [m, n] \\ \frac{b-x}{b-n}, & \text{se } x \in [n, b] \\ 0, & \text{se } x > b \end{cases}$$

- *Funções de Gauss*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-k(x-m)^2}, \text{ para } k > 0.$$

- *Funções Exponenciais*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1+k(x-m)^2}, \text{ para } k > 1, \text{ ou}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{k(x-m)^2}{1+k(x-m)^2}, \text{ para } k > 0.$$

A Figura 4.1 apresenta exemplos de uma (a) função triangular e (b) uma função trapezoidal.

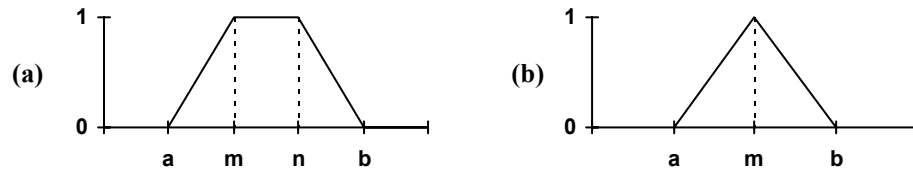


Figura 4.1: Exemplos de funções de pertinência

Exemplo 4.1:

Seja X o conjunto universo das temperaturas de um ambiente, e os subconjuntos *fuzzy* contidos em X , classificados com *quente*, *média* e *fria*, abrangendo todas as possibilidades de subconjuntos *fuzzy* de X , que é simbolizado por $\tilde{A}(x)$, de acordo com a Tabela 4.1.

$$X = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$$

Tabela 4.1: Exemplo de conjuntos *fuzzy*

Temperaturas	Quente	Média	Fria
10	0	0	1
15	0	0,1	0,8
20	0,1	0,8	0,2
25	0,6	0,6	0
30	1	0	0
35	1	0	0
40	1	0	0
45	1	0	0

Representação de um conjunto *fuzzy*

Os conjuntos *fuzzy* constituem uma poderosa ferramenta para modelar situações vagas e imprecisas, quando a análise exata é difícil ou impossível (Chaudhuri, 2001). Destacam-se pela sua grande flexibilidade, a qual permite contornar os aspectos de imperfeição nas informações, onde a semântica é mais importante que a caracterização matemática (Pal, 1999).

Existem diversas formas de representar conjuntos *fuzzy*, seja o universo de discurso finito ou infinito. Para um universo de discurso finito e discreto, (Zadeh, 1988) propôs a seguinte notação:

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1) / x_1 + \dots + \mu_{\tilde{A}}(x_n) / x_n = \tilde{A} = \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(x_i) / x_i$$

Caso o universo de discurso seja contínuo, a expressão é modificada para:

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x) / x$$

Segundo Dubois (1997), o grau de pertinência pode representar:

- *Grau de similaridade*: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ é o grau de proximidade de x a elementos protótipos de \tilde{A} .
- *Grau de preferência*: \tilde{A} representa um conjunto de objetos preferidos e $\mu_{\tilde{A}}(x)$ representa a intensidade de preferência a favor do objeto x ou a praticidade de selecionar x como um valor da variável em questão.
- *Grau de incerteza*: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ é o grau de possibilidade que um parâmetro K tenha um valor x , dado que tudo que se sabe é “ K é \tilde{A} ”.

Exemplo 4.2:

O conjunto *fuzzy* \tilde{A} das temperaturas quentes (Tabela 4.1) pode ser assim representado:

$$\tilde{A} = \{(10;0), (15;0), (20;0), (25;0,6), (30;1), (35;1), (40;1)\}$$

Suporte

O suporte de \tilde{A} , representado por $Supp(\tilde{A})$, é definido como o conjunto nítido que contém todos os elementos do universo X , que pertencem a \tilde{A} com grau de pertinência diferente de zero, ou seja:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Exemplo 4.3:

O suporte do conjunto *fuzzy* \tilde{A} , quente é o conjunto nítido:

$$Supp(\tilde{A}) = \{20, 25, 30, 35, 40, 45\}$$

Singleton

Trata-se de um conjunto *fuzzy* cujo suporte é um único ponto no universo X .

Núcleo

O núcleo de \tilde{A} é um conjunto nítido com todos os elementos do universo X , cujo grau de pertinência a \tilde{A} é 1, ou seja,

$$Núcleo(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Supremo

O supremo de \tilde{A} , denotado por $sup \mu_{\tilde{A}}(x)$, é o maior grau de pertinência obtido nesse conjunto por um de seus elementos. Trata-se, portanto, de sua altura $h(\tilde{A})$. Se $h(\tilde{A}) = 1$, então \tilde{A} é normal. Caso contrário, \tilde{A} é subnormal.

Normalização

O contradomínio de uma função de pertinência não está limitado ao intervalo $[0,1]$. No entanto, isto é considerado como verdade, por uma questão de conveniência. Caso um conjunto *fuzzy* seja não vazio e subnormal, pode-se torná-lo normal através da operação:

$$\mu'_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) / sup \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Conjuntos de corte- α

O conjunto de corte- α é o conjunto nítido dos elementos que pertencem ao conjunto *fuzzy* \tilde{A} , cujos graus de pertinência em \tilde{A} são, no mínimo, iguais ao valor especificado em α . Formalmente,

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

O conjunto de corte- α robusto, \tilde{A}'_α , inclui apenas os elementos de grau de pertinência maiores que α . Assim,

$$\tilde{A}'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

Portanto, o suporte de \tilde{A} corresponde ao conjunto de corte- α robusto de \tilde{A} para $\alpha = 0$. A função de pertinência de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} pode se expressa em termos da função característica de seus cortes α , de acordo com a seguinte equação:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup \min[\alpha, \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x)], \text{ onde } \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{sse } x \in \tilde{A}_\alpha \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 4.4:

Os conjuntos de corte- α possíveis para o conjunto *fuzzy* \tilde{A} , quente são:

$$\tilde{A}_{0,1} = \{20, 25, 30, 35, 40, 45\}$$

$$\tilde{A}_{0,6} = \{25, 30, 35, 40, 45\}$$

$$\tilde{A}_{1,0} = \{30, 35, 40, 45\}$$

Neste caso, o conjunto de corte- α robusto para $\alpha = 0,6$ é $\tilde{A}'_{0,6} = \{30, 35, 40, 45\}$.

O conjunto de todos os níveis $\alpha \in [0,1]$, que representa distintos conjuntos de corte- α de um dado conjunto *fuzzy* \tilde{A} , definido no universo X , é denominado conjunto de nível de \tilde{A} , $\Lambda_{\tilde{A}}$, expresso por:

$$\Lambda_{\tilde{A}} = \{\alpha \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha, \forall x \in X\}$$

Convexidade

A convexidade de um conjunto *fuzzy* é uma generalização do conceito de convexidade de conjuntos nítidos. Para isso, torna-se necessário que os conjuntos de corte- α de um

conjunto *fuzzy* convexo sejam convexas para todo $\alpha \in (0,1]$. Assim, um conjunto *fuzzy* é convexo, se todos os seus conjuntos de corte- α são convexas.

Um conjunto *fuzzy* \tilde{A} é convexo se:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \text{ onde } x_1, x_2 \in X \text{ e } \lambda \in [0,1]$$

De forma semelhante, um conjunto *fuzzy* \tilde{A} é côncavo se:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \text{ onde } x_1, x_2 \in X \text{ e } \lambda \in [0,1]$$

Os operadores máximo (*max*) e mínimo (*min*) estão definidos na próxima seção.

Cardinalidade

A cardinalidade de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} , definido no universo X finito, é o somatório dos graus de pertinência de todos os elementos de X em \tilde{A} , conforme equação abaixo:

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Caso o universo X seja infinito, a cardinalidade, quando existe ($\mu_{\tilde{A}}(x)$ deve ser integrável), é dada por:

$$|\tilde{A}| = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x) dx$$

A cardinalidade relativa de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} pode ser vista como a proporção de elementos de X que estão em \tilde{A} . Portanto, deve-se escolher o mesmo conjunto universo X , caso se deseje comparar conjuntos *fuzzy* através de sua cardinalidade relativa. Define-se como:

$$||\tilde{A}|| = |\tilde{A}| / |X|$$

Exemplo 4.5:

A cardinalidade do conjunto *fuzzy* \tilde{A} , quente, da Tabela 4.1 é:

$$|\tilde{A}| = 0 + 0 + 0,1 + 0,6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4,7$$

A cardinalidade relativa do conjunto *fuzzy* \tilde{A} , quente, da Tabela 4.1 é:

$$\|\tilde{A}\| = 4,7 / 8 = 0,5875$$

Concentração

Esta é uma função que modifica a função de pertinência para que esta passe a apresentar valores relativamente menores. A função de pertinência se torna mais concentrada ao redor dos pontos com graus de pertinência mais elevados, por exemplo:

$$Con\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}^2(x)$$

Dilatação

A dilatação produz um efeito contrário ao da concentração, modificando a função da seguinte forma:

$$Dil\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}^r(x), \text{ onde } r \in (0,1)$$

Intensificação do Contraste

Esta operação atenua os graus de pertinência que estão abaixo de 0,5 e eleva os que estão acima deste valor, provocando o surgimento de um conjunto menos difuso. Para $p > 1$, está definida como:

$$Int \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 2^{p-1} \mu_{\tilde{A}}^p(x), & \text{se } 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 0,5 \\ 1 - 2^{p-1} (1 - \mu_{\tilde{A}}(x))^p, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Fuzificação

A fuzificação acontece quando um conjunto *fuzzy* \tilde{A} é obtido pelo “alargamento” *fuzzy* de um conjunto nítido, isto é, um conjunto nítido é convertido em um conjunto *fuzzy* apropriado, para expressar medidas de incertezas.

Desfuzificação

A “desfuzificação” é um processo de síntese, o qual converte um conjunto *fuzzy* em um valor nítido ou vetor de valores (Oliveira, 1995; Song, 1994; Filev, 1993; Mabuchi, 1993; Yager, 1993).

Este processo é bastante utilizado nos sistemas *fuzzy* de um modo geral, pois seu objetivo é fazer interface com os modelos nítidos do mundo real, associando a cada conjunto *fuzzy* um elemento que o represente.

Porém, quando o próprio sistema fornece resultados lingüísticos com informações claras e precisas, não há necessidade de desfuzificação. Em sistemas especialistas, por exemplo, pode ser melhor obter uma expressão lingüística ao invés de um valor nítido (Dvorak, 1999).

A idéia principal dos métodos de desfuzificação é obter um valor a partir de um conjunto *fuzzy*, de acordo com algumas características especificadas, estando entre os principais, os seguinte métodos (Ma, 2000; Oliveira, 1999):

- **Método do Centro de Gravidade**

Este método produz um valor correspondente à abscissa do baricentro do gráfico da função de pertinência. Para um conjunto discreto, pode ser definido como:

$$x' = \frac{\sum x(i)\mu_i(x_i)}{\sum \mu_i(x_i)}, \text{ onde } x' \text{ é o valor desfuzificado}$$

Para um conjunto *fuzzy* dentro de um universo contínuo X , tem-se que:

$$x' = \frac{\int x\mu_i(x)dx}{\int \mu_i(x)dx}$$

Entre as principais vantagens desse método, podem ser citadas:

- ✓ Continuidade em relação à topologia da função de pertinência;
- ✓ Uniformidade de aplicação a conjuntos discretos e contínuos, e
- ✓ Simplicidade de cálculo.

- **Média dos Máximos**

Primeiramente, são identificados os pontos onde a função de pertinência atinge seu valor máximo. O valor desfuzificado é obtido pela média aritmética (caso discreto) desses pontos ou a este se atribui a abscissa do ponto médio do segmento máximo (caso contínuo).

A desvantagem desse método é a sua potencial descontinuidade em relação à topologia da função de pertinência.

- **Média dos Pontos de Suporte**

Calcula-se a média aritmética das abscissas que possuem pertinência não-nula.

É importante salientar que ao invés de buscar o melhor operador universal para a desfuzificação, é melhor avaliar quais propriedades são importantes para quais sistemas. Critérios próprios de desfuzificação, que não estão diretamente relacionados com conceitos e fundamentos teóricos, podem ser formulados quando houver resultados práticos de maior importância, considerando fatores como eficiência computacional e clareza do operador de desfuzificação (Laekwijck, 1999).

Princípio da Extensão

O princípio da extensão ocupa um papel fundamental na generalização de conceitos da matemática clássica para a teoria *fuzzy* (Zadeh, 1973; Dubois, 1980). Sejam X e Y dois conjuntos, \tilde{A} um conjunto *fuzzy* em X e f um mapeamento de X para Y :

$$f: X \rightarrow Y$$

O princípio da extensão estabelece que a imagem de \tilde{A} sob este mapeamento é um conjunto *fuzzy* $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ em Y , tal que para cada $y \in Y$:

$$\tilde{B}(y) = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x), \text{ onde } x \in X \text{ e } y = f(x), \text{ conforme Figura 4.2 (Pedrycz, 1998).}$$

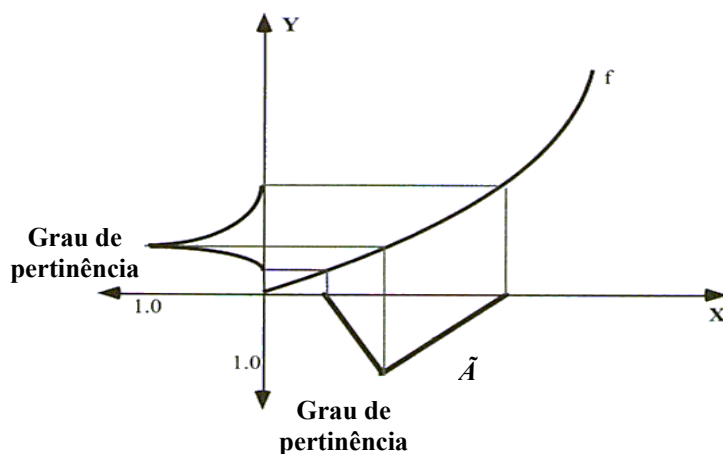


Figura 4.2: Princípio da Extensão (Pedrycz, 1998)

Após a apresentação de seus conceitos básicos, segue na próxima seção uma exposição das operações mais importantes realizadas com conjuntos *fuzzy*.

4.2 Operações com Conjuntos *Fuzzy*

De uma forma geral, as operações com conjuntos são de extrema importância para situações que envolvam processamento de dados e informações (Pedrycz, 1998). As operações clássicas de igualdade, união, interseção e complemento foram estendidas para o domínio dos conjuntos *fuzzy*, apresentando diversas formas de implementação. A seguir, são apresentadas estas extensões, conforme proposto por (Zadeh, 1965).

- **Igualdade de Conjuntos *Fuzzy***

Dois conjuntos *fuzzy* são iguais, se e somente se, $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}'}(x), \forall x \in X$.

Por esta definição, pode-se afirmar que um conjunto *fuzzy* \tilde{A} está contido em um conjunto *fuzzy* \tilde{A}' , se e somente se, $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}'}(x), \forall x \in X$.

- **Complemento *Fuzzy***

O complemento de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} , $c\tilde{A}$, é obtido pela aplicação da seguinte função de pertinência:

$$\mu_{c\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$$

O valor $\mu_{c\tilde{A}}(x)$ pode ser visto não apenas como o grau de pertinência pelo qual x pertence a $c\tilde{A}$, mas também como o grau pelo qual x não pertence ao conjunto *fuzzy* \tilde{A} . Da mesma forma, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ pode ser considerado como o grau pelo qual x não pertence a $c\tilde{A}$. Para um conjunto *fuzzy* \tilde{A} , $c\tilde{A}$ pode ser obtido através da aplicação da função c aos valores $\mu_{\tilde{A}}(x)$:

$$\mu_{c\tilde{A}}(x) = c(\mu_{\tilde{A}}(x)), \forall x \in X$$

- **Interseção *Fuzzy***

A interseção *fuzzy* dos conjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{A}' , definida por $\tilde{A} \cap \tilde{A}'$, provoca o surgimento de outro conjunto *fuzzy*, cuja função de pertinência é formada pelos mínimos das funções de pertinência dos conjuntos \tilde{A} e \tilde{A}' , assim representado:

$$\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \int_x \min [\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}'}(x)] / x$$

A função *min* identifica o maior conjunto *fuzzy* contido em ambos os conjuntos \tilde{A} e \tilde{A}' .

- **União Fuzzy**

A união *fuzzy* dos conjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{A}' , definida por $\tilde{A} \cup \tilde{A}'$, provoca o surgimento de outro conjunto *fuzzy*, cuja função de pertinência é formada pelos máximos das funções de pertinência dos conjuntos \tilde{A} e \tilde{A}' , representando-se desta forma:

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \int_x \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}'}(x)] / x$$

De forma semelhante, a função *max* identifica o menor conjunto *fuzzy* que contenha os conjuntos \tilde{A} e \tilde{A}' .

Em (Bellmann, 1973), a interpretação da interseção como “*e lógico*”, e da união como “*ou lógico*” é fundamentada axiomaticamente. Os operadores *min*, *max* e o de complemento, possuem as seguintes propriedades:

1. Comutatividade: $\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \tilde{A}' \cap \tilde{A}$ e

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \tilde{A}' \cup \tilde{A}$$

2. Associatividade: $\tilde{A} \cap (\tilde{A}' \cap \tilde{A}'') = (\tilde{A} \cap \tilde{A}') \cap \tilde{A}''$ e

$$\tilde{A} \cup (\tilde{A}' \cup \tilde{A}'') = (\tilde{A} \cup \tilde{A}') \cup \tilde{A}''$$

3. Idempotência: $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$ e

$$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$$

4. Distributividade: $\tilde{A} \cap (\tilde{A}' \cup \tilde{A}'') = (\tilde{A} \cap \tilde{A}') \cup (\tilde{A} \cap \tilde{A}'')$ e

$$\tilde{A} \cup (\tilde{A}' \cap \tilde{A}'') = (\tilde{A} \cup \tilde{A}') \cap (\tilde{A} \cup \tilde{A}'')$$

5. Condições de Limites: $\tilde{A} \cap X = \tilde{A}$ e $\tilde{A} \cup X = X$

$$\tilde{A} \cap \Phi = \Phi \text{ e } \tilde{A} \cup \Phi = \tilde{A}$$

6. Absorção: $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{A}') = \tilde{A}$ e

$$\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{A}') = \tilde{A}$$

7. Lei de Morgan: $\sim (\tilde{A} \cap \tilde{A}') = \sim \tilde{A} \cup \sim \tilde{A}'$ e

$$\sim (\tilde{A} \cup \tilde{A}') = \sim \tilde{A} \cap \sim \tilde{A}'$$

8. Involução: $\sim (\sim (\tilde{A})) = \tilde{A}$

9. Fórmula Equivalente: $(\sim \tilde{A} \cup \tilde{A}') \cap (\tilde{A} \cup \sim \tilde{A}') = (\sim \tilde{A} \cap \sim \tilde{A}') \cup (\tilde{A} \cap \tilde{A}')$

10. Diferença Simétrica: $(\sim \tilde{A} \cap \tilde{A}') \cup (\tilde{A} \cap \sim \tilde{A}') = (\sim \tilde{A} \cup \sim \tilde{A}') \cap (\tilde{A} \cup \sim \tilde{A}')$

Os dois únicos axiomas da teoria clássica dos conjuntos, que não são satisfeitos, são a Lei da Contradição e a Lei dos Meios Excluídos, $\tilde{A} \cap \sim \tilde{A} \neq \Phi$ e $\tilde{A} \cup \sim \tilde{A} \neq X$, respectivamente, o que pode ser observado via os operadores *min* e *max*.

4.2.1 Operações Algébricas com Conjuntos *Fuzzy*

Os conceitos básicos dos conjuntos *fuzzy* também apresentam extensões para permitir operações algébricas. A seguir estão apresentadas as mais empregadas, com base em (Zimmermann, 1991).

Produto Cartesiano

Para os conjuntos *fuzzy* $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$, em X_1, X_2, \dots, X_n , o produto cartesiano é o conjunto *fuzzy* no espaço do produto $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, com a seguinte função de pertinência:

$$\mu_{(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n)}(x) = \min \{ \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_i \}$$

Soma algébrica

A soma algébrica $\tilde{A}'' = \tilde{A} + \tilde{A}'$ é definida da seguinte forma:

$$\tilde{A}'' = \{ (x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{A}'}(x)) \mid x \in X \}$$

onde,

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{A}'}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{A}'}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{A}'}(x)$$

Soma de Contorno

A soma de contorno $\tilde{A}'' = \tilde{A} \oplus \tilde{A}'$ é definida da seguinte forma:

$$C = \{ (x, \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{A}'}(x)) \mid x \in X \}$$

onde,

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{A}'}(x) = \min \{1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{A}'}(x)\}$$

Diferença de Contorno

A diferença de contorno $\tilde{A}'' = \tilde{A} \ominus \tilde{A}'$ é definida da seguinte forma:

$$\tilde{A}'' = \{(x, \mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{A}'}(x)) \mid x \in X\}$$

onde,

$$\mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{A}'}(x) = \max \{0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{A}'}(x) - 1\}$$

Produto Algébrico

O produto algébrico de dois conjuntos *fuzzy* $\tilde{A}'' = \tilde{A} \bullet \tilde{A}'$ é definido da seguinte forma:

$$\tilde{A}'' = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \bullet \mu_{\tilde{A}'}(x)) \mid x \in X\}$$

Produto de um Valor Fuzzy por um Escalar

O produto de um valor *fuzzy* por um escalar é definido da seguinte forma:

$$\tilde{A} = \int_X [\alpha \mu_{\tilde{A}}(x)] / x, \text{ onde } \alpha > 0 \text{ e } \sup[\alpha \mu_{\tilde{A}}(x)] \leq 1$$

Produto Escalar entre dois Conjuntos Fuzzy

O produto escalar entre dois conjuntos *fuzzy* é definido da seguinte forma:

$$\tilde{A} \bullet \tilde{A}' = \int_X [\mu_{\tilde{A}}(x) \bullet \mu_{\tilde{A}'}(x)] / x$$

Combinação Convexa

A combinação convexa para os subconjuntos *fuzzy* $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ em X é definida da seguinte forma:

$$C = \int_X [w_1 \mu_{\tilde{A}_1}(x) + w_2 \mu_{\tilde{A}_2}(x) + \dots + w_n \mu_{\tilde{A}_n}(x)] / x$$

onde w_1, w_2, \dots, w_n são constantes reais.

4.3 Agregação de Conjuntos *Fuzzy*

A agregação é a combinação de conjuntos *fuzzy* para produzir um novo conjunto *fuzzy*. Trata-se de um processo largamente utilizado em várias tecnologias (Yager, 1994), principalmente na tomada de decisão multicriterial (Zimmermann, 1997).

A idéia principal das operações de agregação é a representação do grau de consenso das informações disponíveis, através do cálculo de um valor final. Se estes dados foram extraídos de especialistas, este valor será a taxa de aceitação ou rejeição entre eles, ou seja, o grau pelo qual especialistas concordam em suas estimativas, tornando possível a elaboração de classificações das avaliações realizadas (Kuncheva, 1996).

As seguintes propriedades podem ser desejáveis, quando funções de agregação são utilizadas (Bardossy, 1993):

- *Preservação da concordância*: caso todas as estimativas sejam idênticas, o resultado da combinação deverá ser a própria estimativa (requisito de consistência).
- *Independência da ordem*: o resultado não deve depender da ordem com que opiniões ou estimativas individuais são combinadas (requisito de consistência).
- *Invariância da transformação*: o resultado não deve ser afetado por transformações ocorridas no ambiente onde se processa a agregação.
- *Conservação da possibilidade*: se um dado valor for considerado possível para uma única estimativa, então, ele permanece possível para toda a combinação.
- *Conservação do intervalo de possibilidade*: um certo valor localizado entre dois valores possíveis é também considerado possível.
- *Incertezas individuais versus globais*: a medida de incerteza, $H(R_i)$, de uma estimativa individual, R_i , é definida como a área sob sua função de pertinência:

$$H(R_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{R_i}(x) dx$$

A medida de incerteza global, $H(R_i)$, isto é, a combinação de todas as estimativas individuais, R , também pode ser medida da mesma forma.

- *Conveniência da estimativa dos resultados*: combinação de várias características de técnicas de agregação, que são avaliadas pelos critérios expostos nos itens acima, através de uma escala subjetiva, variando de *A* (excelente) a *E* (péssimo).

Formalmente, a agregação *fuzzy* pode ser representada da seguinte forma:

$$h : [0,1]^n \rightarrow [0,1], \text{ onde } n \geq 2.$$

Se a função h for aplicada para n conjuntos *fuzzy*, $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ e utilizar os graus de pertinência de cada $x \in X$, surgirá um conjunto *fuzzy* agregado \tilde{A} , onde para cada $x \in X$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = h(\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x))$$

Para que h seja considerada função de agregação, esta deve satisfazer, no mínimo, os seguintes requisitos:

I. *Condição de limite*: $h(0, 0, \dots, 0) = 0$ e $h(1, 1, \dots, 1) = 1$.

II. *Monotonicidade*: $h(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq h(y_1, y_2, \dots, y_n)$,

se $x_i \geq y_i$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.

Através de experimentos, Zimmermann (1980) concluiu que o operador *min* não funcionou adequadamente como um modelo do conectivo “e lógico”, enquanto o operador *max* se apresentou bem melhor. Para contornar esta situação, criou-se uma família de operadores de compensação, onde a operação de agregação comporta-se como uma combinação dos conectivos “e lógico” e “ou lógico”, provendo um mecanismo de compensação. Esta operação pode ser expressa assim:

$$(A \odot B)(x) = [(A \cap B)(x)]^{1-\gamma} [(A \cup B)(x)]^{\gamma},$$

onde \cap e \cup são os operadores de interseção e união, respectivamente, e γ é o fator de compensação, pertencente ao intervalo $[0,1]$, indicando onde o operador se localiza entre o “e lógico” e “ou lógico”.

Outra forma de agregação é a soma simétrica. São funções com n argumentos que, além de atenderem aos requisitos I e II, são contínuas, comutativas e autodual. São assim representadas (Pedrycz, 1998):

$$S_sum(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - S_sum(1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n)$$

A operação de média definida para n argumentos é idempotente e comutativa, além de atender aos requisitos I e II. Pode ser assim representada (Dyckhoff, 1984):

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^p}, \text{ onde } p \in \mathbb{R}, p \neq 0.$$

Em casos particulares, tem-se:

- Média aritmética, onde $p = 1$.
- Média geométrica, onde $p \rightarrow 0$.
- Média harmônica, onde $p = -1$.
- Operador *min*, onde $p \rightarrow -\infty$.
- Operador *max*, onde $p \rightarrow \infty$.

A classe de operações de média de pesos ordenados, *OWA* (*Ordered Weighted Averaging*), foi proposta por (Yager, 1988), sendo uma classe de operadores ponderados. Tal classe pode ser assim representada:

$$OWA(\tilde{A}, w) = \sum_{i=1}^n w_i \mu_{\tilde{A}}(x_i),$$

onde w é um vetor de pesos, tal que $w_i \in [0,1]$, cuja soma de valores é igual a 1 e os valores $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ estão ordenados.

4.3.1 Classes t-norms e t-conorms

Originalmente, o conceito de *triangular norms* surgiu no espaço de métricas probabilísticas, onde se estabeleceu um conceito geométrico de desigualdade triangular na teoria da probabilidade. Esse conceito tornou-se muito importante na teoria dos conjuntos *fuzzy*, generalizando modelos para as operações de interseção e união (Pedrycz, 1998).

A classe padrão triangular (t-norm) é uma função $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que satisfaz os seguintes requisitos:

1. $t(a, 0) = 0$ e $t(a, 1) = a$ (condição de contorno)
2. $t(a, b) \leq t(c, d)$; $a \leq c$ e $b \leq d$ (monotonicidade)

$$3. t(a, b) = t(b, a) \quad (\text{comutatividade})$$

$$4. t(a, t(b, c)) = t(b, t(a, c)) \quad (\text{associatividade})$$

Adicionalmente, uma t-norm é *Archimedean* se for contínua e $x \cdot t x < x, \forall x \in (0,1)$.

A classe co-padrão triangular (t-conorm), também conhecida como s-norm, é uma função $s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que satisfaz os seguintes requisitos:

$$1. s(1, 1) = 1 \text{ e } s(a, 1) = a \quad (\text{condição de contorno})$$

$$2. s(a, b) \leq s(c, d); a \leq c \text{ e } b \leq d \quad (\text{monotonicidade})$$

$$3. s(a, b) = s(b, a) \quad (\text{comutatividade})$$

$$4. s(a, s(b, c)) = s(b, s(a, c)) \quad (\text{associatividade})$$

A s-norm pode ser derivada da seguinte relação:

$$t(a, b) = 1 - s(1 - a, 1 - b)$$

As classes t-norms incluem os operadores *min*, produto algébrico e interseção robusta. As s-norms englobam os operadores *max*, soma algébrica e soma de contorno. A interseção robusta e a união robusta (Giles, 1976) foram modeladas pela diferença de contorno e soma de contorno, respectivamente.

A t-norm definida pelo *min* representa um limite superior para o operador de interseção e a s-norm definida pelo *max* representa um limite inferior para o operador de união. Segue a representação:

$$t(x, y) \leq \min(x, y) \text{ e } s(x, y) \geq \max(x, y)$$

Além das operações apresentadas, é possível comparar conjuntos *fuzzy*. Algumas das diversas formas de fazê-lo estão apresentadas na próxima seção.

4.4 Medidas de Comparação entre Conjuntos *Fuzzy*

Os conjuntos *fuzzy* estão formalmente definidos e caracterizados através de funções de pertinência. Desta forma, torna-se possível compará-los com o objetivo de estabelecer algum tipo de correspondência entre os mesmos. Esta comparação pode ser executada através de

inúmeros métodos e possuir diversos significados. A seguir, são apresentadas as classes mais citadas na literatura.

4.4.1 Medidas de Similaridade

As medidas de similaridade são bastante utilizadas nos controladores *fuzzy* e redes neurais *fuzzy*, para definir se uma determinada regra deve ser disparada ou não (Buckley, 1993; Turksen, 1988].

A medida de similaridade, $s(\tilde{A}, \tilde{A}')$, entre os conjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{A}' pode ser de várias formas interpretada e ser definida através de diversas equações (Dubois, 1980; Wang, 1995; Bhandari, 1993; Chen, 1988). Estes conjuntos apresentam *igualdade- ε* , caso $s(\tilde{A}, \tilde{A}') \geq \varepsilon$.

4.4.2 Medidas de Proximidade

O conceito de medida de proximidade foi introduzido por (Papis, 1991), com o intuito de evidenciar que valores de pertinência precisos podem não ter significado prático. Dois conjuntos *fuzzy* são *aproximadamente- ε* iguais quando:

$$1 - \sup_{x \in X} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| \geq \varepsilon$$

Se dois conjuntos são *aproximadamente- ε* , então apresentam *igualdade- ε* . A medida de similaridade *igualdade- ε* está restrita a dois conjuntos \tilde{A} e \tilde{A}' . No entanto, se estes dois conjuntos são *aproximadamente- ε* iguais, seus complementos também o são. Esta é a diferença entre os dois conceitos (Fan, 1999).

4.4.3 Medidas de Distância

A medida de distância descreve a diferença entre dois conjuntos *fuzzy*. Pode-se considerá-la como um conceito dual da medida de similaridade (Fan, 2001).

De uma forma geral, a medida de distância entre dois conjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{B} pode expressa através da distância de *Minkowski*:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\int_X |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)|^p dx \right]^{1/p}, \text{ onde } p \geq 1$$

Casos particulares podem ser encontrados:

- Distância de *Hamming* ($p = 1$):
- Distância *Euclidiana* ($p = 2$):
- Distância de *Tchebyshev* ($p = \infty$):

4.4.4 Medida de Subsethood Fuzzy

O *subsethood fuzzy* mede o quanto um conjunto *fuzzy* \tilde{A} está contido em um conjunto *fuzzy* \tilde{A}' :

$$S(\tilde{A}, \tilde{A}') = \frac{Card(\tilde{A} \cap \tilde{A}')}{Card(\tilde{A})}$$

4.4.5 Medida de Possibilidade

A Figura 4.3 apresenta dois conjuntos *fuzzy* \tilde{A} e \tilde{A}' . O conjunto \tilde{A} representa o conceito “*em torno de 1,70 cm*” e o conjunto \tilde{A}' representa “*alta estatura*”. Estes conjuntos poderiam ser relacionados através da questão: Em qual grau a afirmação *alta estatura* significa *em torno de 1,70 cm*?

A medida de possibilidade (Dubois, 1980), a qual quantifica o grau de sobreposição entre os conjuntos \tilde{A} e \tilde{A}' , é assim representada:

$$Poss(\tilde{A}, \tilde{A}') = \sup_{x \in X} [\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}'}(x))]$$

Para o caso da Figura 4.3:

$$Poss(\text{em torno de } 1,70, \text{ alta estatura}) = 0,5$$

A medida de possibilidade é simétrica, ou seja, $Poss(\tilde{A}, \tilde{A}') = Poss(\tilde{A}', \tilde{A})$.

4.4.6 Medida de Necessidade

A medida de necessidade de um conjunto \tilde{A} em relação a um conjunto \tilde{A}' , a qual escreve o grau em que \tilde{A}' está incluído em \tilde{A} , é assim representada:

$$Nec(\tilde{A}, \tilde{A}') = \inf_{x \in X} [\max(\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{A}'}(x))]$$

No caso da Figura 4.3, este valor é igual a zero. A medida de necessidade é assimétrica, ou seja, $Nec(\tilde{A}, \tilde{A}') \neq Nec(\tilde{A}', \tilde{A})$.

As medidas de possibilidade e necessidade são bastante utilizadas para retornar informações a respeito de ocorrência de um evento \tilde{A} em relação ao universo X . A medida de necessidade provê informações a respeito do complemento de \tilde{A} .

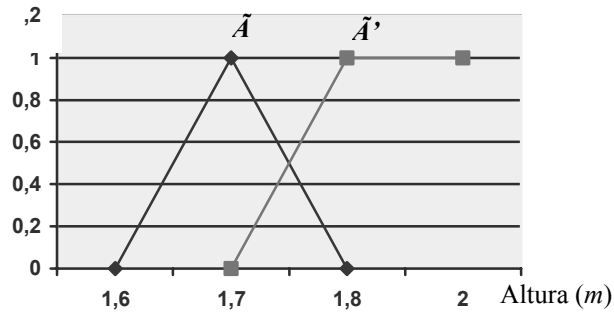


Figura 4.3: Conjuntos *fuzzy* para os termos linguísticos de *em torno de 1,70* e *alta estatura*

4.4.7 Medidas de Compatibilidade

A medida de compatibilidade representa o quanto um conjunto *fuzzy* \tilde{A} é compatível com um conjunto *fuzzy* \tilde{A}' dentro do mesmo universo. A compatibilidade de \tilde{A} em relação a \tilde{A}' é assim definida (Zadeh, 1975):

$$Comp(\tilde{A}, \tilde{A}')(c) = \sup_{c = \mu_{\tilde{A}'}(x)} \mu_{\tilde{A}}(x), c \in [0,1]$$

A compatibilidade não é um valor numérico único, mas um mapeamento entre dois intervalos, ou seja, um conjunto *fuzzy* no intervalo $[0,1]$.

Além destas comparações, também é possível caracterizar conjuntos *fuzzy* de uma forma global, através de índices escalares. Esta caracterização está apresentada na próxima seção.

4.5 Caracterização de Conjuntos *Fuzzy*

Existem algumas formas de caracterizar conjuntos *fuzzy* através de medidas escalares. A seguir, estão apresentadas essas principais medidas.

4.5.1 Medidas de Entropia de Difusão

A medida de entropia verifica o quanto um conjunto *fuzzy* é realmente difuso. A entropia de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} é definida pela seguinte equação:

$$H(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n h(\mu_{\tilde{A}}(x_i))$$

onde h é uma função que mapeia valores do intervalo $[0,1]$ para o intervalo $[0,1]$, ou seja, $h:[0,1] \rightarrow [0,1]$, com as seguintes propriedades (Ebansky, 1983):

- *Nitidez*: $h(\mu_{\tilde{A}}(x_i))$ assume o valor 0 se, e somente se, o valor $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ é igual a 0 ou 1.
- *Maximum*: $h(\mu_{\tilde{A}}(x_i))$ atinge valor máximo se, e somente se, $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 0,5$.
- *Resolução*: $h(\mu_{\tilde{A}}(x_i)) \geq h(\mu_{\tilde{A}'}(x_i))$, quando \tilde{A}' for uma versão mais nítida de \tilde{A} , ou seja,

$$\mu_{\tilde{A}'}(x_i) \geq \mu_{\tilde{A}}(x_i), \text{ se } \mu_{\tilde{A}}(x_i) \geq 0,5 \text{ e}$$

$$\mu_{\tilde{A}'}(x_i) < \mu_{\tilde{A}}(x_i), \text{ se } \mu_{\tilde{A}}(x_i) < 0,5.$$

- *Simetria*: $h(\mu_{\tilde{A}}(x_i)) = h(1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i))$.
- *Monotonicidade*: $h(x)$ é crescente no intervalo $[0,1/2]$ e decrescente no intervalo $[1/2,1]$, observando que $h(1/2) = 1$.
- *Avaliação*: $h[\max(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{A}}(x_j))] + h[\min(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{A}}(x_j))] = h(\mu_{\tilde{A}}(x_i)) + h(\mu_{\tilde{A}}(x_j))$

Alguns exemplos da função h :

- Função de Shannon: $h(u) = -u \log u - (1 - u) \log(1 - u)$.
- Função Quadrática: $h(u) = 4u(1 - u)$.
- Função Linear de Piecewise: $h(u) = \begin{cases} 2u, & \text{se } u \in [0, 1/2] \\ 2(1 - u), & \text{se } u \in [1/2, 1] \end{cases}$.

Alguns autores definiram entropia em termos de distância *fuzzy* (Kaufmann, 1975; Yager, 1979; Kosko, 1992). A Função Linear de Piecewise é a distância de *Hamming* entre \tilde{A} e o seu conjunto de $1/2$ -corte multiplicada por 2.

4.5.2 Medidas de Energia de Difusão

A medida de energia expressa o total de massa de um conjunto *fuzzy*, sendo definida por:

$$E(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n e(\mu_{\tilde{A}}(x_i)),$$

onde $e:[0,1] \rightarrow [0,1]$ é crescente, respeitando as condições de limite $e(0) = 0$ e $e(1) = 1$. Um caso particular da medida de energia é a cardinalidade de um conjunto *fuzzy*, ocorrendo quando $e(u) = u$:

$$Card(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n e(\mu_{\tilde{A}}(x_i))$$

Um outro tipo da medida de energia, $e(u) = u^p$ pode ser considerada como a distância do conjunto *fuzzy* \tilde{A} para um conjunto vazio.

4.5.3 Especificidade de um Conjunto *Fuzzy*

A especificidade busca representar numericamente a dificuldade de selecionar um único elemento do universo de discurso, que possa representar um conjunto *fuzzy* com a melhor fidelidade possível. A especificidade de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} para um universo de discurso finito é representada por (Yager, 1982):

$$Sp(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Card(\tilde{A}_{\alpha})} \Delta\alpha_i,$$

onde $\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$.

São necessárias, ainda, algumas considerações:

- $Sp(\tilde{A}) = 1$, se, e somente se, existe apenas um elemento no universo X tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ e todos os outros elementos possuem $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.
- $Sp(\tilde{A}) = 0$, se $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 0$ para todos os elementos de \tilde{A} .
- $Sp(\tilde{A}_1) \leq Sp(\tilde{A}_2)$, se $\tilde{A}_1 \supset \tilde{A}_2$.

A seguir, estão apresentadas noções básicas e definições a respeito dos números *fuzzy*.

4.6 Números *Fuzzy*

Durante a análise de resultados dos dados obtidos de especialistas de um determinado domínio de aplicação, por exemplo, é possível verificar-se que estes são imprecisos ou contêm ambigüidades. Esta situação pode ser contornada através da utilização de números *fuzzy*, os quais podem ser usados para modelar quantidades aproximadas, tais como “em torno de três”, “próximo de dez”, “abaixo de quinze” etc.

Formalmente, um número *fuzzy* é um conjunto *fuzzy* convexo e normalizado definido no conjunto dos números reais \mathbb{R} , tal que sua função de pertinência tem a forma (Klir, 1995; Zimmermann, 1991):

$$\mu_{\tilde{A}}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

Os números *fuzzy* são geralmente aceitos como conjuntos *fuzzy* triangulares, onde o pico corresponde ao valor dado (Novak, 1999). Além da forma triangular, a trapezoidal é também bastante utilizada para representar os números *fuzzy*. Em casos especiais, pode-se ainda usar formas não simétricas.

Adicionalmente, um conjunto *fuzzy* \tilde{A} é um número *fuzzy* discreto se \tilde{A} tem um suporte finito $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e existem índices s, t , onde $1 \leq s \leq t \leq n$, tais que (Voxman, 2001):

- $\mu_{\tilde{A}}(x_i) = 1$, sempre que $s \leq i \leq t$;
- se $i < j < s$, então $\mu_{\tilde{A}}(x_i) \leq \mu_{\tilde{A}}(x_j) < 1$;
- se $t > p > q$, então $1 \geq \mu_{\tilde{A}}(x_p) > \mu_{\tilde{A}}(x_q)$.

4.6.1 Números *Fuzzy* do tipo-LR

Os números *fuzzy* do tipo-LR constituem uma representação parametrizada de números *fuzzy* que permite uma simplificação nos cálculos das operações estendidas, sem perda considerável de generalidade (Zimmermann, 1991).

Um número *fuzzy* \tilde{N} é do tipo-LR quando há as funções de referência L (para a esquerda (*left*)), R (para a direita (*right*)), os números escalares $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ (dispersões da esquerda e da direita, respectivamente), e o número real m , chamado valor médio de \tilde{N} . Neste caso, \tilde{N} é um número *fuzzy* triangular, escrevendo-se $\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$, onde:

$$\mu_N(x_i) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{para } x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{para } x \geq m \end{cases}$$

Uma função f é uma referência para um número *fuzzy*, caso satisfaça as seguintes propriedades:

- Simetria: $f(x) = f(-x)$;
- Normalidade: $f(0) = 1$;
- $f(x)$ é não crescente em $[0, \infty)$.

Se m é um intervalo $[m_1, m_2]$, ao invés de ser um número real, o número *fuzzy* \tilde{N} transforma-se em um número *fuzzy* trapezoidal, representado por $\tilde{N} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$, sendo definido pela seguinte equação:

$$\mu_N(x_i) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1-x}{\alpha}\right) & \text{para } x \leq m_1 \\ R\left(\frac{x-m_2}{\beta}\right) & \text{para } x \geq m_2 \\ 1 & \text{para } m_1 \leq x \leq m_2 \end{cases}$$

Sendo de fundamental importância para a teoria *fuzzy*, estão apresentados na próxima seção alguns aspectos que caracterizam uma variável lingüística.

4.7 Variável Lingüística

Informalmente, uma variável lingüística é uma variável que, ao invés de números, possui palavras ou sentenças como valores. Portanto, a variável lingüística pode ser utilizada para manusear a ambigüidade envolvida na avaliação dos dados e nas propriedades imprecisas (Lee, 1996).

De modo geral, as caracterizações lingüísticas são menos específicas do que as numéricas. A utilização da palavra “fria” para descrever a temperatura ambiente é bem menos

precisa do que o valor 10° . No entanto, a menos que se disponha de um termômetro, é mais seguro dizer que a temperatura está “fria” do que atribuir-lhe o valor de 10° . Enquanto o valor 10° é um elemento de um conjunto, o valor “fria” é uma coleção de objetos (temperaturas).

Assim, as principais razões para usar variáveis lingüísticas são:

- São uma forma de compressão de dados chamada de granulação (Zadeh, 1994);
- São um meio para a caracterização aproximada de um fenômeno, que está mal definido ou é muito complexo para permitir uma definição mais precisa, ou ambos (Zadeh, 1975);
- São um meio para traduzir descrições lingüísticas em numéricas e computacionais, fazendo com que a dualidade entre o processamento numérico e simbólico se torne natural ao invés de antagônico (Pedrycz, 1998).

Uma variável lingüística é totalmente caracterizada pelo quintuplo $(x, T(x), U, G, M)$ (Zimmermann, 1991), onde:

- x é o nome da variável;
- $T(x)$ é o conjunto de termos (ou valores lingüísticos) de x ;
- U é o universo de discurso que contém a variável base x ;
- G é uma regra sintática para a geração dos termos lingüísticos, e
- M é uma regra semântica que associa a cada termo lingüístico $t \in T$ o seu significado $M(t)$, que é um subconjunto de U .

Cada variável lingüística tem seu estado denotado por termos lingüísticos, os quais são interpretados como números *fuzzy* específicos. Os termos lingüísticos representam valores aproximados de uma variável lingüística, relacionados a uma aplicação em particular (Klir, 1995). Enfim, os termos lingüísticos podem ser modelados através de funções, cujos valores são graus no domínio de uma função de pertinência e cada representação é fundamental para a modelagem do raciocínio aproximado (Zadeh, 1977).

O valor de uma variável lingüística é um termo composto $T = L_1, L_2, \dots, L_n$, que é uma concatenação dos termos atômicos L_1, L_2, \dots, L_n , tais como “muito frio” e “não muito frio”, por exemplo. Os termos atômicos estão agrupados em três classes (Pedrycz, 1998):

1. *Termos primários*: rótulos dos conjuntos *fuzzy* em U com seus correspondentes significados, tais como “frio”, “quente”;
2. *Limitadores*: são modificadores lingüísticos dos termos primários, tais como “muito”, “mais ou menos” etc;
3. *Conectivos e negação*: os conectivos “e” e “ou” e a negação “não”.

Os limitadores lingüísticos podem ser interpretados como operações unárias, h , em um intervalo unitário $[0, 1]$, como por exemplo:

- “muito” $h(a) = a^2$;
- “mais ou menos” $h(a) = \sqrt{\mu_A(x)}$;
- “não” $h(a) = 1 - h(a)$.

Além dos quantificadores *universal* e *existencial*, os termos lingüísticos podem ser caracterizados por quantificadores *fuzzy*, tais como “maioria”, “muitos”, “alguns” etc., os quais podem ser usados para representar uma certa maioria, aproximando-se da percepção humana real (Kacprzyk, 1992; Novak, 1992).

A próxima seção apresenta os principais fundamentos relativos à lógica *fuzzy*.

4.8 Lógica *Fuzzy*

De uma forma genérica, a lógica estabelece os princípios formais que sustentam as leis do pensamento, provendo uma sólida estrutura ao raciocínio necessário para a solução de problemas e tomada de decisão. Embora com origem na Grécia antiga, a lógica ainda é objeto de discussão.

A lógica booleana é a mais difundida e utilizada. Sua característica mais marcante é a lei do meio excluído, a qual impõe que cada proposição deve ser *verdadeira* ou *falsa*, tornando-se ideal para domínios, que não permitem imprecisões ou incertezas. No entanto, esta rigidez encontrou resistência mesmo na antigüidade, quando Heraclitus, por exemplo, sugeriu que algumas proposições poderiam ser falsas e verdadeiras simultaneamente.

O pioneiro no desenvolvimento de uma alternativa à lógica bivalorada de Aristóteles foi Jan Lukasiewicz (Lukasiewicz, 1920). Sua motivação em transformar a lógica bivalorada

em uma lógica multivalorada fundamentou-se na dificuldade em atribuir valores verdade a eventos que se processam no futuro.

Neste contexto, a lógica *fuzzy* é também uma outra extensão realizada na lógica booleana, podendo ser considerada uma generalização da lógica multivalorada (Kundu, 1998; Novak 1997; Klement, 1999). Modelando as incertezas da linguagem natural, através de conceitos de verdade parcial – valores verdade entre *completamente verdade* e *completamente falso* – (Kantrowitz, 1996) a lógica *fuzzy* lida com tais valores através de conjuntos *fuzzy* no intervalo $[0,1]$. Estas características permitem que a lógica *fuzzy* manipule objetos do mundo real, que possuem limites imprecisos, provendo uma linguagem capaz de descobrir representações de proposições da linguagem natural de forma mais expressiva do que a matemática clássica (Grauel, 1999). Utilizando predicados *fuzzy* (velho, novo, alto etc.), quantificadores *fuzzy* (muito, pouco, quase tudo etc.), valores-verdade *fuzzy* (totalmente verdadeiro, mais ou menos verdadeiro) (Zimmermann, 1991) e generalizando o significado de conectivos e operadores lógicos, a lógica *fuzzy* revela-se como um modo de raciocínio aproximado.

Os quantificadores *fuzzy*, que são de particular interesse para os termos lingüísticos *fuzzy*, podem ser (Bosc, 1995):

- *Absolutos*: definidos em \mathbb{R} e representados por um número, como, por exemplo, “no máximo 9”;
- *Relativos*: definidos no intervalo $[0,1]$, compondo uma proposição quantificada lingüisticamente (Yager, 1983; Zadeh, 1983) como, por exemplo, “muitos pássaros são velozes”.

Proposições lingüisticamente quantificadas através de termos lingüísticos relativos podem ser apresentadas na forma (Kacprzyk, 1992):

$$Q\ x's\ são\ F,$$

onde Q é um quantificador lingüístico (*muitos*), x é um elemento do conjunto X (*pássaros*) e F é um predicado *fuzzy*, que descreve uma propriedade (*velozes*) de $x \in X$.

Pode ser necessário atribuir características particulares aos elementos de X ou a alguns objetos x , transformando a proposição para “*muitos pássaros pequenos são velozes*”. Esta modificação converte a forma das proposições lingüisticamente quantificadas para:

$$Q_b x's \text{ são } F,$$

onde \tilde{B} é definido com um conjunto *fuzzy* em X e $\mu_B(x_i) \in [0,1]$ é um grau de pertinência x_i . Neste caso, o grau de pertinência x_i é também definido como a possibilidade de \tilde{B} assumir o valor x_i . Esta definição permite que a lógica *fuzzy* seja também chamada de teoria da possibilidade.

A teoria da possibilidade está ligada à linguagem natural de forma intrínseca, onde a possibilidade é melhor interpretada do que a probabilidade. Embora não exista um mapeamento rigoroso de identidade entre as funções de pertinência e as funções de probabilidade (Pedrycz, 1998), há uma relação entre estes conceitos conhecida como princípio da consistência (Zadeh, 1978): “*o que é possível pode não ser provável e o que é improvável não necessariamente é impossível*”. Portanto, a possibilidade é o limite superior da probabilidade (Zimmermann, 1991).

As operações básicas na lógica *fuzzy* estão definidas no intervalo de 0 (falso) a 1 (verdadeiro) através das classes t-norm e s-norm. As operações binárias *fuzzy* AND (f-AND), *fuzzy* OR (f-OR), probabilidade AND (p-AND) e probabilidade OR (p-OR), e a operação unária NOT foram assim definidas (Richards, 1988):

1. $a \text{ f-AND } b = \min(a, b);$
2. $a \text{ f-OR } b = \max(a, b);$
3. $a \text{ p-AND } b = a \times b;$
4. $a \text{ p-OR } b = a + b - (a \times b);$
5. $\text{NOT } a = 1 - a.$

A lógica *fuzzy* tem sido largamente empregada em: controladores de operações automáticas para aplicações industriais, reconhecimento de padrões, imagem e áudio, análise quantitativa, robótica, processos de tomada de decisão, sistemas para recuperação de informações e, notadamente, sistemas especialistas (Teodorescu, 1999).

A seguir, está um breve resumo sobre as abordagens mais utilizadas para a representação do conhecimento, apresentando-se a lógica *fuzzy* neste contexto.

4.9 Modelos Computacionais

Para que um sistema de computação se comporte de maneira inteligente, é imprescindível que o *conhecimento* necessário esteja devidamente representado. O uso de regras constitui um modo formal de representar conhecimento. Como o próprio nome já diz, sistema baseado em regras é construído sobre uma base de regras, além de utilizar uma coleção de fatos para inferir.

No entanto, o conhecimento pode estar imbuído em um ambiente de incertezas e imprecisões. Diante deste fato, as regras *fuzzy*, através de variáveis lingüísticas e conjuntos *fuzzy*, são uma alternativa para mapear restrições, incertezas, relações gradativas e situações inconsistentes (Pedrycz, 1998).

A união dos conjuntos *fuzzy*, especialmente suas operações lógicas, com as redes neurais formam as redes neurais *fuzzy*. Esta arquitetura, além de permitir a aceleração do processo de aprendizagem, facilita a interpretação da rede final obtida (Pedrycz, 1998).

A computação evolucionária busca simular a evolução natural no computador. Dentre os vários paradigmas, que a compõem, estão os algoritmos genéticos, definidos como um processo de busca baseado nas leis da evolução natural e na genética. Durante o processo do algoritmo genético são utilizadas operações como codificação, avaliação de aptidão, seleção de pais e operações genéticas, tais como reprodução, *crossover* e mutação. Os algoritmos genéticos podem ser utilizados para projetar sistemas baseados em regras *fuzzy* e determinar as funções de pertinência (Arslan, 2001).

O consórcio formado por várias ferramentas computacionais que buscam explorar a tolerância à imprecisão e à incerteza com o objetivo de dar tratamento a estes aspectos e alcançar robustez e baixo custo computacional é chamado de *Soft Computing* (Zadeh, 1994). Seus principais componentes são as redes neurais, a lógica *fuzzy* e o raciocínio probabilístico, este envolvendo redes de crença, algoritmos genéticos e sistemas caóticos (Pal, 1999).

4.9.1 Modelos *Fuzzy*

A qualidade ou a relevância de um modelo influencia fortemente a qualidade da solução (Belchior, 1997). Particularmente, os modelos *fuzzy* possuem vital importância na construção de aplicações que utilizam conjuntos *fuzzy*. Adicionalmente, devido à sua natureza matemática e à existência de um componente experimental, deve-se buscar de forma incessante que os modelos *fuzzy* sejam elaborados através de metodologias cada vez mais avançadas, fundamentadas conceitualmente e, por que não dizer, amigáveis.

De forma resumida, os modelos *fuzzy* possuem as seguintes propriedades:

- utilizam termos lingüísticos (conjuntos *fuzzy*), e
- representam e processam incerteza.

Estas características evidenciam que os conjuntos *fuzzy* devem ser escolhidos de forma cuidadosa, pois a delimitação dos mesmos irá influenciar de sobremaneira o resultado final do processamento (Lima, 2001a).

A elaboração do modelo envolve as principais fases (Pedrycz, 1998):

1. Determinação das variáveis de entrada e saída e a incorporação do conhecimento do domínio;
2. Estimativa dos parâmetros pertinentes ao modelo;
3. Verificação do modelo em relação à fidelidade de representação dos dados, e
4. Validação do modelo em relação à legitimidade da tarefa executada e à satisfação das expectativas do usuário.

É importante enfatizar que um modelo simples sempre tem preferência sobre um modelo mais complexo, caso ambos possuam o mesmo nível de aproximação (Princípio da Navalha de Occam).

A Figura 4.4 apresenta a arquitetura geral de um modelo *fuzzy*, composta pelo codificador *fuzzy*, módulo de processamento e decodificador *fuzzy*. Os conjuntos *fuzzy* são uma interface entre o componente computacional e o ambiente modelado. Esta estrutura

permite que o ambiente seja representado a partir de suas características mais relevantes, além de incorporar o nível apropriado da granularidade da informação (Pedrycz, 1992).

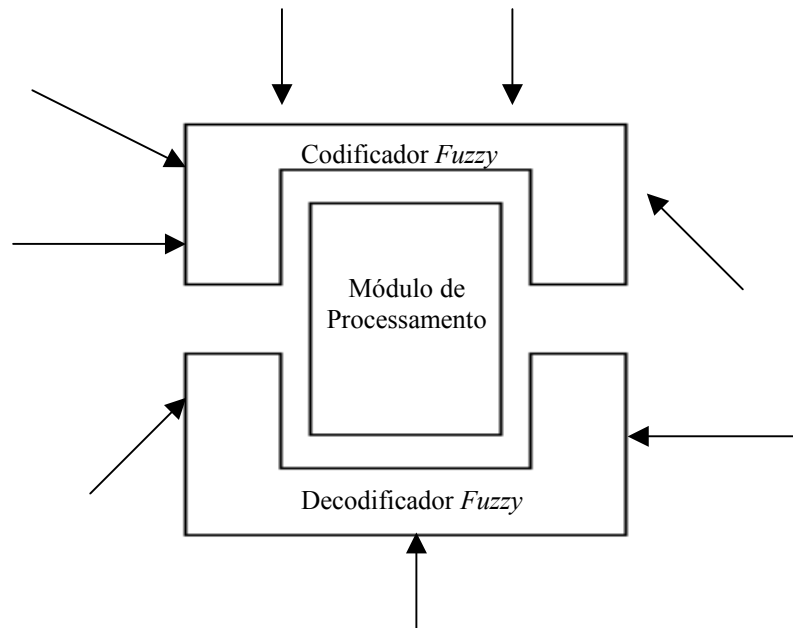


Figura 4.4: Topologia geral de um modelo *fuzzy*

Uma taxonomia proposta por (Pedrycz, 1998) distribui os modelos *fuzzy* nas seguintes classes:

- Representações tabulares;
- Gramáticas *fuzzy*;
- Equações relacionais *fuzzy*;
- Redes neurais *fuzzy*;
- Modelos baseados em regras;
- Modelos de regressão local, e
- Modelos de regressão *fuzzy*.

4.10 Conclusão

Este capítulo apresentou diversos princípios e definições concernentes à teoria fuzzy. Iniciando-se pelos conceitos básicos sobre conjuntos fuzzy, foram apresentadas em seguida

várias operações com tais conjuntos, bem como diversas formas de agregá-los, formas de compará-los e caracterizá-los através de índices escalares. Foram abordados resumidamente alguns modelos computacionais, onde se insere a lógica fuzzy.

A teoria *fuzzy* é uma forma inovadora de gerenciar incertezas e tratar aspectos da comunicação verbal, como o uso de termos qualitativos. No entanto, ainda há algumas resistência à utilização da lógica *fuzzy*, uma vez que seus conceitos remontam questões culturais sedimentadas pela lógica bivalente, como a definição precisa do ser ou não ser. Desta forma, a decisão de se estender uma teoria convencional através do uso de conceitos *fuzzy*, além de estar comprometida com a conservação dos princípios originais da teoria estendida, deve centrar seus objetivos na busca de resultados que apresentem um grau de confiabilidade maior do que os alcançados pelo modelo original.

No próximo capítulo, será apresentada a proposta para a extensão da FPA clássica para Análise de Pontos por Função *Fuzzy*.