Probabilidade

Variáveis Aleatórias

Distribuição de Probabilidade

Variáveis Aleatórias

- Variável Aleatória
  - Indica o valor correspondente ao resultado de um experimento
  - A palavra <u>aleatória</u> indica que, em geral, só conhecemos aquele valor depois do experimento ter acontecido
- Notação
  - A VA é geralmente representada por um “X” ou qualquer letra maiúscula
- Possui valor único para cada experimento
  - Valor determinado aleatoriamente
  - O <u>valor</u> que a VA pode assumir geralmente é representado por um “x” ou outra letra minúscula

Variáveis Aleatórias

- Exemplos:
  - Número de alunos que comparecem às aulas de estatística
  - Resultado de uma jogada de um dado
  - Altura de um adulto, homem, selecionado aleatoriamente
  - Um experimento consiste em selecionar aleatoriamente 7 homens de uma turma e contar quantos tem mais que 80kg.
    - variável aleatória X: número de homens com mais de 80 kg dentre os 7 escolhidos.
    - Resultados possíveis: X = 0,1,2,3,4,5,6,7

Variáveis Aleatórias

- Variável aleatória DISCRETA
  - Numa amplitude determinada, admite um número finito de valores, ou
  - Tem uma quantidade enumerável de valores
- Variável aleatória CONTÍNUA
  - Pode tomar um número infinito de valores
  - Pode ser associada a uma mensuração em uma escala contínua

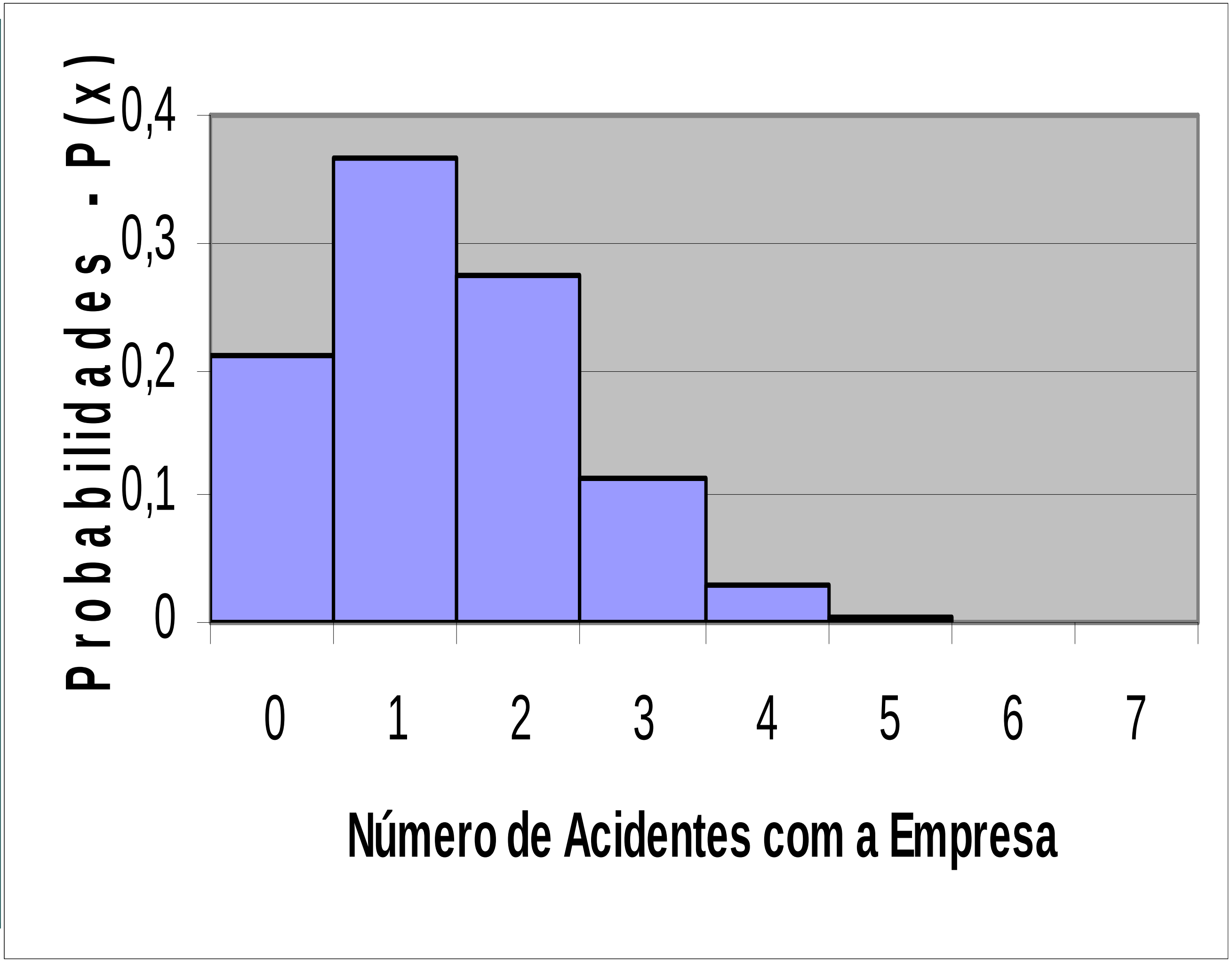
Variáveis Aleatórias

- Uma empresa aérea possui 20% de todas as linhas domésticas.
- Suponha que todos os vôos tenham a mesma chance de um acidente;
- Escolhendo 7 acidentes aleatoriamente, as probabilidades de números de acidentes com esta empresa neste grupo de 7 são:

0 acidente: 0,21	1 acidente: 0,367
2 acidentes: 0,275	3 acidentes: 0,115
4 acidentes: 0,029	5 acidentes: 0,004
6 acidentes: 0,00... ou 0+	7 acidentes: 0+

Variáveis Aleatórias

x	P(X=x)
0	0,21
1	0,367
2	0,275
3	0,115
4	0,029
5	0,004
6	0+
7	0+



Distribuição de Probabilidade

- Quando conhecemos todas os possíveis valores de uma variável aleatória com suas respectivas probabilidades de ocorrência, temos uma

  DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

- Assim, uma distribuição de probabilidade fornece a probabilidade de ocorrência de cada valor que uma variável aleatória pode assumir.

Distribuição de Probabilidade

- Observe que distribuição de probabilidade é uma correspondência que associa probabilidades aos valores de uma variável aleatória
- Ou seja, é uma FUNÇÃO
  - $P(X=x) = f(x)$ = função que relaciona a probabilidade de ocorrência de um valor da variável aleatória.

Distribuição de Probabilidade

- Para quatro jogadas de uma moeda equilibrada, há 16 resultados igualmente prováveis (k → cara; c → coroa)

kkkk	**kkkc**	**kkck**	**kckk**
ckkk	**kkcc**	**kckc**	**kcck**
ckkc	**ckck**	**cckk**	**kccc**
ckcc	**cckc**	**ccck**	**cccc**

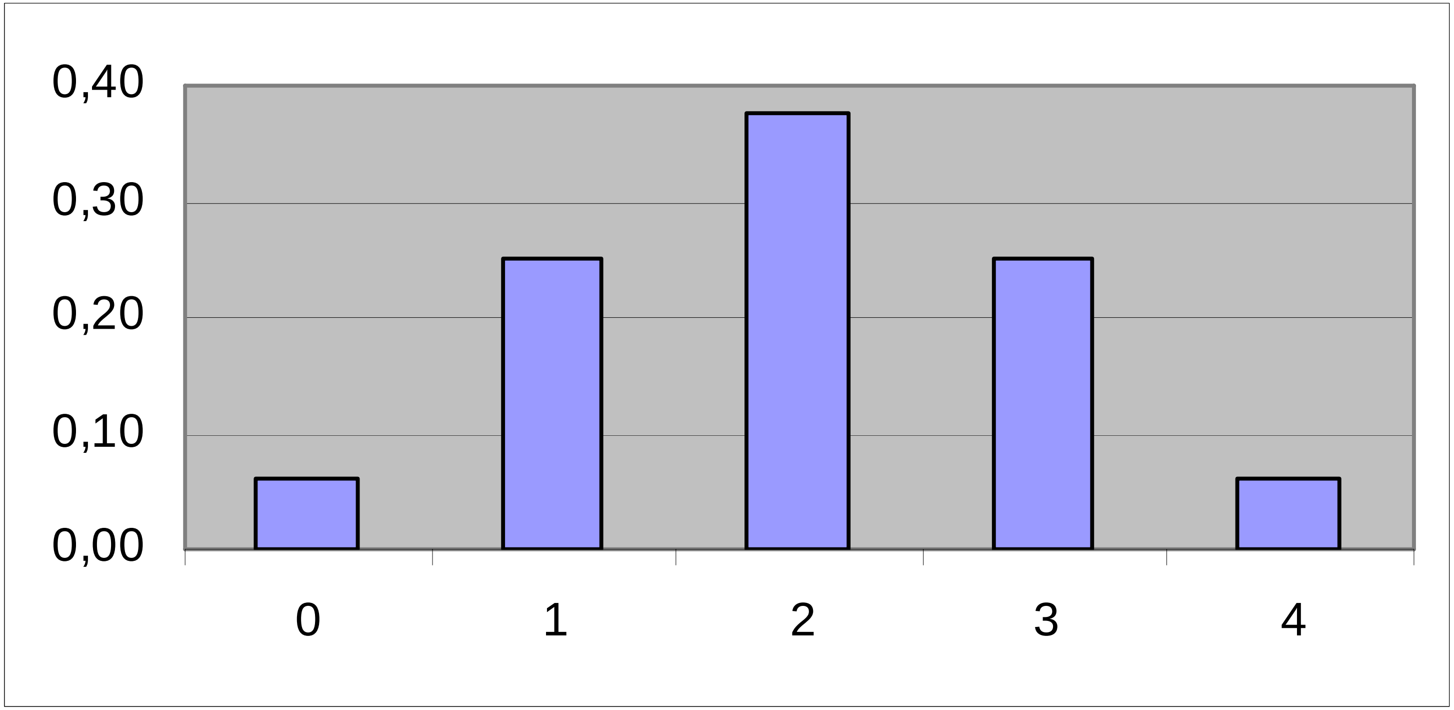
- Contando o número de caras em cada caso obtemos a tabela a seguir:

Distribuição de Probabilidade

Nº Caras (x)	P(X=x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16

- Observa-se um comportamento do centro para os extremos.
- A função matemática que traduz o comportamento é:
  - $f(x) = (4!/x!(4-x)!)/16$
- Substitua os valores de x e comprove:
  - x = 0; 1; 2; 3; 4.

Distribuição de Probabilidade



Exemplo

- Com base nesta distribuição, determine:
  - Probabilidade de termos ao menos 3 caras.
  - Probabilidade de termos até 1 cara.
  - Probabilidade de termos de 1 até 3 caras.

Exemplo

- Com base nesta distribuição, determine:
  - Probabilidade de termos ao menos 3 caras.
    - R: $P(x>2)=5/16$
  - Probabilidade de termos até 1 cara.
    - R: $P(x<2)=5/16$
  - Probabilidade de termos de 1 até 3 caras.
    - R: $(1<=x<=3)=14/16$

Distribuição de Probabilidade

Condições Necessárias

Como os valores das distribuições de probabilidade são *probabilidades* (cada possível valor da variável aleatória tem uma probabilidade associada), as seguintes condições se aplicam a qualquer distribuição de probabilidade:

- $\Sigma P(x) = 1$
- $0 \leq P(x) \leq 1$ para todo x.

Exercício

- Verifique se a função abaixo pode ser a distribuição de probabilidade de alguma variável aleatória
  - $f(x) = (x+3)/15$ para $x=1,2$ e 3.

Exercício

- Verifique se a função abaixo pode ser a distribuição de probabilidade de alguma variável aleatória
  - $f(x) = (x+3)/15$ para $x=1,2$ e 3.
- Solução:
  - $f(1) = 4/15$; $f(2) = 5/15$; $f(3)=6/15$
  - Todos os valores de $f(x)$ são menores que 1
  - $4/15+5/15+6/15 = 15/15 = 1$.
- A função dada pode ser uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória.

Média, Variância e Desvio Padrão

Para uma distribuição de probabilidade qualquer:

Média → $\mu = \Sigma x.P(x)$

Variância → $\sigma^2 = \Sigma[(x - \mu)^2.P(x)]$

$\sigma^2 = [\Sigma x^2.P(x)] - \mu^2$

Desvio Padrão → σ

Exemplo

- Tomando a distribuição de probabilidade dos acidentes com a empresa área em 7 acidentes pesquisados aleatoriamente:
- Calcule:
  - O número médio de acidentes com a empresa
  - A variância
  - O desvio padrão

x	P(X)
0	0,21
1	0,367
2	0,275
3	0,115
4	0,029
5	0,004
6	0+
7	0+

Resolvendo...

x	P(x)	x.P(x)	x^2	x^2.P(x)
0	0,210	0,000	0	0
1	0,367	0,367	1	0,367
2	0,275	0,550	4	1,100
3	0,115	0,345	9	1,035
4	0,029	0,116	16	0,464
5	0,004	0,020	25	0,100
6	0+	0,000	36	0,000
7	0+	0,000	49	0,000
Totais	$\Sigma P(x) = 1$	$\Sigma x.P(x) = 1{,}398$		$\Sigma x^2.P(x) = 3{,}066$

Média:

$\mu = \Sigma x.P(x)$

$= 1{,}398$ acidentes

Variância

$\sigma^2 = [\Sigma x^2.P(x)] - \mu^2$

$= 3{,}066 - 1{,}398^2$

$= 1{,}1116$ acidentes^2

Desvio Padrão

$\sigma = 1{,}05$ acidentes

Valor Esperado ou Esperança

- O valor esperado de uma variável aleatória *x* representa o valor médio do resultado e é dado por:
  - $E(x) = \Sigma x.P(x)$
- Exemplo:
  - Jogando 5 vezes uma moeda, o número médio de caras esperado é 2,5. Assim, ao jogarmos uma moeda 5 vezes, <u>o valor esperado ou esperança é 2,5.</u>

Exemplo

- Num determinado jogo, o jogador deve escolher três algarismos entre 0 e 9. Os números serão então sorteados. A aposta é de $1,00 para um prêmio de $500.
- Portanto, se o jogador acertar o número sorteado, o ganho é de 499,00 para cada 1,00 apostado.
- Suponha que você aposte $1,00. Qual o valor esperado de seu ganho ou perda?

Exemplo

- Num determinado jogo, o jogador deve escolher três algarismos entre 0 e 9. Os números serão então sorteados. A aposta é de $1,00 para um prêmio de $500.
- Portanto, se o jogador acertar o número sorteado, o ganho é de 499,00 para cada 1,00 apostado.
- Suponha que você aposte $1,00. Qual o valor esperado de seu ganho ou perda?
  - Há 1000 possibilidades de respostas (de 000 a 999)
  - Resultados possíveis → ganho ou perda
  - $P(x=\text{ganho}) = 1/1000 = 0{,}001$
  - $P(x=\text{perda}) = 999/1000 = 0{,}999$

Resolvendo...

Evento	x	P(x)	x.P(x)
Ganha	$499	0,001	$0,499
Perde	$-1	0,999	$-0,999
Totais			$-0,50

Assim, para uma aposta de $1,00, o valor esperado é ***menos*** **$0,50**, ou seja, a longo prazo devemos esperar perder 0,50 para cada real apostado.

Obviamente o valor esperado representa uma perda média de $0,50 para uma longa seqüência de apostas feitas.

Resumo

- Uma variável aleatória associa um valor numérico a cada resultado de um experimento aleatório
- Uma distribuição de probabilidades associa uma probabilidade a cada valor de uma variável aleatória