Probabilidade

Multiplicação e Teorema de Bayes

Regra da Multiplicação

- Num teste, são aplicadas 2 questões de múltipla escolha. Na primeira questão, as respostas possíveis são V ou F. Na segunda, a, b, c, d ou e. Se um aluno decidir "chutar" a respostas, quantas alternativas terá?
  - 1o passo: 2 alternativas => *m*
  - 2o passo: 5 alternativas => *n*
  - Alternativas possíveis: *m* x *n* = 2 x 5 = 10 alternativas de respostas diferentes.
- Considerando a probabilidade de acertar ambas questões:
  - Somente uma alternativa, dentre as 10 possibilidades de respostas diferentes para a prova, equivale a acertar 100% da prova.
  - P(acerto) = 1/10 = 0,1

Regra da Multiplicação

- Considerando as respostas individualmente:
  - P(acerto na 1o questão) = ½
  - P(acerto na 2o questão) = 1/5
  - Como ½ x 1/5 = 1/10...
  - Verificamos que:

P(acerto 1º e acerto 2º) = P (acerto 1º) x P(acerto 2º)

Contudo, nem sempre as relações entre os experimentos A e B acontecem de forma *independente*.

Regra da Multiplicação

- O interesse agora é estimar a probabilidade de dois eventos ocorrerem em passos distintos.
- A palavra-chave aqui é a conjunção "***E***"
  - P (A e B) = P (ocorrência de A e de B)
- Exemplo: sair duas faces ímpares no arremesso de dois dados (J e K)

P (J ímpar <u>e</u> K ímpar) = P (J ímpar) x P (K ímpar)

Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 peças, das quais 6 são defeituosas. Se escolhermos duas peças aleatoriamente, qual a probabilidade de ambas serem boas?

P (1° peça boa *E* 2° peça boa) = ???

Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 peças, das quais 6 são defeituosas. Se escolhermos duas peças aleatoriamente, qual a probabilidade de ambas serem boas?

P (1° peça boa *E* 2° peça boa) = ???

P(1º peça boa) = 44/50 = 0,88

P(2º peça boa) = 43/49 = 0,8775

Regra da Multiplicação: 2 passos → 0,88*0,8775 = **0,7722**

Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 transistores, dos quais 6 são defeituosos. Se realizarmos duas retiradas de peças aleatoriamente e em seqüência, **com reposição** – considerar que o transistor da primeira retirada é reposto ao lote antes da segunda retirada – qual a probabilidade de ambas serem boas?

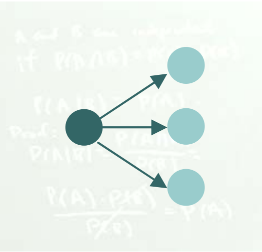
Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 transistores, dos quais 6 são defeituosos. Se realizarmos duas retiradas de peças aleatoriamente e em seqüência, **com reposição** – considerar que o transistor da primeira retirada é reposto ao lote antes da segunda retirada – qual a probabilidade de ambas serem boas?

P(1º transistor bom) = 44/50 = 0,88

P(2º transistor bom) = 44/50 = 0,88

Regra Multiplicação: 2 passos → 0,88*0,88 = 0,7744



Conclusões

- Que tipo de cuidado devemos tomar ao aplicarmos esta regra para fazer o cálculo?
  - Identificar se o experimento seguinte “B” é DEPENDENTE da ocorrência do evento “A”.
- Pela Notação:
  - se $P(B \mid A) \neq P(B)$
  - Lê-se: $P(B \mid A)$ → Probabilidade de B tal que A tenha ocorrido (ou *dado* que A tenha ocorrido)
- Portanto, a Regra da Multiplicação é:
  - $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B \mid A)$

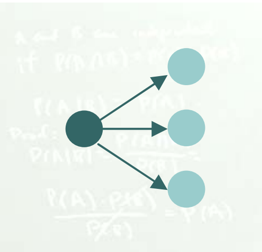
Exemplo 3

- Retirando duas cartas de um baralho (52 cartas), determine a probabilidade de que na primeira carta seja um Ás e a segunda um Rei, considerando:
  - Com reposição
  - Sem reposição

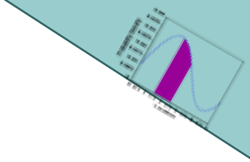
Exemplo 3

- Retirando duas cartas de um baralho (52 cartas), determine a probabilidade de que na primeira carta seja um Ás e a segunda um Rei, considerando:
  - Com reposição
  - Sem reposição

Com reposição	**Sem reposição**
P(ás) = 4/52	**P(ás) = 4/52**
P(Rei) = 4/52	**P(Rei) = 4/51**
4/52*4/52 = 0,0059	**4/52*4/51 = 0,0060**



Eventos Independentes



- Nos exemplos anteriores, ilustra-se o princípio de que a probabilidade do evento B é DEPENDENTE do fato do evento A já ter ocorrido. Com base nesta relação, podemos diferenciar EVENTOS DEPENDENTES e INDEPENDENTES.
- Dois eventos A e B são independentes se a ocorrência de um deles NÃO afeta a probabilidade de ocorrência do outro.

Eventos Independentes: Tratamento

<u>REGRA INTUITIVA</u>

- Multiplicamos a probabilidade de ocorrência de A pela probabilidade de ocorrência de B, que deve ser calculada considerando a ocorrência prévia de A

<u>REGRA FORMAL</u>

- P (A e B) = P(A) x P(B) → Somente se A e B são independentes
- P (A e B) = P(A) x P(B|A) → **Regra da Multiplicação**

Comentário 1

- As mesmas regras podem ser aplicadas em mais de dois eventos (3 ou mais)
  - Probabilidade de obtermos 3 ases em 3 extrações de cartas de baralho, sem reposição
    - P(3 ases) = 4/52 x 3/51 x 2/50 = 0,000181

Comentário 2

- Em casos onde são extraídas amostras de grandes populações, os resultados de eventos dependentes e independentes se aproximam e assim podem ser considerados independentes
  - Ex.: pesquisa eleitoral

Probabilidade Condicional

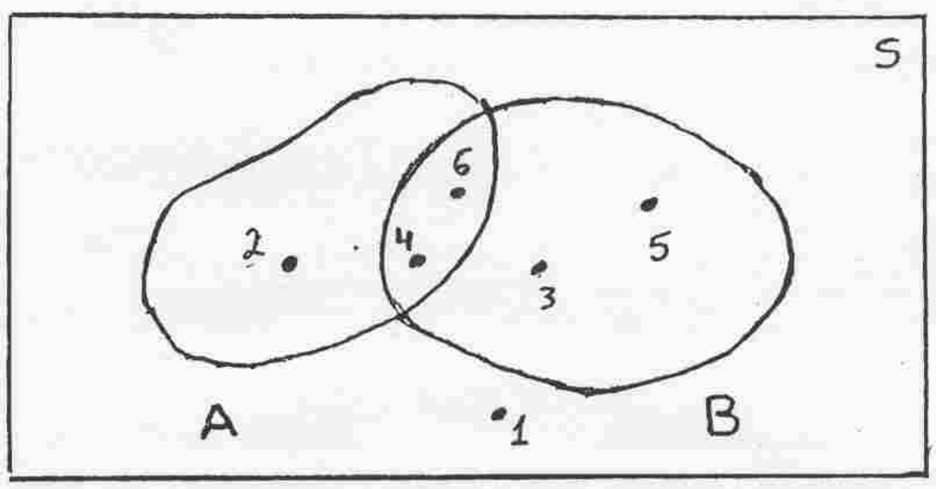
- Em eventos dependentes:
  - P(A e B) = P(A) * P(B|A)
- P(B|A) → probabilidade de ocorrer B condicionado à ocorrência anterior de A. Assim, a probabilidade de P(B|A) pode ser definida como:

$$P(B|A) = P(A \text{ e } B) \;/\; P(A)$$

A probabilidade condicional de B *dado* A é a probabilidade de ocorrência do evento B, sabendo que o evento A já ocorreu.

Probabilidade Condicional

- Na realidade, através da probabilidade condicional, delimitamos o espaço amostral de ocorrência de um evento que depende de outro.
- Seja este exemplo: qual a probabilidade de, na jogada de um dado, sair um número par, *dado* que o resultado é maior que 2?



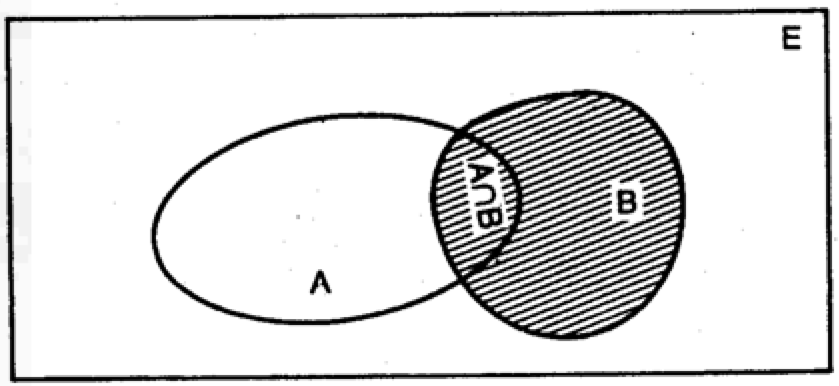
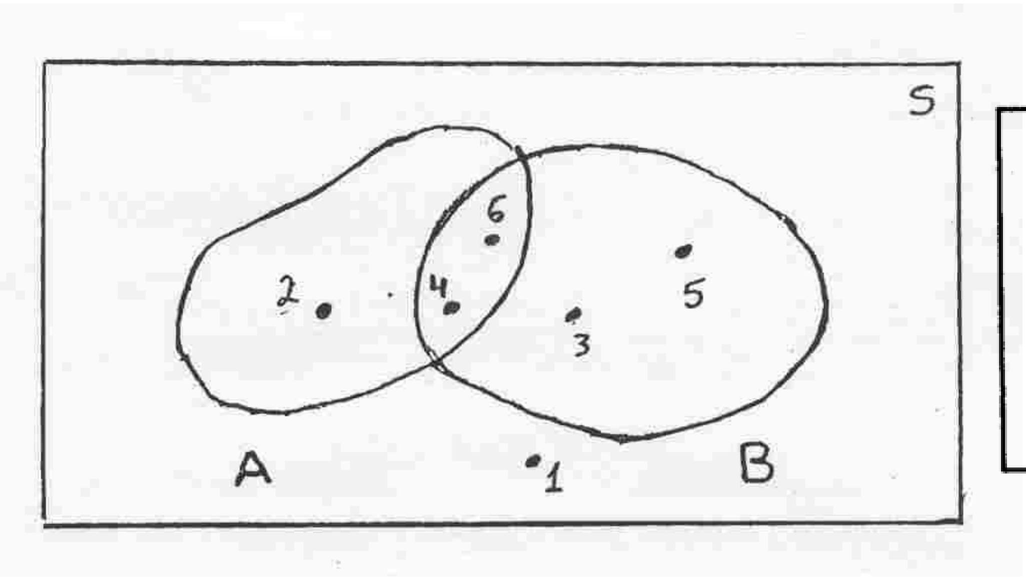


Fig. 4.7 $P(A|B)$.

Probabilidade Condicional

- P(A) = resultado par = 3/6 = 1/2
- P(B) = resultado maior que dois = 2/3
- P(A|B)=P(A e B)/P(B) = (1/2)*(2/3)/(2/3)=1/2



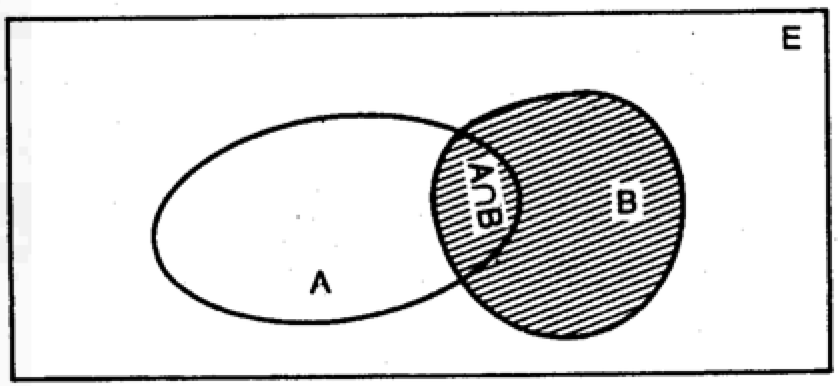
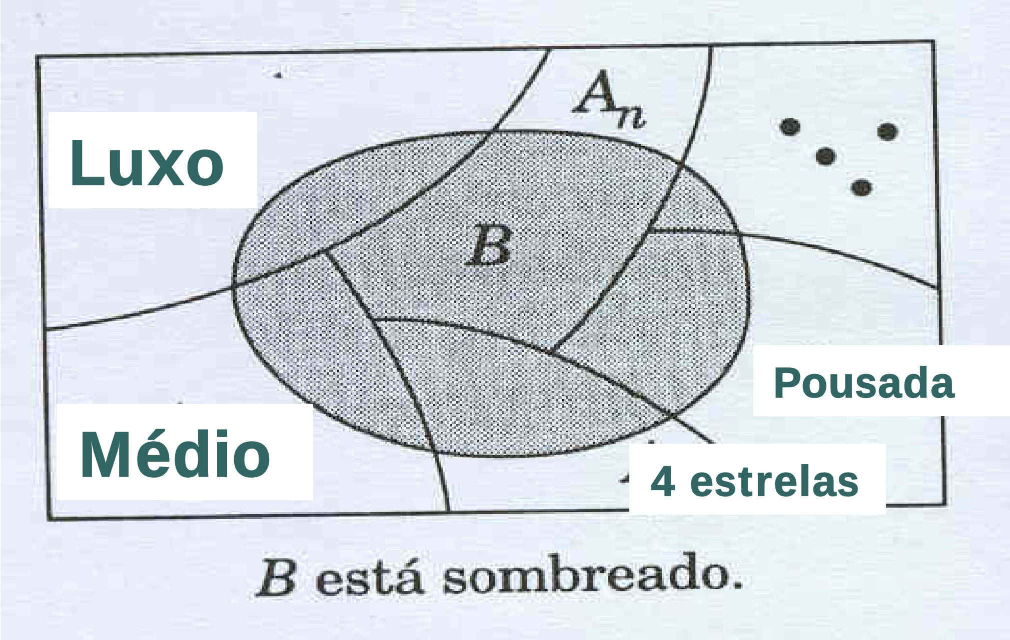


Fig. 4.7 $P(A|B)$.

Exemplo

- Qual a probabilidade de um hotel apresentar uma taxa de ocupação num determinado mês entre 40 e 50%?
  - Esta pergunta abre respostas diversas, já que não delimitamos o tipo de hotel – luxo, médio, pousada, rural, praia,...
- Contudo, se perguntássemos: Qual a probabilidade de um hotel padrão luxo apresentar uma taxa de ocupação num determinado mês entre 40 e 50%?
  - O espaço amostral está delimitado à análise de hotéis de luxo.

Exemplo

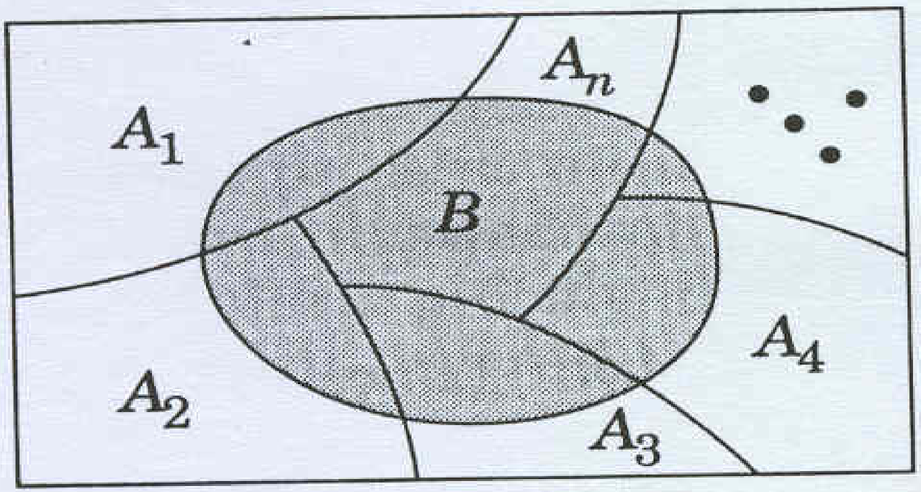


B → Freqüência de Hotéis com taxa de Ocupação ente 40 a 50 %

Probabilidade Condicional

- Teste de Independência
  - Se P(B|A) = P(B)
    - Ocorrência do evento A não influi na probabilidade do evento B
  - Se P(B|A) $\neq$ P(B)
    - Então A e B são eventos dependentes
  - Ou seja:
    - P(A e B) = P(A) . P(B) → independentes
    - P(A e B) $\neq$ P(A) . P(B) → dependentes

Partição de um Espaço Amostral



B está sombreado.

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

Conseqüentemente:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

Partição de um Espaço Amostral

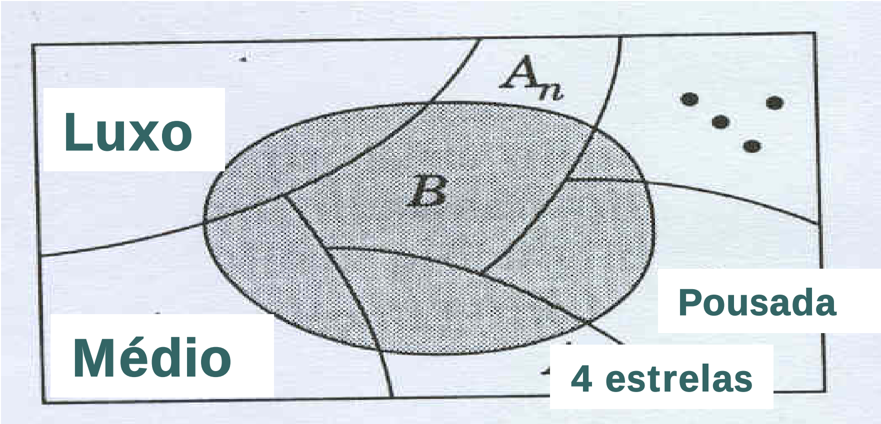
- Assim, pela Regra da Multiplicação, podemos escrever:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$

- Esta afirmação somente é válida quando A e B são eventos mutuamente excludentes

Teorema de Bayes

- **P(B|Ai) ≠ P(Ai|B)**
  - Probabilidade de um hotel ter 40 a 50% de ocupação dado ser de luxo
    - Analisa a probabilidade de um hotel de luxo ter 40 a 50% de ocupação
  - Probabilidade de um hotel ser de luxo entre hotéis que tenham 40 a 50% de ocupação
    - Analisa a probabilidade de um hotel ser de luxo entre todos os hotéis que apresentaram 40 a 50% de ocupação



B está sombreado.

Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) \neq P(B|A_i)$$

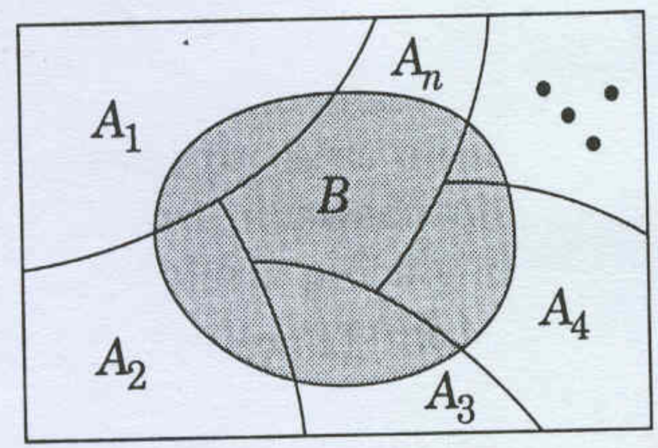
$$\boxed{P(A_1 \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad \text{e} \quad \boxed{P(B \mid A_1) = \frac{P(A \cap B)}{P(A_1)}}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B).P(A_1 \mid B)} \qquad \boxed{P(A \cap B) = P(A_1).P(B \mid A_1)}$$

Portanto: $P(B).P(A_1 \mid B) = P(A_1).P(B \mid A_1)$

$$\boxed{P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1).P(B \mid A_1)}{P(B)}}$$

Mas como muitas vezes não dispomos de P(B),….



B está sombreado.

Podemos usar:
$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$
$$= \sum P(A_i)\, P(B \mid A_i)$$

$$\boxed{P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{\sum P(A_i)\, P(B \mid A_i)}}$$

Este é o famoso Teorema de Bayes

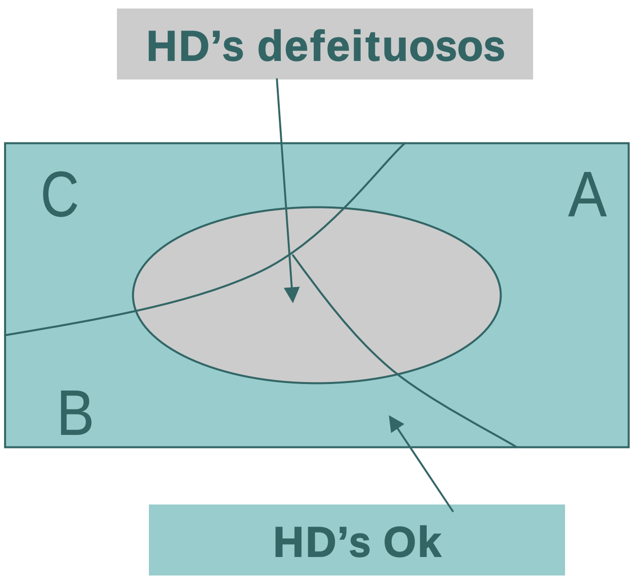
Teorema de Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{\sum P(A_i)\, P(B \mid A_i)}$$

Exemplo

Um fabricante produz HDs em três fábricas (A, B e C), que respondem, respectivamente, por 40%, 35% e 25% de sua produção total.

Registros históricos indicam que 2% da produção de A é defeituosa, assim como 1% da de B, e 3% da fábrica C.

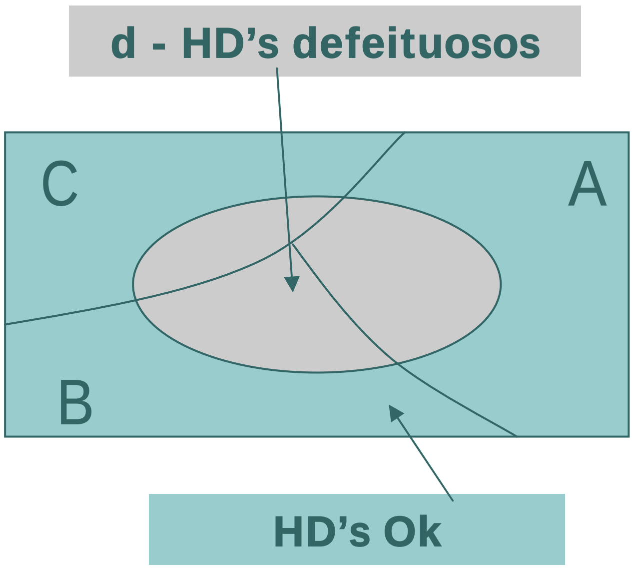


Escolhemos 1 HD aleatoriamente, e ele é defeituoso.

Qual a probabilidade dele ter sido produzido na fábrica B ?

Exemplo

- Chamando *B* o evento “fabricado em B” e *d* o evento “HD defeituoso”, podemos escrever:
- Uma peça defeituosa pode provir de qualquer uma das 3 fábricas (e só de uma!). Logo, eventos mutuamente excludentes.
- Portanto:



$$P(d) = P(A)P(d|A) + P(B)P(d|B) + P(C)P(d|C)$$

$$P(B|d) = \frac{P(B \cap d)}{P(d)} = \frac{P(B)\,P(d|B)}{P(d)}$$

Exemplo

- Assim, de acordo com os valores fornecidos, temos que:

  P(*d*) = (0,40 x 0,02) + (0,35 x 0,01) + (0,25 x 0,03) = 0,019

- E, portanto,

$$P(B|d) = \frac{(0{,}35\,x\,0{,}01)}{(0{,}40\,x\,0{,}02) + (0{,}35\,x\,0{,}01) + (0{,}25\,x\,0{,}03)} = 0{,}184 = 18{,}4\%$$

Método Alternativo

- Construa uma Tabela de Probabilidades

	A	B	C	Totais
Bom	0,392	0,3465	0,2425	0,981
Defeito	0,008	0,0035	0,0075	0,019
Totais	0,40	0,35	0,25	1

P(B|defeito)=0,0035/0,019=0,184

Método Alternativo

	A	B	C	Totais
Bom	0,392	0,3465	0,2425	0,981
Defeito	0,008	0,0035	0,0075	0,019
Totais	0,40	0,35	0,25	1

$P(B|defeito)=0{,}0035/0{,}019=0{,}184$

$P(A)=0{,}40$ $P(defeito|A)=0{,}008/0{,}40 =0{,}02$

$P(B)=0{,}35$ $P(defeito|B)=0{,}0035/0{,}35=0{,}01$

$P(C)=0{,}25$ $P(defeito|C)=0{,}0075/0{,}25=0{,}03$

$P(defeito)=0{,}019$