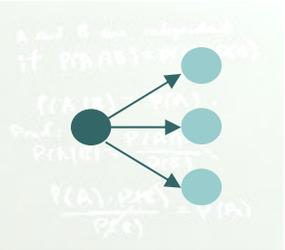


# Probabilidade

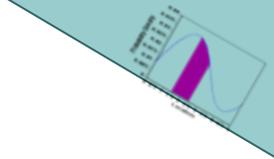
Distribuição Normal

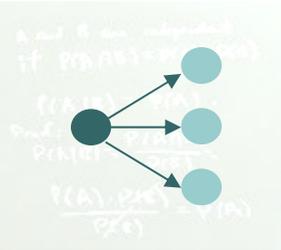
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\frac{19}{36} = \frac{14}{36} + \frac{15}{36} - \frac{7}{36}$$



# Distribuição Normal

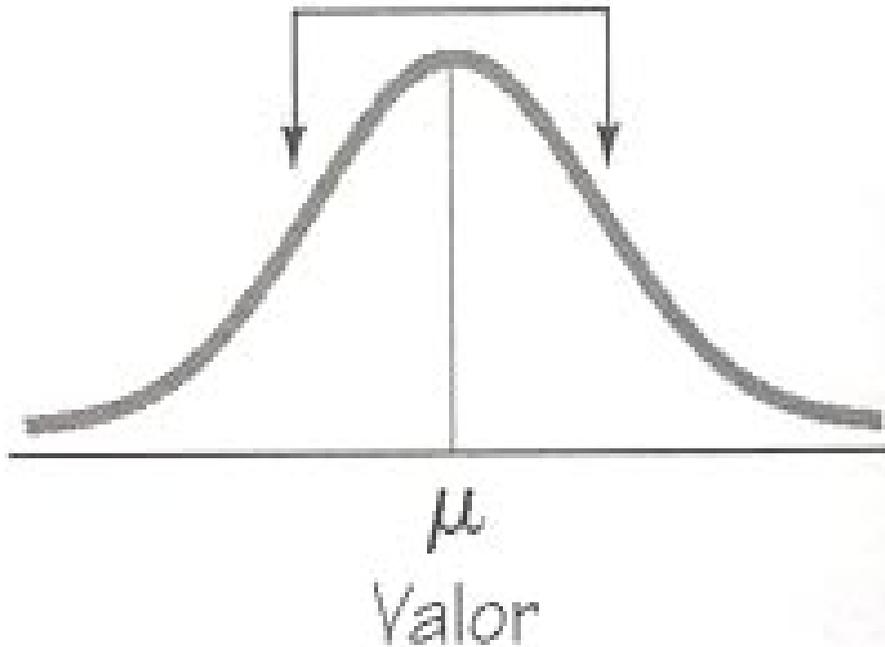
- Uma variável aleatória contínua tem uma distribuição normal se sua distribuição é:
  - simétrica
  - apresenta (num gráfico) forma de um sino



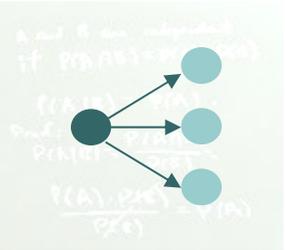


# Função Densidade da Distribuição Normal

A curva tem a forma de um sino e é simétrica



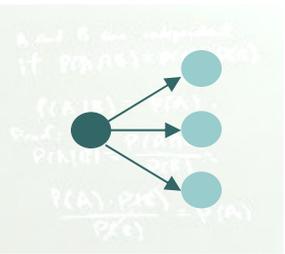
$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



# Distribuição Normal

- Quando uma distribuição é contínua, o gráfico de distribuição é uma linha contínua
- Não se visualiza as barras de um histograma, mas freqüências de ocorrências de cada valor de  $x$  em intervalos infinitesimais
- Forma uma Curva de Densidade de Probabilidade (função *pdf* – *Probability Density Function*)





# Função Densidade da Distribuição Normal

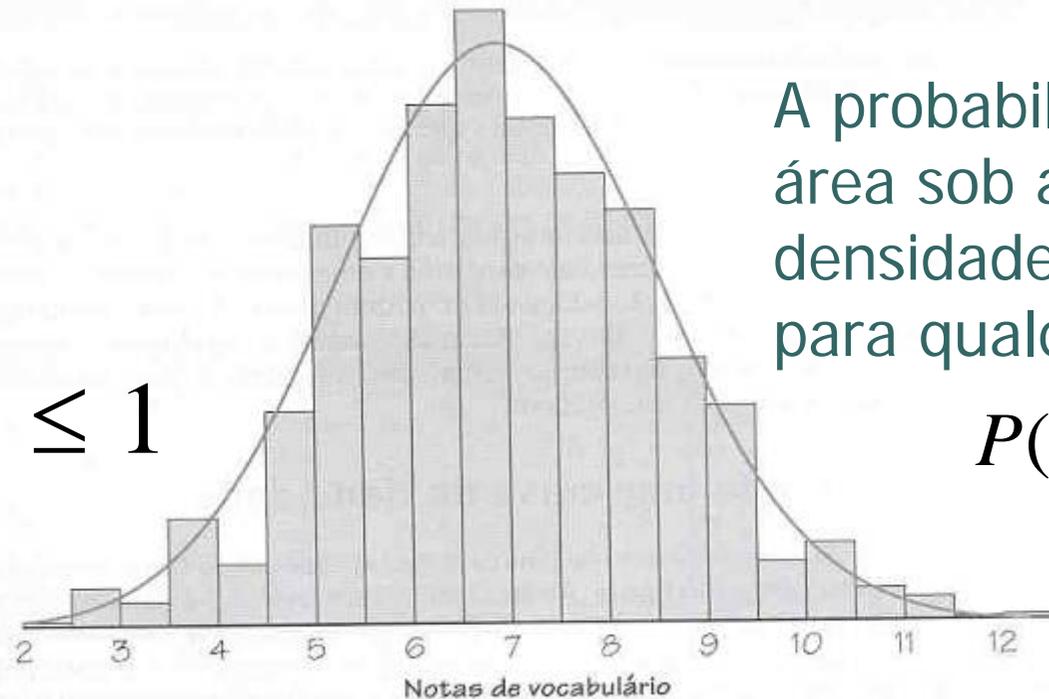
A função densidade da normal (e de qualquer outra variável aleatória contínua) pode ser compreendida como uma extensão natural de um histograma

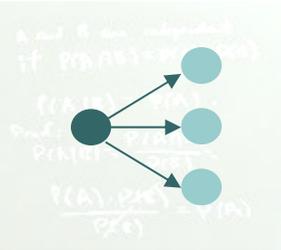
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$$

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

A probabilidade é a área sob a curva de densidade. Portanto, para qualquer  $P(x)$ :

$$P(x) \geq 0$$



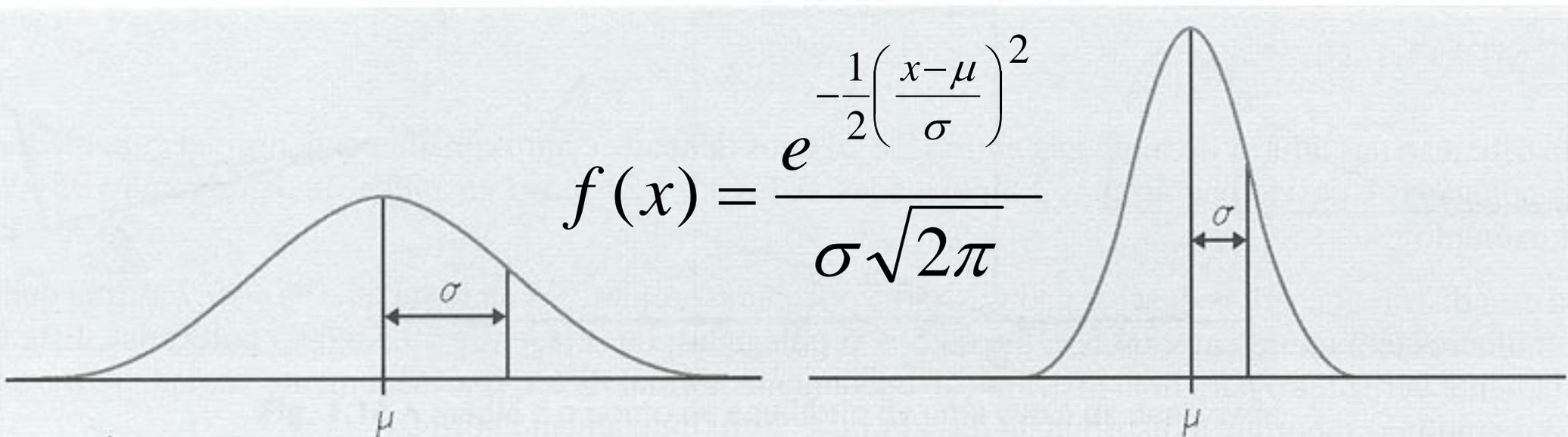


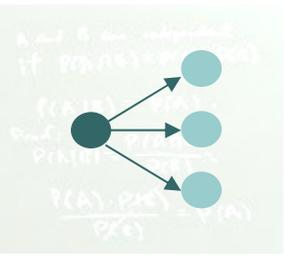
# Distribuição Normal

Note que a distribuição normal é especificada por dois parâmetros:

$\mu$  representa a média populacional, e

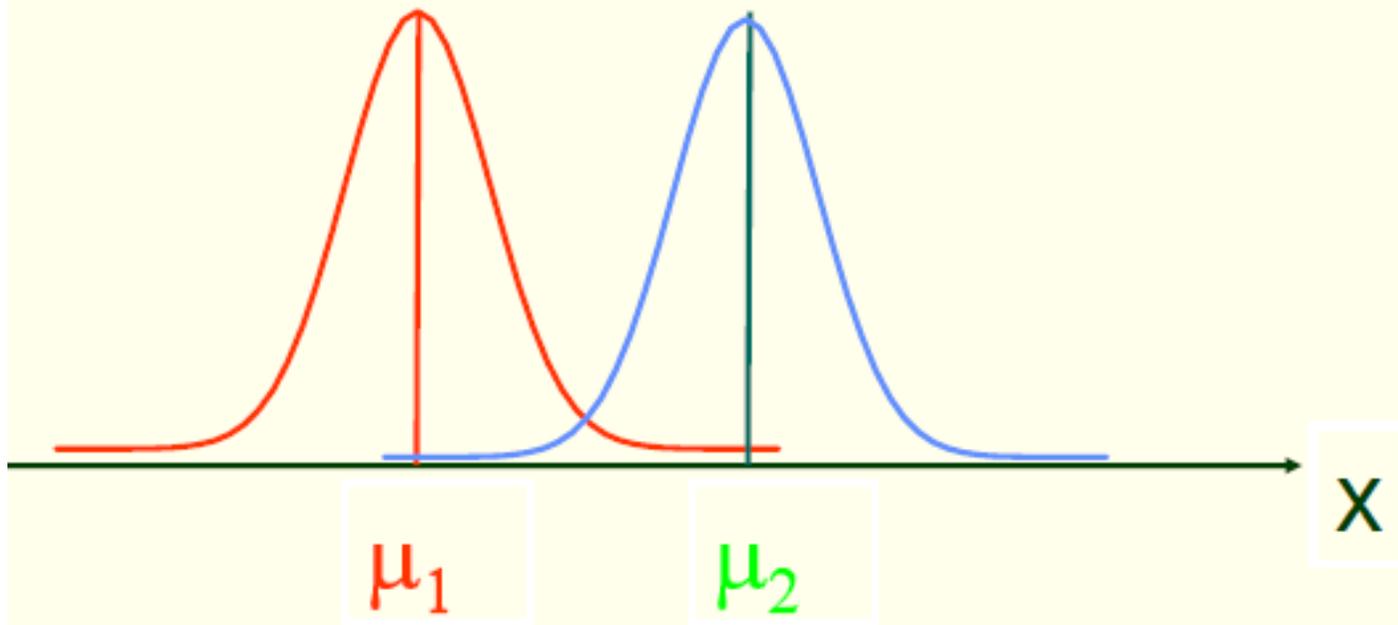
$\sigma$  representa o desvio-padrão populacional

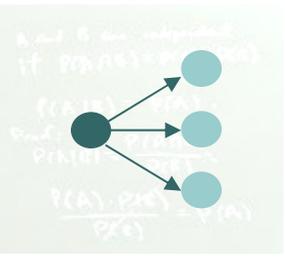




# *Média e Desvio Padrão*

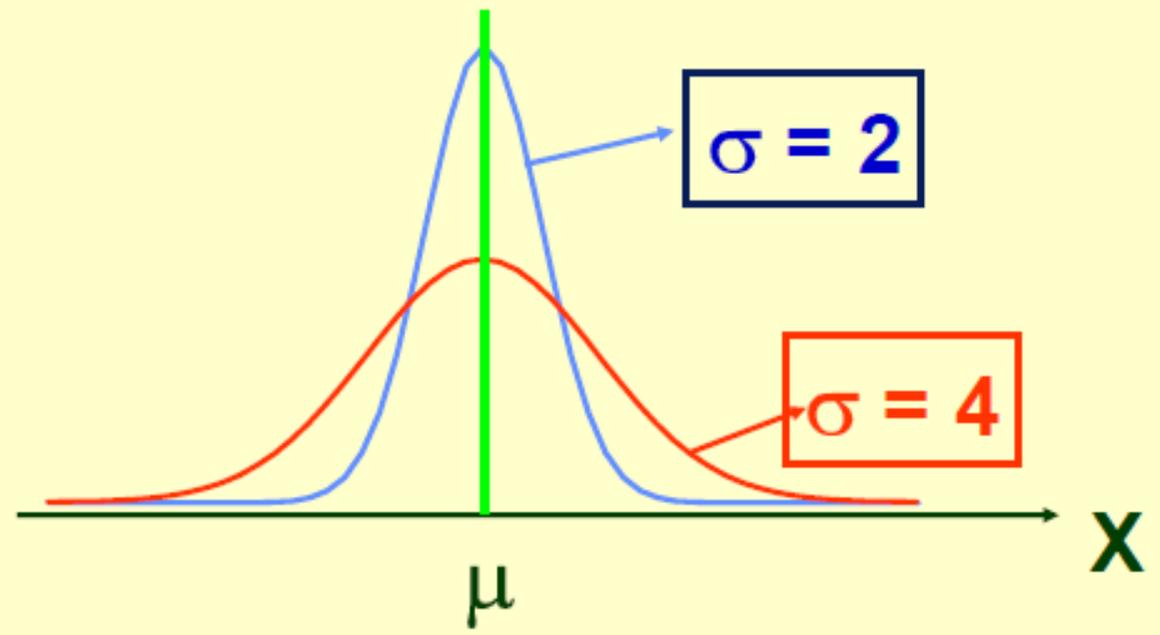
mesmo  $\sigma$  e diferentes  $\mu$

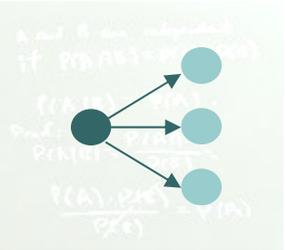




# Média e Desvio Padrão

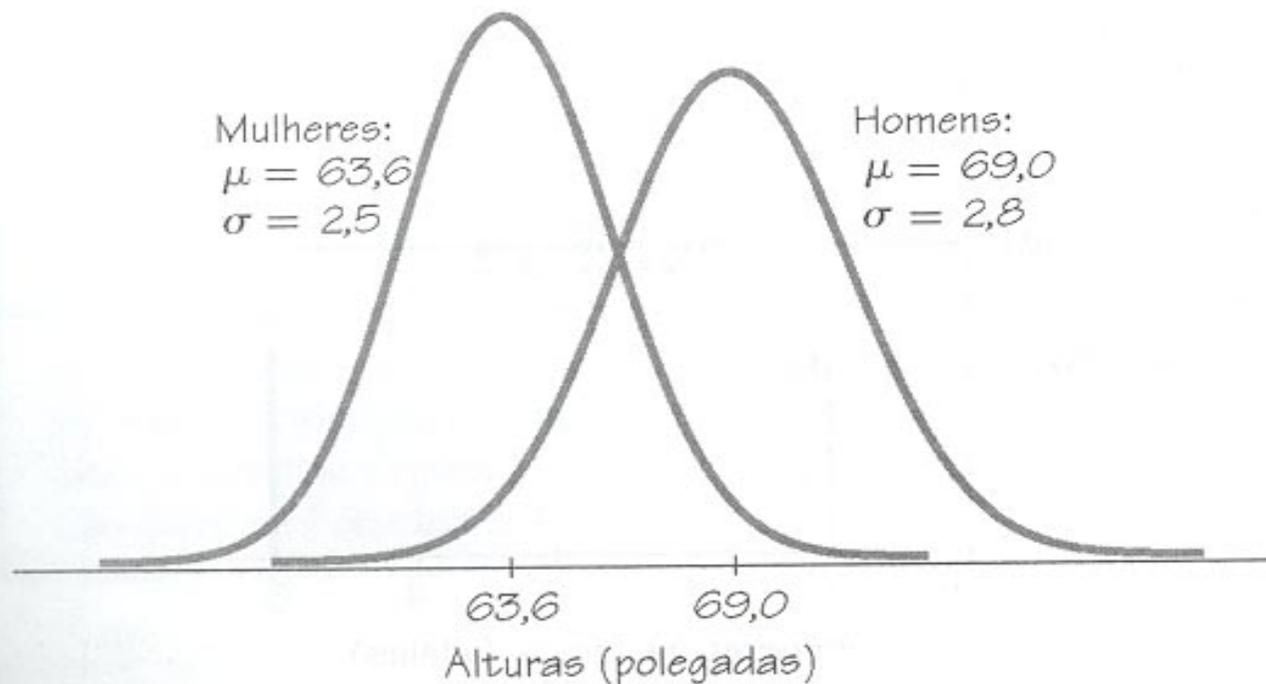
mesmo  $\mu$  e diferentes  $\sigma$

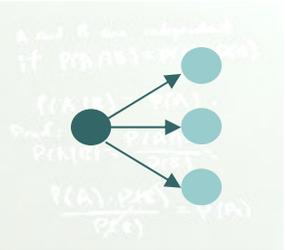




# Distribuição Normal Padronizada

- Cada par de parâmetros ( $\mu$ ,  $\sigma$ ) define uma distribuição normal distinta!
- A figura mostra as curvas de densidade para alturas de mulheres e homens adultos nos EUA





# Distribuição Normal Padronizada

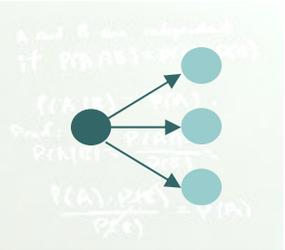
- A distribuição normal padronizada tem média e desvio padrão iguais a:

$$\mu = 0$$

$$\sigma = 1$$

- A distribuição normal padronizada facilita os cálculos de probabilidade, evitando o uso da fórmula e projetando qualquer análise mediante utilização de ESCORES (Z)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

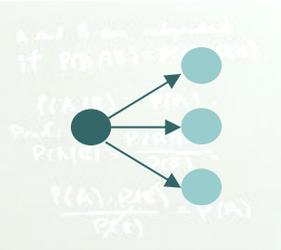


# Distribuição Normal Padronizada

- Se  $x$  é uma observação de uma distribuição que tem média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , o valor padronizado de  $x$  é

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Note que o valor padronizado representa o número de desvios-padrão pelo qual um valor  $x$  dista da média (*para mais ou para menos*)

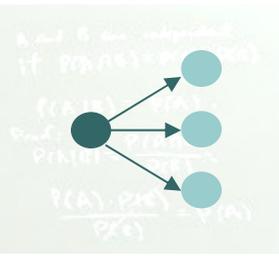


# Distribuição Normal Padronizada

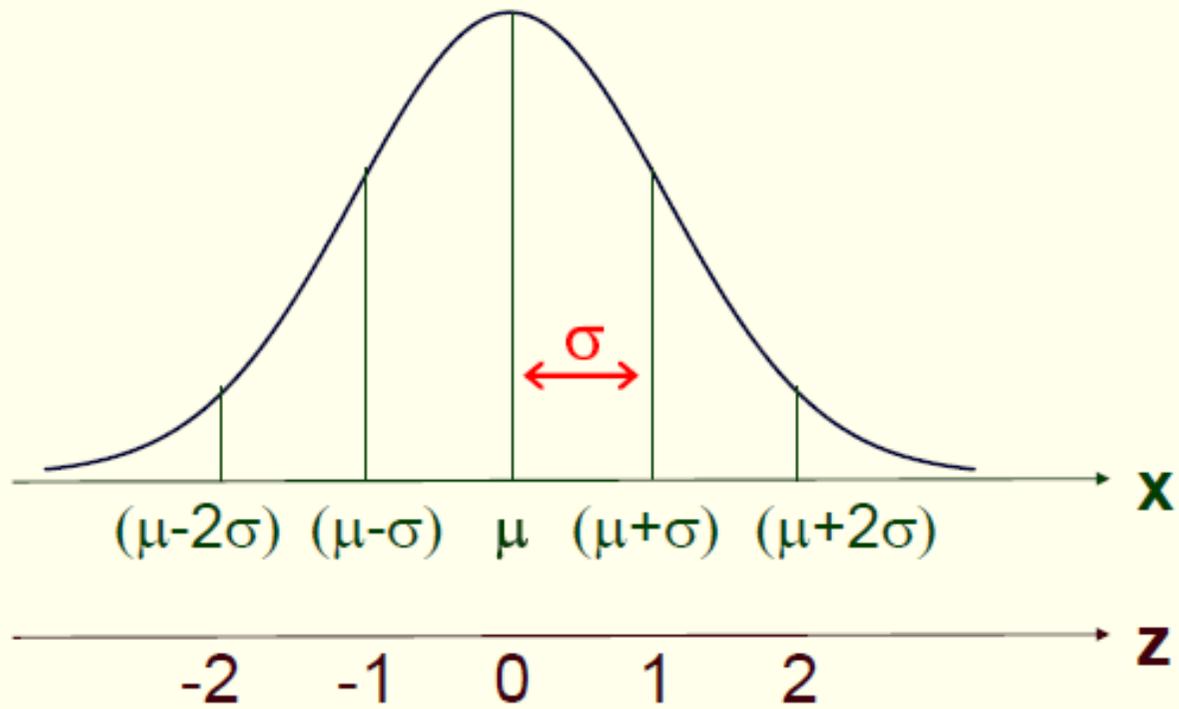
- Ou seja, como a distribuição normal padronizada é aquela que tem média 0 e desvio-padrão 1, ou seja  $N(0, 1)$
- Se uma variável aleatória  $x$  tem distribuição normal qualquer  $N(\mu, \sigma)$ , então a variável padronizada

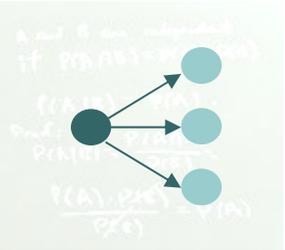
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

tem distribuição normal



# Normal Padronizada





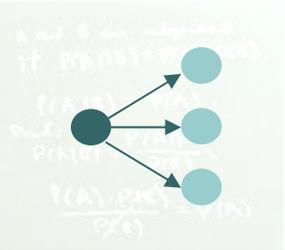
# Exemplo

- Um professor de cálculo aplica dois testes diferentes a duas turmas do seu curso. Os resultados foram:

Turma 1:      média = 75      desvio = 14

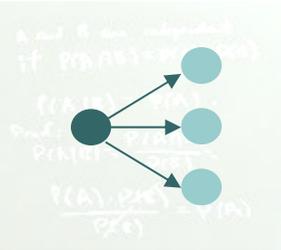
Turma 2:      média = 40      desvio = 8

- Que nota é relativamente melhor: 82 na turma 1, ou 46 na turma 2?



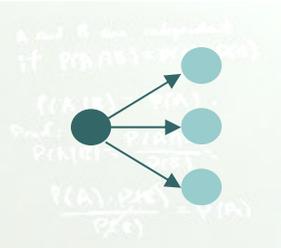
# Distribuição Normal Padronizada

- A estimativa de probabilidades associadas a variáveis aleatórias contínuas envolve o cálculo de áreas sob a curva da densidade.
- O uso da distribuição normal padronizada nos permite calcular áreas sob a curva de uma distribuição normal qualquer, pois as áreas associadas com a normal padronizadas são tabeladas.
- A Tabela A-2 será usada para os cálculos de probabilidade envolvendo distribuições normais.



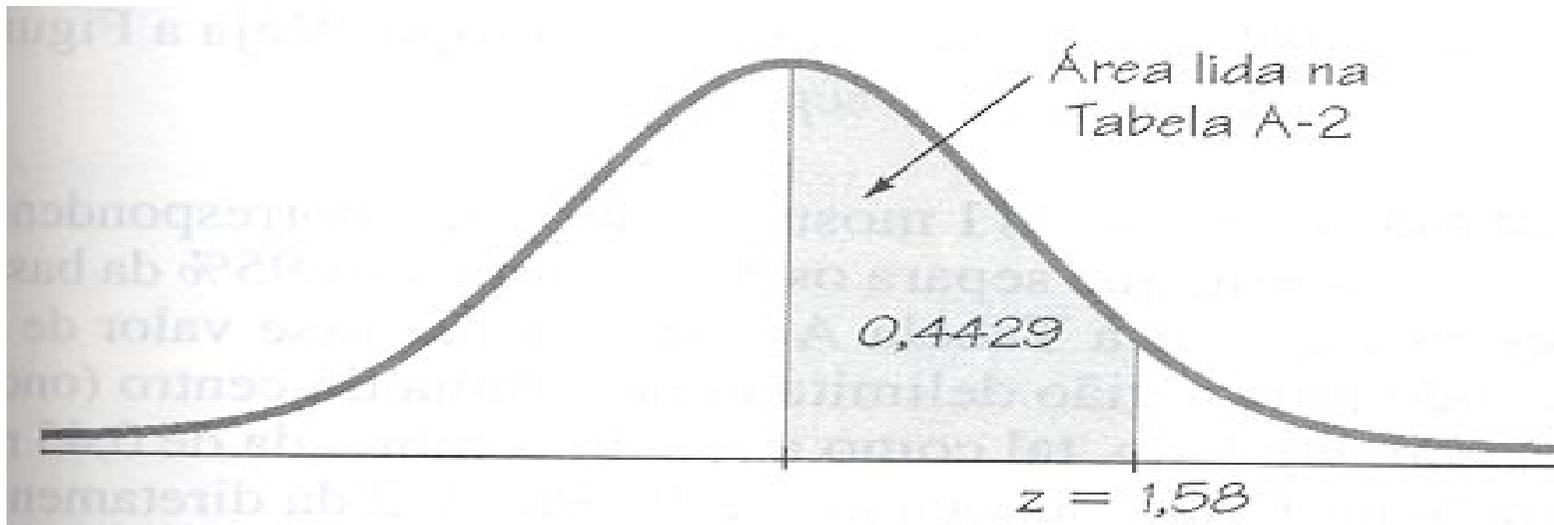
# Exemplo

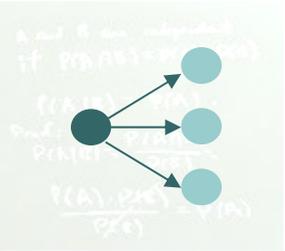
- Uma empresa fabrica termômetros que devem acusar a leitura de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  no ponto de congelamento da água. Testes feitos em uma grande amostra desses termômetros revelaram que alguns acusavam valores inferiores a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  e alguns acusavam valores superiores.
- Supondo que a leitura média seja  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  e que o desvio-padrão das leituras seja  $1,00\text{ }^{\circ}\text{C}$ , qual a probabilidade de que, no ponto de congelamento, um termômetro escolhido aleatoriamente marque entre  $0$  e  $1,58\text{ }^{\circ}\text{C}$  ?
- Admita que a frequência de erros se assemelhe a uma distribuição normal.



# Exemplo

- A distribuição de probabilidade das leituras é uma normal padronizada porque as leituras têm  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ .
- A área da região sombreada, delimitada pela média 0 e pelo número positivo  $z$ , pode ser lida na Tabela A-2

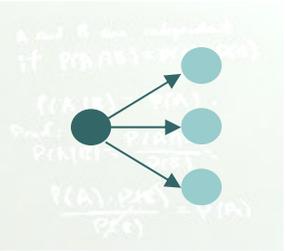




# Distribuição Normal Padronizada

## EXEMPLO

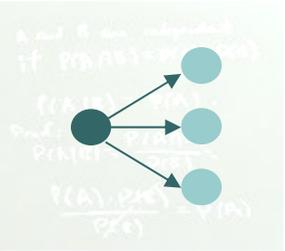
- Portanto, a probabilidade de se escolher aleatoriamente um termômetro com erro entre 0 e 1,58 °C é 44,29 %
- Outra maneira de interpretar este resultado é concluir que 44,29% dos termômetros terão erros entre 0 e 1,58 °C



# Distribuição Normal Padronizada

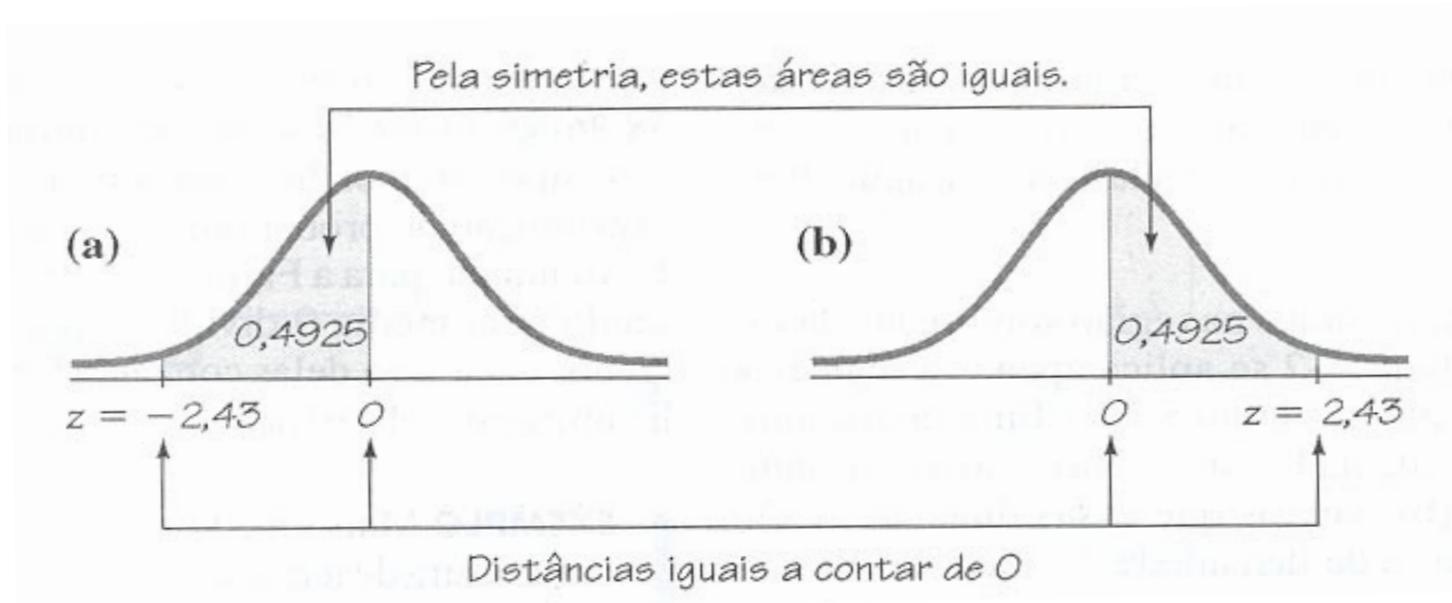
## EXEMPLO

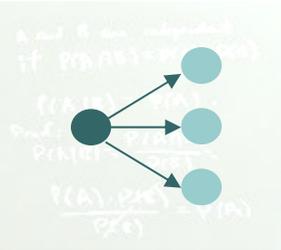
Com os termômetros do exemplo anterior, determine a probabilidade de se selecionar aleatoriamente um termômetro que acuse (*no ponto de congelamento da água*), uma leitura entre  $-2,43\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?



# Distribuição Normal Padronizada

- Estamos interessados na região sombreada da Figura (a), mas a Tabela A-2 se aplica apenas a regiões à direita da média (0), como a da Figura (b)
- Podemos ver que ambas as áreas são idênticas porque a curva de densidade é simétrica !



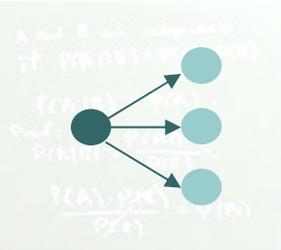


# Distribuição Normal Padronizada

## EXEMPLO

Portanto, a probabilidade de se escolher aleatoriamente um termômetro com erro entre  $-2,43^{\circ}\text{C}$  e  $0^{\circ}\text{C}$  é  $49,25\%$

Em outras palavras,  $49,25\%$  dos termômetros terão erros entre  $-2,43^{\circ}\text{C}$  e  $0^{\circ}\text{C}$

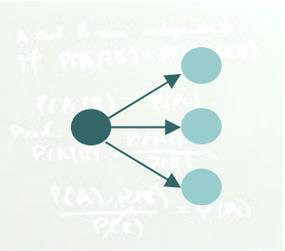


# Distribuição Normal Padronizada

## EXEMPLO

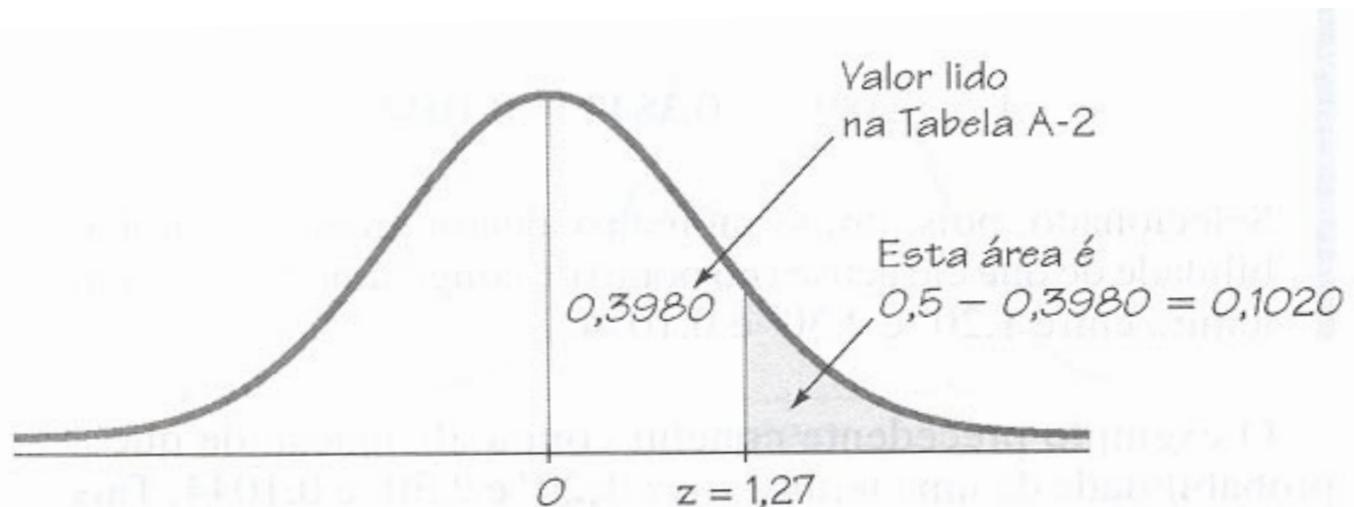
Mais uma vez, faremos uma escolha aleatória da mesma amostra de termômetros.

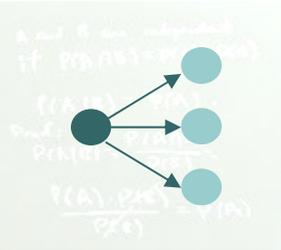
Qual a probabilidade de que o termômetro escolhido acuse (*no ponto de congelamento da água*), uma leitura superior a  $+1,27\text{ }^{\circ}\text{C}$  ?



# Distribuição Normal Padronizada

- A probabilidade de escolher um termômetro que acuse leitura superior a  $1,27\text{ }^{\circ}\text{C}$  corresponde à área sombreada da figura
- Se a área total sob a curva da densidade é igual a 1, a área à direita de zero vale metade, isto é, 0,5. Assim, podemos calcular facilmente a área sombreada !

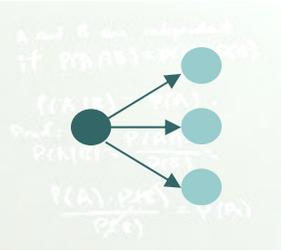




# Distribuição Normal Padronizada

## EXEMPLO

- Podemos concluir que há uma probabilidade de 10,20% de escolher aleatoriamente um termômetro com leitura superior a  $+1,27 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- Podemos dizer, ainda, que, em um grande lote de termômetros escolhidos aleatoriamente e testados, 10,20% deles acusarão leitura superior a  $+1,27 \text{ }^\circ\text{C}$



# Distribuição Normal Padronizada

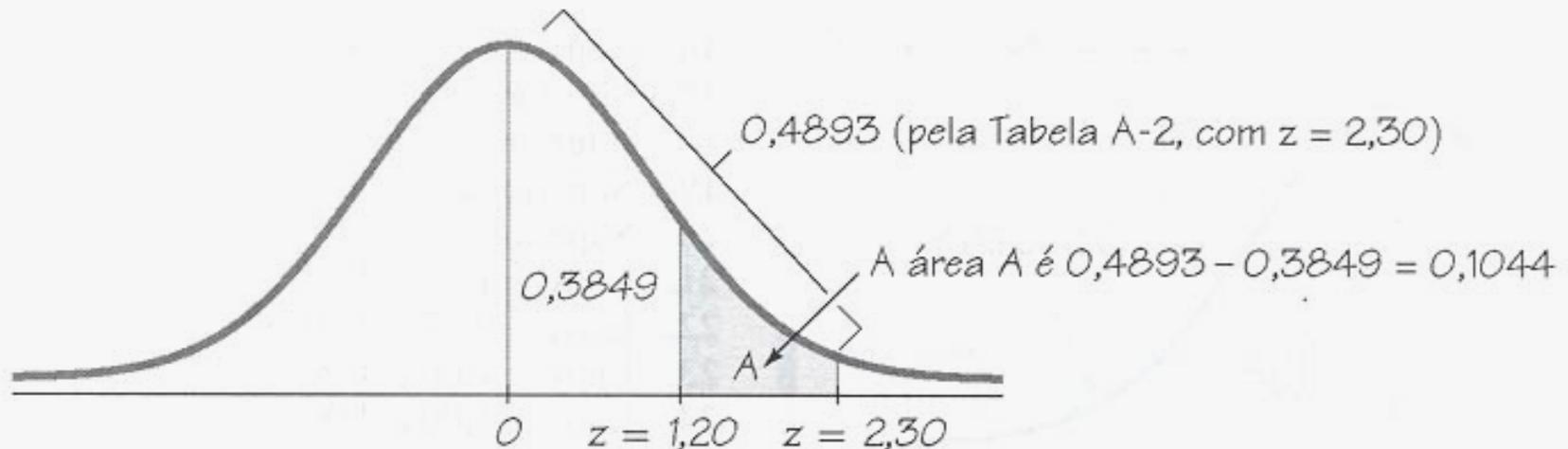
## EXEMPLO

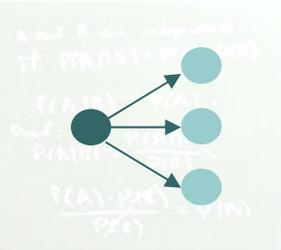
De novo, faremos uma escolha aleatória da mesma amostra de termômetros.

Qual a probabilidade de que o termômetro escolhido acuse (*no ponto de congelamento da água*), uma leitura entre 1,20 e 2,30 °C ?

# Distribuição Normal Padronizada

- A probabilidade de escolher um termômetro que acuse leitura entre 1,20 e 2,30 °C corresponde à área sombreada da figura
- É fácil perceber que podemos calcular esta área, subtraindo-se a área de 0 até o maior valor (2,30), da área de 0 até o menor valor (1,20), que são lidas na Tabela A-2 !





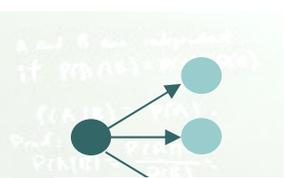
# Distribuição Normal Padronizada

Dos exemplos anteriores, podemos expressar as probabilidades calculadas com a notação seguinte:

$P(a < z < b)$  denota a probabilidade de o valor de  $z$  estar entre  $a$  e  $b$

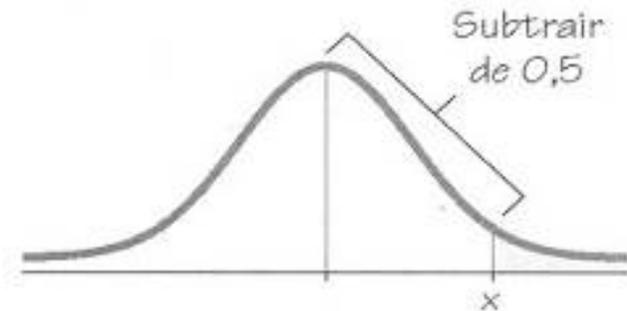
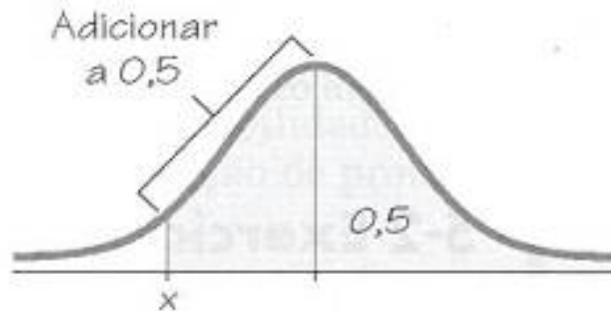
$P(z > a)$  denota a probabilidade de o valor de  $z$  ser maior do que  $a$

$P(z < a)$  denota a probabilidade de o valor de  $z$  ser menor do que  $a$

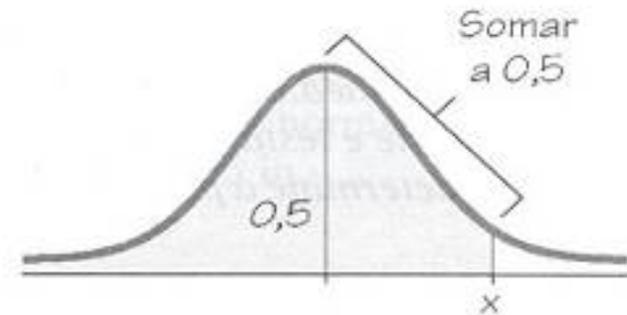
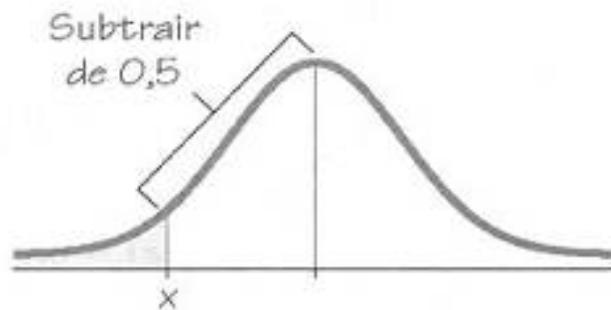


As figuras abaixo ajudam na interpretação das expressões mais comuns no cálculo de probabilidades:

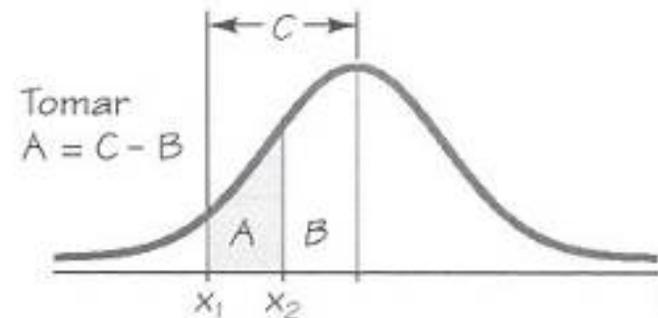
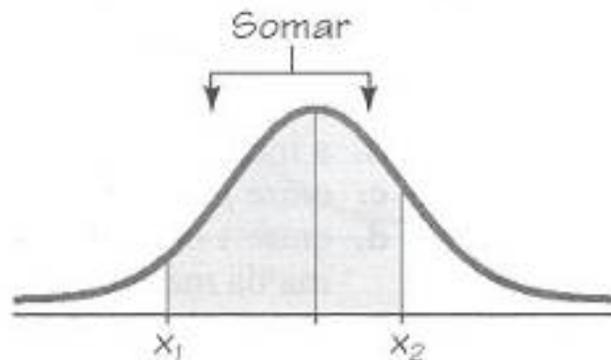
“maior do que  $x$ ”  
“pelo menos  $x$ ”  
“mais do que  $x$ ”  
“não menos do que  $x$ ”

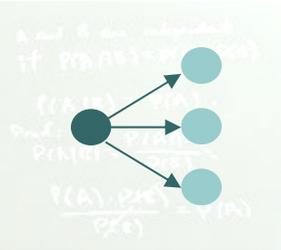


“menos do que  $x$ ”  
“no máximo  $x$ ”  
“não mais do que  $x$ ”  
“não maior do que  $x$ ”



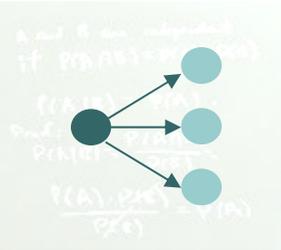
“entre  $x_1$  e  $x_2$ ”





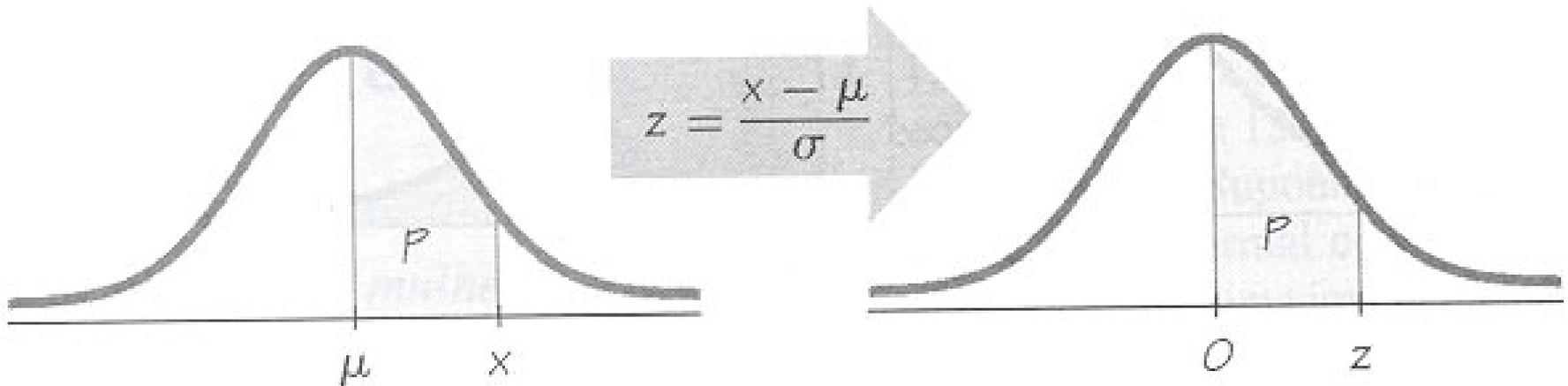
# Distribuição Normal Não Padronizada

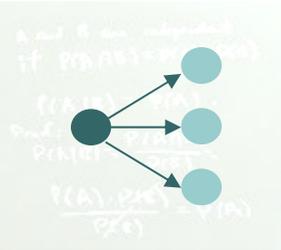
- Os exemplos feitos com o termômetro não são muito realistas porque a maioria das populações distribuídas normalmente têm média diferente de 0, desvio diferente de 1, ou ambos.
- Como proceder, então, para calcular probabilidades de distribuições normais não-padronizadas ?



# Distribuição Normal Não Padronizada

A idéia é utilizar a fórmula dos valores padronizados e *TRANSFORMAR* qualquer distribuição normal dada na normal padronizada, como mostrado abaixo.



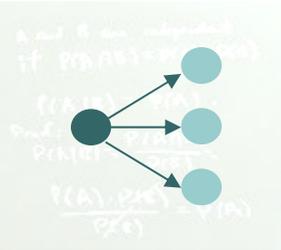


# Distribuição Normal Não Padronizada

## EXEMPLO

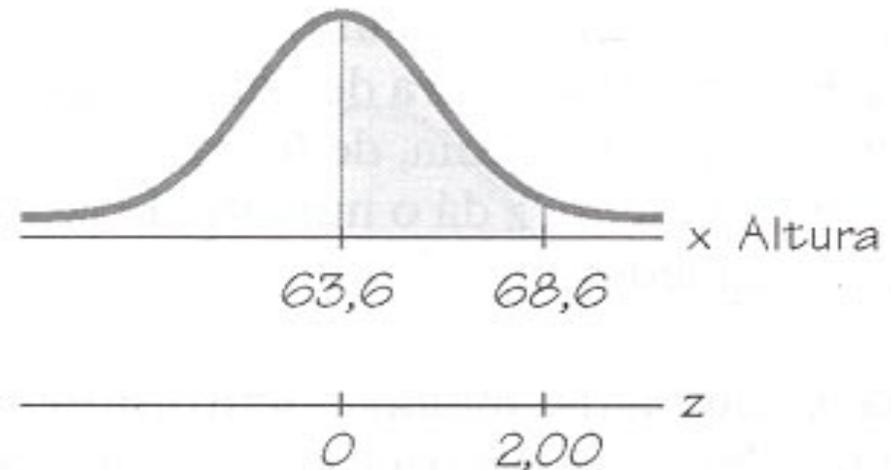
As alturas das mulheres americanas segue uma distribuição normal com média de 63,6" e desvio-padrão de 2,5".

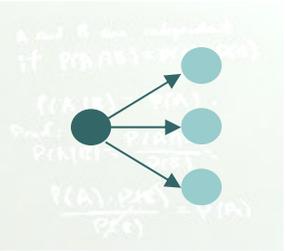
Selecionada uma mulher americana ao acaso, qual a probabilidade da sua altura estar entre 63,6 e 68,6 polegadas ?



# Distribuição Normal Não Padronizada

- Devemos proceder da maneira descrita a seguir:
  - Trace uma curva normal, assinale a média e outros valores de interesse, e sombreie a região que representa a probabilidade desejada
  - Para cada valor  $x$  da fronteira da região sombreada, aplique a fórmula para achar o valor padronizado  $z$
  - Utilize a Tabela A-2 para achar a área da região sombreada

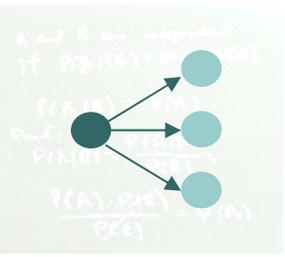




# Distribuição Normal Não Padronizada

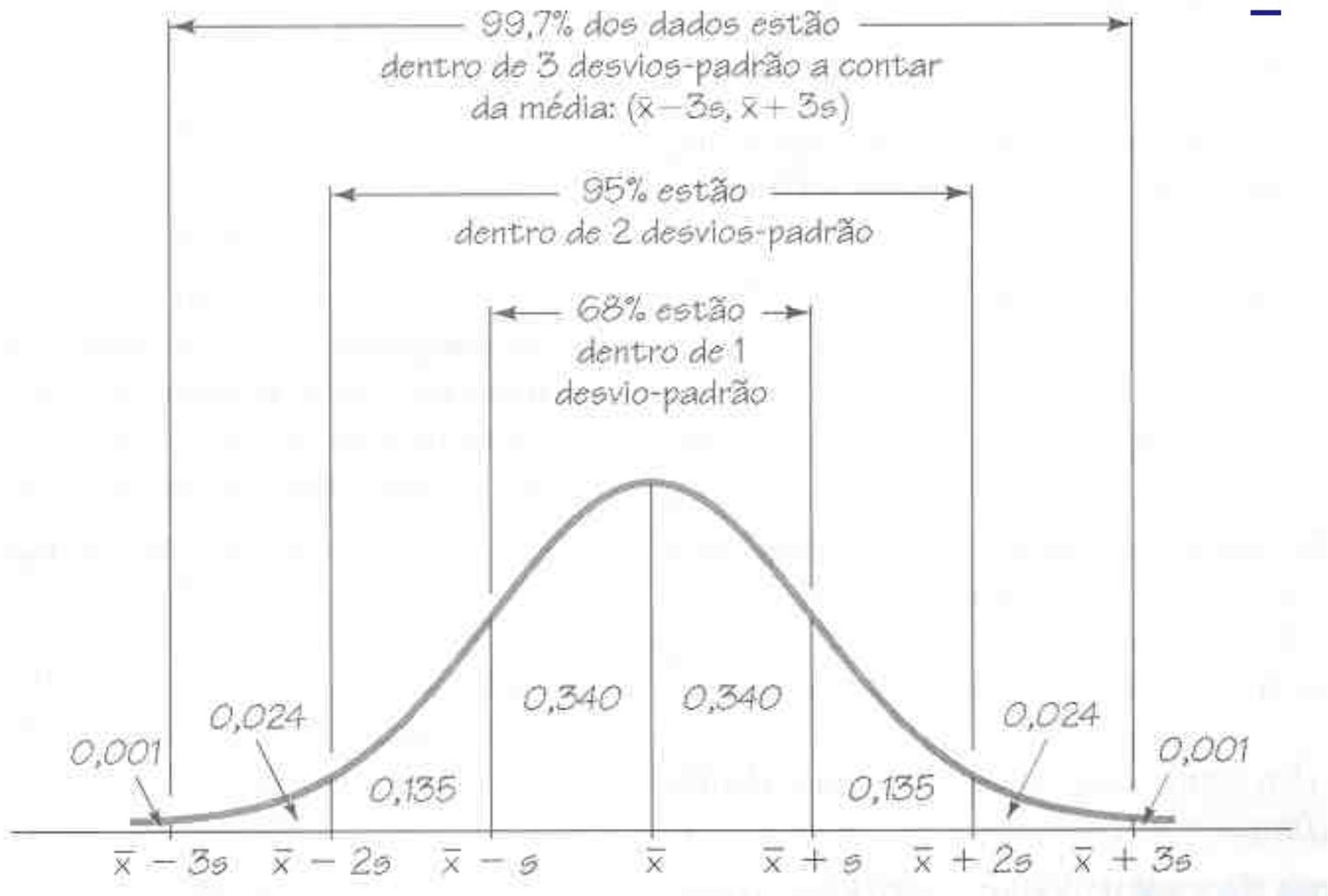
## EXEMPLO

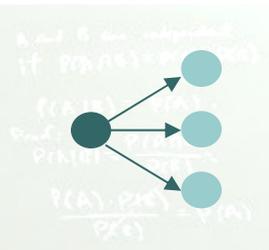
- Há, portanto, uma probabilidade de 0,4772 de escolher uma mulher com altura entre 63,6 pol. e 68,6 pol. Usando a notação, teríamos:
  - $P(63,6 < x < 68,6) = P(0 < z < 2,00) = 47,72\%$
- Outra forma de interpretar este resultado consiste em concluir que 47,72% das mulheres americanas têm altura entre 63,6 pol. e 68,6 pol.



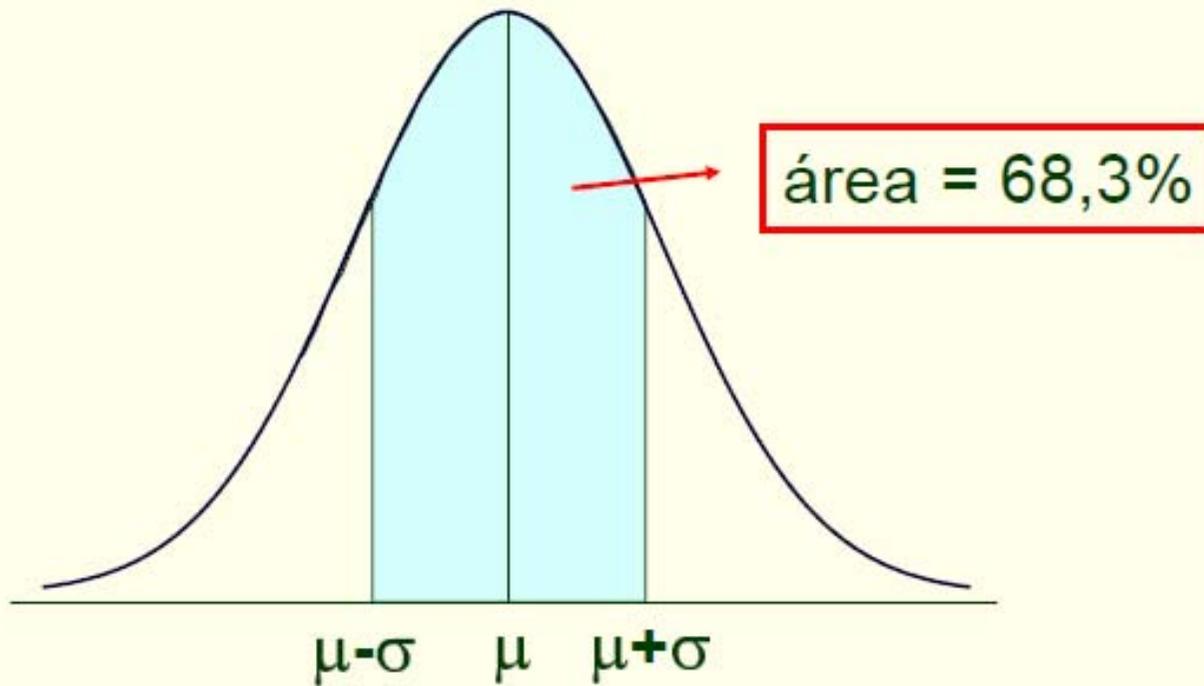
# Regra 68-95-99,7

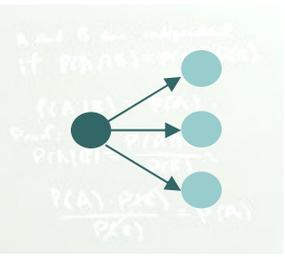
Numa distribuição normal  $N(\mu, \sigma)$  ou  $N(x, s)$



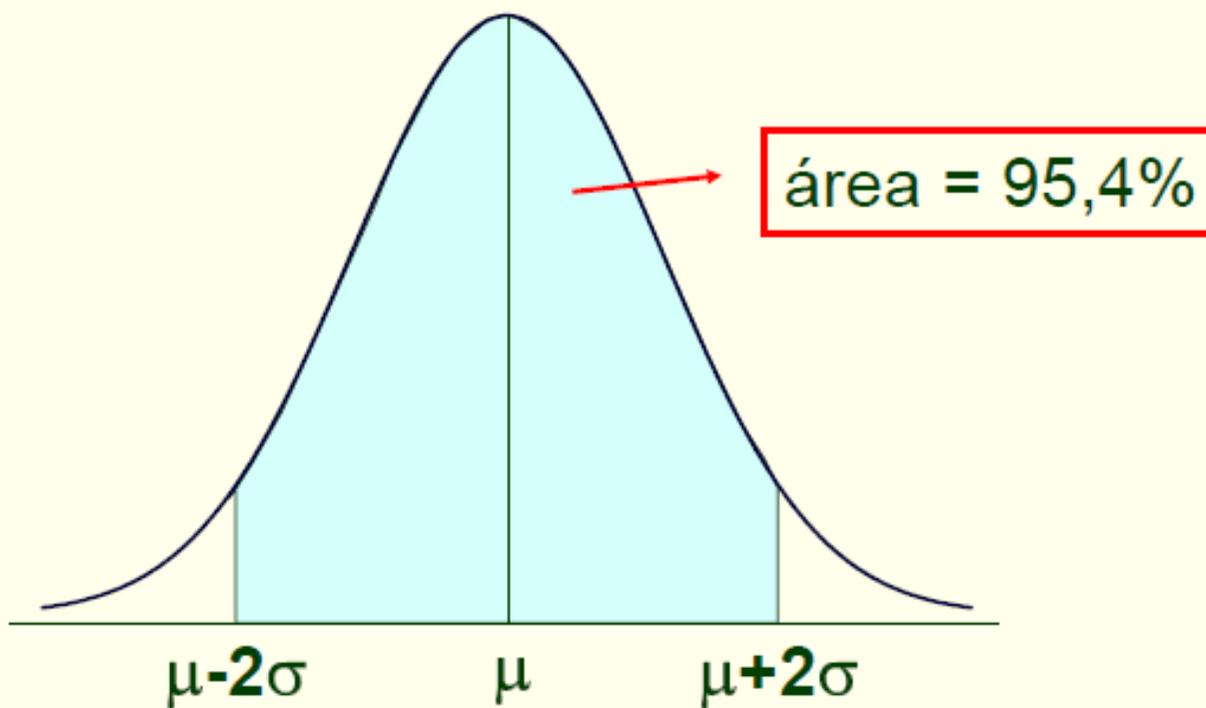


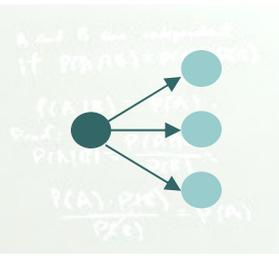
# Exemplo





# Exemplo





# Exemplo

