I. Paradojas de la relatividad especial
   - A. Introducción
   - B. Las paradojas
     - 1. Las galaxias colapsarían
       - a. Planteo
       - b. Explicación
     - 2. Las cuerdas vibrantes
       - a. Planteo
       - b. Explicación
     - 3. Los gemelos
       - a. Planteo
       - b. Explicación
         - 1. Relato de O
         - 2. Relato de O’

II. Viaje relativista
   - A. Los gemelos se comunican
     - 1. Señales de O’
       - a. Viaje de ida
       - b. Viaje de regreso
       - c. Recapitulación
     - 2. Señales de O
       - a. Viaje de ida de O’
       - b. Viaje de regreso de O’
       - c. Recapitulación
     - 3. Conclusión

III. Efecto Doppler
   - A. Introducción
   - B. Efecto Doppler en las ondas sonoras
     - 1. Movimiento de la fuente
     - 2. Movimiento del observador
     - 3. Movimiento combinado
     - 4. Desplazamiento en el plano y el espacio
     - 5. Ondas de choque
   - C. Efecto Doppler en las ondas electromagnéticas
     - 1. Efecto Doppler clásico
     - 2. Efecto Doppler relativista
       - a. Visto desde el observador
       - b. Visto desde la fuente
       - c. Conclusión
         - 1. El efecto Doppler y el viaje relativista
     - 3. Aplicaciones
       - a. Radares para medición de velocidad
       - b. Medición de velocidades en astronomía
         - 1. Espectros de emisión y de absorción
         - 2. Cálculos
     - 4. Consecuencias
       - a. Comunicaciones via satélite

IV. Bibliografía

Teoría de la Relatividad
Relatividad especial

Paradojas
y
efecto Doppler

Índice

Paradojas de la relatividad especial

Introducción

Con el correr de los años, se ha intentado desprestigiar a la teoría de la relatividad atribuyéndole situaciones paradojales que aparentemente la invalidarían. Tales paradojas son, generalmente, falacias nacidas de una mala comprensión de la teoría, que fueron luego distribuídas por otros que la comprendían aún menos.

Es la intención de esta sección aclarar algunas de ellas, encontradas investigando en la Internet, refutándolas con la simple aplicación de los mismos principios relativistas que supuestamente les dieron origen.

Las paradojas

Las galaxias colapsarían

Planteo

La tripulación de una nave espacial que pasara a una velocidad de 0,9 c a través de una galaxia, la vería colapsar. Esto es así porque a esa velocidad, las masas relativas de las estrellas serían del doble, y provocarían que las fuerzas gravitatorias se cuadrupliquen. El acortamiento de las distancias entre las estrellas a lo largo del viaje provocaría que esas fuerzas aumentaran aún más, y el colapso sería inevitable.

Explicación

La tripulación de dicha nave vería acortarse las distancias entre las estrellas (y a las estrellas), en la dirección de su movimiento con respecto a la galaxia. Esto no significa que a las estrellas y/o a las distancias que las separan les ocurra algo, se trata de un efecto producido por el movimiento relativo y la velocidad finita de propagación de la luz. En cuanto a las masas, los tripulantes de la nave no notarán ningún aumento de la masa de las estrellas en tanto no intenten chocar con alguna de ellas...

Las cuerdas vibrantes

Planteo

En una nave espacial hay dos cuerdas idénticas e igualmente tensas. Una es paralela, y la otra perpendicular, a la dirección de vuelo. Hay además un sistema de radio que transmite los sonidos de las cuerdas a la tierra. Debido a la velocidad relativista del viaje, dos señales de diferente longitud de onda llegarán a la tierra, dado que la cuerda paralela a la dirección del movimiento se acortará. Sin embargo, la tripulación de la nave oirá que ambos tonos son iguales, porque el acortamiento de la cuerda es relativo y la diferencia sólo puede detectarse desde la tierra. ¿Pero cómo puede el sistema de comunicaciones producir dos señales distintas a partir de dos sonidos idénticos ?

Explicación

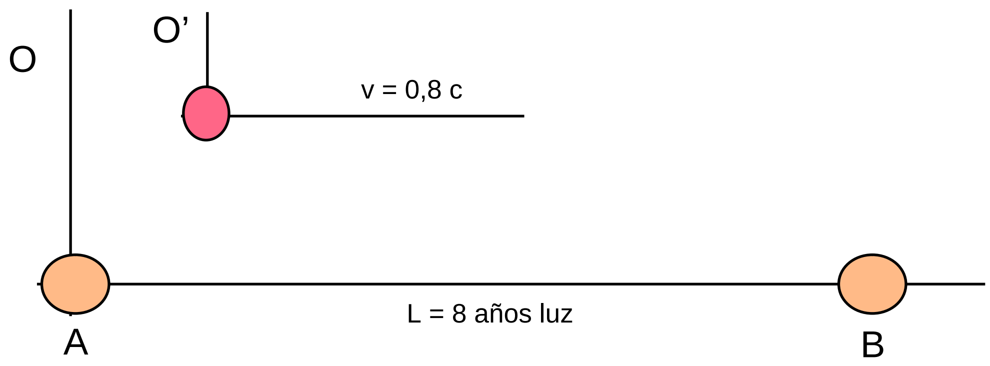
En la nave, ambas cuerdas sonarán al unísono, y esto es lo que se transmitirá a la tierra. Debido al efecto Doppler, las señales de radio se correrán en frecuencia, pero ambos tonos seguirán siendo idénticos, y esto es lo que se escuchará en la tierra.

Si desde la tierra se pudiera observar y/o medir ambas cuerdas, se vería que la que se halla paralela a la dirección del movimiento parece ser más corta, pero esto no significa que a la cuerda le ocurra algo. También la nave y sus tripulantes se verían deformados, sin que esto les afecte.

Los gemelos

Tal vez la más famosa de estas paradojas sea la de los gemelos.

Dos gemelos idénticos se separan en un punto A. Uno de ellos parte con velocidad constante *v* = 0,8 *c* hacia un punto B situado a 8 años luz de A, para luego partir inmediatamente en viaje de regreso; retornando al cabo de 20 años.



Aplicando las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right) \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

obtenemos que el viajero regresa a la tierra 8 años más jóven que su hermano, ya que esos 20 años fueron para él 12 años.

γ = 5/3 => t' = 5/3 (20 - 8 . 0,8) = 12 años

Planteo

Como el principio de relatividad dice que en dos sistemas con movimiento relativo rectilíneo y uniforme es imposible distinguir cuál se mueve y cuál no, entonces el gemelo en la nave ve que el punto A se aleja de él, el punto B aparece, para luego desaparecer y encontrarse nuevamente en A. Como él no viajó sino que fue su hermano el que se fué y vino junto con el punto A, entonces su hermano debe ser más jóven.

Puesto que ambos no pueden ser más jóvenes a la vez; aquí radica la paradoja.

Explicación

Evidentemente, el que realiza el viaje experimenta una aceleración al partir, otra al invertir el sentido del viaje para el regreso, y otra al retornar; por lo que el sistema, no es reversible.

Despreciando estas aceleraciones, haciendo que duren tiempos ínfimos frente a la totalidad del viaje, es aún posible resolver esta paradoja aplicando nada más que la teoría especial de la relatividad, haciendo un uso correcto de las transformaciones de Lorentz.

La clave para comprender el problema radica en definir correctamente ambos sistemas de referencia inerciales, y cómo se refieren a éstos las mediciones; identificando correctamente cuáles son los tiempos y longitudes propias.

Del análisis de mediciones relativistas sabemos que:

* intervalo de tiempo propio, es aquel que se mide en un sistema entre dos sucesos que se sitúan en el mismo lugar en ese sistema.

* longitud propia, es aquella que se mide en un sistema en reposo con respecto a dicha longitud. En este caso, la distancia A-B en el sistema O

El punto A y el punto B pertenecen al mismo sistema de referencia inercial: O, en tanto que el viajero se desplaza en el sistema de referencia inercial O'. El gemelo en A mide entonces una longitud L sobre su propio sistema de referencia, O, mientras que el gemelo en O' la mide sobre el sistema O, en movimiento relativo respecto de él.

De igual modo, aunque tal vez no tan claramente, vemos que el gemelo en O' mide el tiempo de viaje como intervalo de tiempo propio, sin desplazarse dentro de su sistema de coordenadas (x' = 0), mientras que el gemelo en O deberá utilizar dos relojes para poder medir el intervalo del viaje de su hermano desde A hacia B.

Para hacer más claros los cálculos, normalizamos las velocidades con respecto a *c* (*c* =1), de modo que la conversión entre distancias en años luz y tiempos en años, se haga de forma directa.

$$\begin{cases} L' = \dfrac{L}{\gamma} \\ t = \gamma\, t' \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Hacemos t = t' = 0 y x = x' = 0 en el momento de la partida desde A, aplicando entonces estas fórmulas para la conversión de longitudes propias e intervalos de tiempo propios a los del otro sistema. En lugar de invertir estas fórmulas, utilizaremos la transformación de Lorentz para referir cualquier otra medición.

Relato de O

El sistema de referencia O' viaja a una velocidad *v* = 0,8. Al cabo de diez años , según me reporta el reloj en B, arriba al punto B, situado a 8 años luz en mi sistema de referencia. Aplicando las transformaciones de Lorentz, deduzco que para el sistema O' transcurrieron $t' = \gamma\,(t - x\,v/c^2) = 5/3\,(10 - 8\,.0{,}8\,) = 6$ años, y que allí debe haberse experimentado una contracción de la longitud medida: $L' = L / \gamma = 8\,.\,.3/5 = 24/5$. Mi hermano es ahora 4 años más joven que yo, y será 8 años más joven al regresar.

O mide una distancia en su propio sistema de referencia e infiere que O' medirá *una distancia más corta. Aplicando la transformación de Lorentz deduce que el tiempo transcurrido en O' deberá ser menor; lo cual se deduce del hecho de que la velocidad de O' respecto de O deberá ser igual a la de O respecto de O', entonces deberá ser: L / t = L' / t' = v*

Relato de O'

Mido una duración de viaje de t' = 6 años con mi reloj, he medido un tiempo propio pues no he cambiado de posición dentro de mi sistema de referencia. Mi velocidad ha sido v = 0,8 = 4/5, entonces deduzco que recorrí una distancia L' = v t' = 4/5 . 6 = 24/5 años luz. Estuve adentro de mi nave y medí una distancia en otro sistema de referencia, en movimiento relativo con respecto a mí, debo por ende haberla medido más corta.

Como O se estuvo moviendo respecto a mi sistema a una velocidad v = 0,8; debió haber medido este intervalo como t = γ t', entonces en O deben haber transcurrido t = 10 años. Mi hermano es ahora 4 años más viejo que yo y será 8 años más viejo cuando yo regrese a A.

O' mide una distancia en otro sistema de referencia, en movimiento relativo con él. Sabe entonces que está midiendo una distancia más corta, que esa misma distancia es, en O, más larga. De igual forma, sabe que el intervalo de tiempo medido en O deberá ser mayor que el que él midió; lo cual se condice con el hecho de que la velocidad de O' respecto de O deberá ser igual a la de O respecto de O', entonces deberá ser: L / t = L' / t' = v.

Viaje relativista

Los gemelos se comunican

Para clarificar conceptos y observar claramente la dilatación del tiempo, supongamos que los gemelos de la paradoja descripta en el capítulo anterior envían una señal cada año, con el objeto de hacer saber a su hermano que han envejecido un año. Esta señal viajará a la velocidad de la luz y será recibida un cierto tiempo después por el hermano distante. Recordemos que para hacer más claros los cálculos, normalizamos las velocidades con respecto a *c* (*c* =1), de modo que la conversión entre distancias en años luz y tiempos en años, se haga de forma directa.

Señales de O'

Cuando en O' transcurra un intervalo t = 1 año, en O transcurrirá t = γ t' = 5/3 año. En el sistema de referencia O, O' habrá recorrido una distancia x = *v* t = 0,8 . 5/3 = 4/3 ly (años luz). Cada año (en el tiempo propio de su sistema inercial), O' enviará una señal. Esa señal viajará de regreso hacia el punto A a la velocidad de la luz, y recorrerá esa distancia en un tiempo t = x / *c*. Utilizamos, por simplicidad, al punto A como referencia de coordenadas.

Viaje de ida

Al cabo del primer año del tiempo propio de O', en O habrán transcurrido 5/3 de año. La distancia recorrida por O', medida en O, será de 4/3 ly. Significa que esta señal, viajando a la velocidad de la luz, tardará 4/3 de año en llegar a A, donde será recibida por su hermano. La primera señal llega entonces para t = 5/3 + 4/3 = 3 años.

Al segundo año de O', en O transcurrieron 10/3 de año, y la distancia a A será de x = 0,8 . 10/3 = 8/3 ly. Consecuentemente, la segunda señal llegará a A 8/3 de año después, para t = 10/3 + 8/3 = 6 años.

Así ocurre durante los 6 años del viaje de O' (en su tiempo propio):

Tiempo transcurrido en O' (t')	***Tiempo transcurrido en O (t = γ t')***	***Posición según O (x=vt)***	***Tiempo de arrivo de la señal según O (t*=γt'+x/c)***
1	5/3	4/3	3
2	10/3	8/3	6
3	5	4	9
4	20/3	16/3	12
5	25/3	20/3	15
6	10	8	18

Vemos entonces que O' envió 6 señales, a razón de una por año (de su tiempo propio), y O recibe 6 señales, una señal cada 3 años (de su tiempo propio), durante

18 años.

Viaje de regreso

Finalmente, O' inicia su viaje de regreso a la misma velocidad, recorriendo las mismas distancias por año. Su posición respecto de A será ahora x = 8 - v (t - 10), debido a que invierte el sentido de su viaje cuando t = 10 y x = 8 respecto de O.

Al primer año del viaje de regreso, séptimo del viaje de O', en O habrán transcurrido t = 5/3 . 7 = 35/3 de año, y la posición respecto de A será entonces x = = 8 - 0.8 .5/3 = 20/3. La señal enviada llegará a A 20/3 de año después, es decir, para t = 35/3 + 20/3 = 55/3 = 18,33 años

Al segundo año, octavo del viaje, en O habrán transcurrido t = 40/3 de año, y su posición será x = 16/3. La señal llegará a A 16/3 de año después, cuando sea t = 56/3 = 18,67. De igual modo, al tercer año, noveno del viaje, será x = 12/3 y la señal transmitida llegará para t = 19 años.

Así sucederá los tres años siguientes:

Tiempo transcurrido en O' (t')	***Tiempo transcurrido en O ($t = \gamma t'$)***	***Posición según O (x=8-v(t-10))***	***Tiempo de arrivo de la señal según O ($t^*=\gamma t'+x/c$)***
7	35/3	20/3	55/3
8	40/3	16/3	56/3
9	9	4	57/3
10	50/3	8/3	58/3
11	55/3	4/3	59/3
12	20	0	20

Vemos que, durante los seis años que dura el viaje de regreso de O', este envía 6 señales, que llegan con una frecuencia de 3 por año, durante dos años del sistema O.

Recapitulación

O' envía un total de 12 señales, una cada año de su propio tiempo.

O recibe un total de 12 señales al cabo de 20 años: 6 los primeros 18 años, a razón de 1 cada 3 años, y 6 los últimos 2 años, a razón de 3 por año.

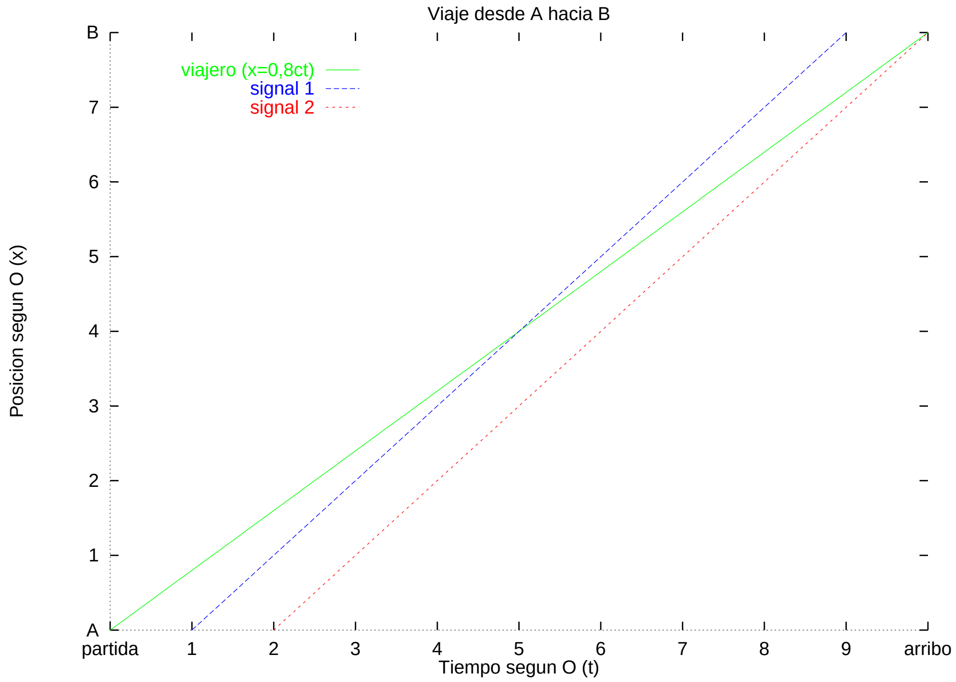
Señales de O

Cada año, O enviará una señal. Esta señal viajará con velocidad c al encuentro de O', que es un móvil para el sistema de referencia O. Este móvil huirá de las señales durante su viaje de ida y correrá a su encuentro durante el viaje de regreso. El problema principal es un clásico problema de encuentro, en el que un móvil más rápido sale a perseguir a uno más lento. Para ver mejor lo que sucede, haremos un gráfico del problema de encuentro.

Viaje de ida de O'

Al cabo del primer año, O envía una señal. En este momento, O' recorrió una distancia x = 0,8 ly en el sistema O. La señal recorre un año luz por año, y tarda 4 años en alcanzar a O', de acuerdo a la siguiente ecuación: 0,8 t = t - 1 => t = 5. Este momento corresponde al tiempo $t' = \gamma\,(t - x\, v/c^2) = 3$ en O'.

Al segundo año, tenemos: 0,8 t = t - 2 => t = 10, entonces t' = 6.



Vemos entonces que durante los 6 años del viaje de ida de O', este recibe solamente 2 señales de su hermano en O, una cada 3 años.

Viaje de regreso de O'

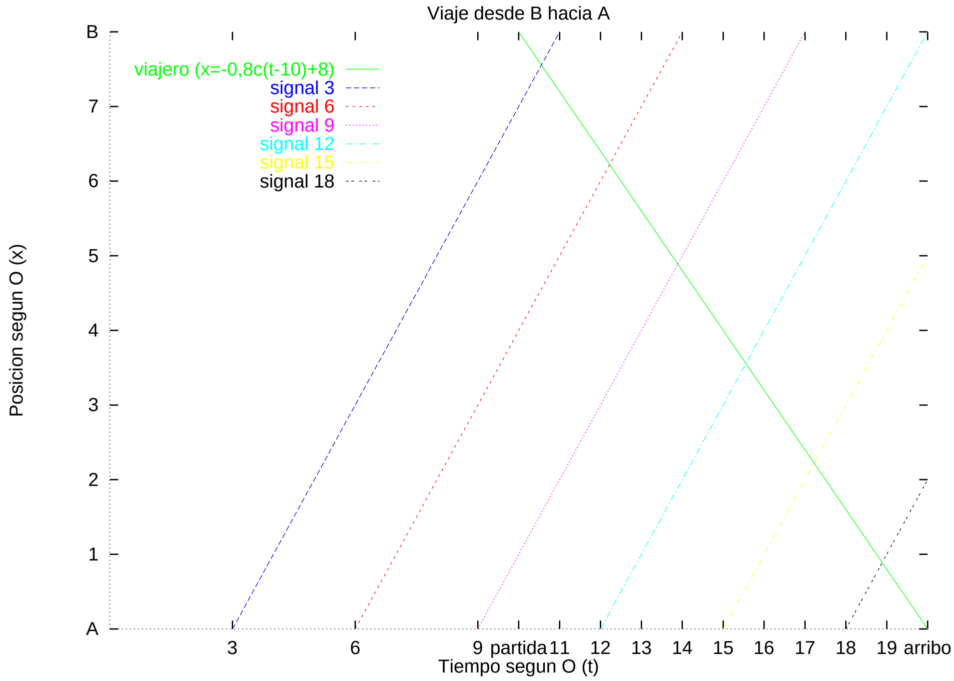
A partir del tercer año de O, cada señal alcanzará a O' según la ecuación:

$$8 - 0{,}8\,(t - 10) = t - t_0 \text{ para } t_0 = 3,4,5,\ldots,20.$$

De donde despejamos el tiempo de encuentro: $t^* = 5/9\,(t_0 + 16)$ y calculamos entonces $t' = t / \gamma^*$.

tiempo de salida de la señal (t_0)	*tiempo de encuentro con O', según O (t*)*	*tiempo de encuentro con O', según O' (t')*		*tiempo de salida de la señal (t_0)*	*tiempo de encuentro con O', según O (t*)*	*tiempo de encuentro con O', según O' (t')*
3	10,56	6,33		12	15,56	9,33
4	11,11	6,67		13	16,11	9,67
5	11,67	7		14	16,67	10
6	12,22	7,33		15	17,22	10,33
7	12,78	7,67		16	17,78	10,67
8	13,33	8		17	18,33	11
9	13,89	8,33		18	18,89	11,33
10	14,44	8,67		19	19,44	11,67
11	15	9		20	20	12

Para mayor claridad, se ha graficado una de cada 3 señales.



Vemos entonces que durante los 6 años del viaje de regreso de O', este recibe 18 señales de su hermano en O, a razón de 3 por año.

Recapitulación

O envía 20 señales, 1 cada año de su tiempo.

O' recibe 20 señales, 2 los primeros 6 años, a razón de una cada 3 años; y 18 los últimos 6 años, a razón de 3 por año.

Conclusión

Hemos observado que la dilatación del tiempo se produce efectivamente en dos sistemas en movimiento relativo. Si quedaba alguna duda sobre la no-paradoja de los gemelos, la hemos disipado.

Vimos además, que la frecuencia de las señales enviadas aumenta, para el receptor, cuando los sistemas se acercan, y disminuye (para el receptor) cuando se alejan.

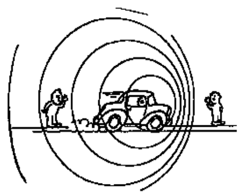
Analizaremos, en el capítulo siguiente, si esto tiene alguna relación con el efecto Doppler.

* Cálculo de t':
Si quisiéramos utilizar la transformación de Lorentz, el cálculo de t' es algo complicado. Dado que el movimiento se invierte en t = 10, t' = 6 y x = 8, debemos sesgar las ecuaciones de la transformación para reflejar este pseudo "origen de coordenadas". Al ser el movimiento de acercamiento, tendremos que *v* = -0,8, es decir, de sentido opuesto. Modificando la transformación de Lorentz para estos valores, queda: $t' = 6 + \gamma\,[(t - 10) - (x - 8)\,v / c^2]$, lo cual, como sabemos, es numéricamente igual a hacer $t' = t / \gamma$, que resulta de invertir la ecuación $t = \gamma\, t'$.

Efecto Doppler

Introducción

En 1842, el matemático y físico austríaco Johann Christian Doppler (1803-1853), presenta al mundo su principio "Sobre la coloración de las estrellas dobles y otras estrellas". Allí nos describe el efecto que hoy lleva su nombre y es experimentado día a día en las ondas sonoras. Cuando oímos una ambulancia acercarse, pasar frente a nosotros y luego alejarse, percibimos cambios en la altura del sonido: primero más agudo, luego casi normal, y finalmente más grave, respectivamente. La relación de velocidades entre la fuente (y/o el observador) y la señal es la causa que origina este efecto.



Efecto Doppler en las ondas sonoras

Las ondas sonoras son ondas mecánicas, se propagan en el espacio utilizando cierta propiedad del medio, y su velocidad depende de la elasticidad del material. En el caso del aire, esta propiedad será la presión. Es decir, que las ondas sonoras se propagan en el aire mediante variaciones de la presión. La velocidad es función de la temperatura, y a 20° C se la acepta como de unos 340 m/s.

Al existir un medio en el cual se produce la propagación, debemos diferenciar en el análisis del efecto Doppler el movimiento de la fuente y/o del observador respecto del medio en reposo; aplicando luego el principio de superposición obtendremos la respuesta para el movimiento de ambos. Para mayor claridad, consideramos que fuente y observador se hallan en un mismo plano, alineados sobre el eje x, respecto del cual se produce el movimiento. Ampliaremos luego estos conceptos al movimiento en el plano y el espacio.

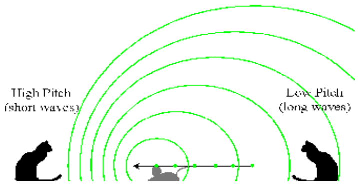
Movimiento de la fuente

Consideraremos al observador en reposo respecto del medio. Sólo la fuente de señal se moverá.

Imaginemos una fuente de señal S que emite señales sonoras con una frecuencia f_s, desplazándose a una velocidad v_s. Una vez emitidas, las ondas sonoras se desplazan en el aire con velocidad v. Diremos que la fuente de señal se acerca al observador. Recordemos que la longitud de onda es función lineal de la velocidad de propagación, e inversa de la frecuencia: $\lambda = v / f$.

A medida que la fuente de señal se acerca, las ondas emitidas "empujan" a las que viajan libremente, es decir, los frentes de onda se comprimen en el sentido del movimiento. Así, si consideramos que en un período unitario de tiempo, la fuente emitió unas f_s ondas y se desplazó v_s metros, mientras que la primera onda emitida recorrió v metros ($v>v_s$), tendremos que en una distancia de $v - v_s$ metros se encuentran f_s ondas. Estas ondas tendrán una longitud de onda $\lambda = (v - v_s) / f_s$.

La velocidad de propagación de las ondas en el aire en calma seguirá siendo *v*, por lo que el observador percibirá una señal de frecuencia $f_o = v / \lambda = f_s \,.\, v / (v - v_s) = f_s \,.\, 1 / (1 - v_s / v)$, tanto más alta cuanto más se acerque v_s a *v*. Dejaremos el caso de v_s mayor o igual que *v* para más adelante.



Claramente se deduce, que si la fuente se aleja del observador, el proceso es el inverso y simplemente deberemos invertir el signo menos en la ecuación anterior, por lo que expresaremos al efecto Doppler para el movimiento de la fuente de señal: $f_o = f_s \frac{1}{(1 \pm \frac{v_s}{v})}$

Movimiento del observador

Tenemos ahora una fuente estacionaria que emite señales sonoras de frecuencia f_s y un observador que avanza hacia la fuente con velocidad v_o, cruzando más frentes de onda cuanto más rápido se desplace. Observamos claramente que el observador verá a las ondas llegar hacia él con velocidad $v + v_o$, mientras que la longitud de onda observada permanecerá inalterada. En estas condiciones, el observador percibirá una señal de frecuencia f_o, tal que:

$f_o = (v + v_o) / \lambda = f_s + v_o / \lambda = f_s + f_s \,.\, v_o / v = f_s (1 + v_o / v)$

Claramente se deduce que si el observador se aleja de la fuente, el proceso es el inverso, y simplemente debemos invertir el signo más en la ecuación anterior, por lo que expresaremos el efecto Doppler para el movimiento del observador, como la ecuación: $f_o = f_s \left(1 \pm \frac{v_o}{v}\right)$

Movimiento combinado

Aplicando el principio de superposición, tenemos la ecuación del efecto Doppler para movimiento combinado de un observador y una fuente respecto del aire en calma:

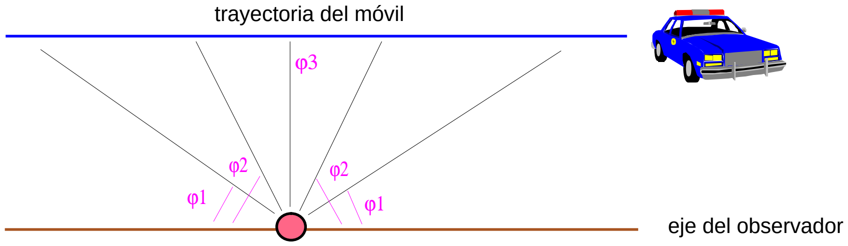
$$f_o = f_s \frac{\left(1 \pm \frac{v_o}{v}\right)}{\left(1 \pm \frac{v_s}{v}\right)}$$

Los signos deberán interpretarse como positivos o negativos según la posición y el sentido del desplazamiento relativo entre fuente y observador. Si el observador está del lado de la compresión de los frentes de onda, el signo en el denominador será negativo; caso contrario, será positivo. Si se acercan el uno al otro, el numerador será positivo; si se alejan, será negativo.

Desplazamiento en el plano y el espacio

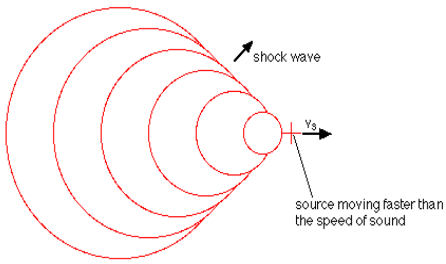
Hasta aquí consideramos que el movimiento se hacía en una sola dimensión.

En el espacio, las ondas serán esferas concéntricas en donde variarán los puntos de presión. Las ecuaciones deducidas son igualmente válidas para el movimiento en el plano y en el espacio, si hacemos la consideración de definir a v_o y v_s como velocidades radiales, es decir, la derivada del vector distancia en función del tiempo, o bien, la proyección sobre el eje del observador del vector distancia observador-fuente. En el caso del plano, para una visualización más clara, consideremos el ejemplo clásico de la ambulancia o el vehículo de la policía que pasa frente a nosotros, el cual esquematizamos en el siguiente gráfico:



En el dibujo hemos trazado la trayectoria del móvil y dibujamos el vector distancia en cinco puntos. Vemos que tenemos dos puntos de la trayectoria en los cuales este vector forma, con el eje del observador, ángulos φ1 y φ2 (que se repiten al alejarse el móvil), y un punto donde se desarrolla un ángulo φ3 = 90° . Si proyectamos el vector sobre el eje del observador, es decir multiplicamos por el *cos(φ)*, tendremos la velocidad relativa con la que el móvil parece acercarse al observador sobre su eje, es decir, el módulo del vector velocidad radial. Veremos que para φ1 tenemos mayor velocidad relativa que en φ2, y como φ3 = 90° , tenemos velocidad nula, justo en el instante en que el móvil pasa frente a nosotros. Así, la velocidad radial será $v_r = v_s \cos(\varphi)$.

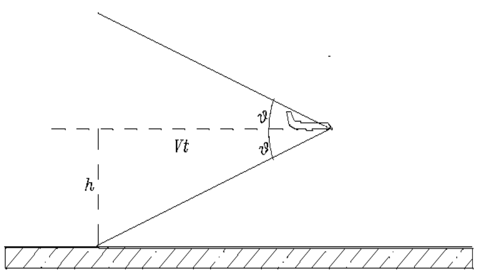
Ondas de choque



Las ondas de choque se producen cuando una fuente sonora se desplaza más rápido que la velocidad del sonido. Los frentes de onda se apilan, viajando a la velocidad de la fuente, y formando una superficie cónica que se abre hacia atrás de la fuente, en un ángulo que depende de la velocidad de la fuente respecto a la del sonido.

Recordemos el ejemplo visto en el caso del movimiento de la fuente sonora. Vimos que $f = f_s \cdot 1 / (1 - v_s / v)$, lo que significa que sobre la superficie del cono, donde los frentes de onda se apilan y viajan a la misma velocidad que la fuente, el cociente $v_s / v = 1$, y entonces la frecuencia se hace infinita. Esto es ese sonido atronador que se escucha cuando un móvil rompe la velocidad del sonido.

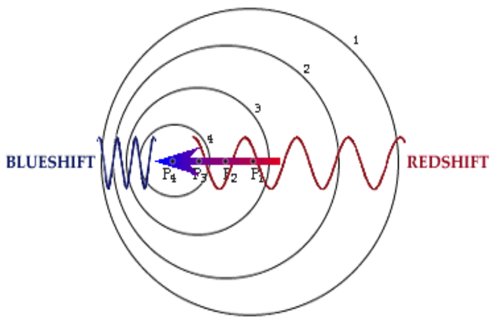
Al cociente v_s / v se lo denomina *Mach (M).* El ángulo de apertura del cono es tal que $\sin(\vartheta) = 1 / M$.



Del diagrama se deduce que el sonido se propaga solamente hacia atrás de la fuente, en el ángulo de apertura ϑ. Es evidente que, si la fuente se aproxima al observador, no se escuchará nada hasta que éste sea alcanzado por el cono, tiempo después de que la fuente pase por delante de él, cuando repentinamente sea alcanzado por la onda de choque. Esto explica por qué sólo escuchamos un avión jet cuando ya pasó por nuestra línea de visión, y no lo oímos acercarse. El tiempo de demora se calcula del gráfico. Vemos que en el momento en que la onda de choque proveniente de un avión jet que viaja a una altura *h* toca el suelo, la aeronave ha recorrido una distancia $v_s.t$. Sabemos que el cono se abre con un ángulo ϑ tal que *sin* (ϑ) = v / v_s . Del gráfico se observa que *sin* (ϑ) = $h / (h^2 + (v_s . t)^2)^{1/2}$. Igualando ambas ecuaciones y despejando t, nos queda: $\frac{v}{v_s} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + v_s t^2}} \Rightarrow t = h \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_s^2}}$

Efecto Doppler en las ondas electromagnéticas

En el caso de las ondas electromagnéticas, no existe un medio en el cual estas se propaguen, ergo no puede hacerse diferenciación respecto de quién se mueve con respecto al medio, y el efecto se produce por la velocidad relativa fuente-observador. Si estas ondas electromagnéticas pertenecen a un espectro de luz visible, observaremos un corrimiento de ese espectro hacia el azul (aumento de frecuencia) si nos acercamos a la fuente, y un corrimiento hacia el rojo (disminución de frecuencia) si nos alejamos. Esto se conoce como desplazamiento relativo Doppler o *Doppler shift.*



Efecto Doppler clásico

En el ejemplo correspondiente al caso del observador moviéndose, visto para las ondas sonoras, no se hizo referencia en su momento por tratarse de un tema de propagación, de velocidades de propagación y de velocidad del observador sumamente bajas, pero hemos utilizado la ley de adición de velocidades de la mecánica clásica. Según la mecánica clásica, si el observador se acerca a una fuente de ondas electromagnéticas, verá a las ondas venir con velocidad *c+v*, y si la fuente se acerca al observador, las ondas se desplazarán con velocidad *c+v*, por lo que siempre tendremos ondas esféricas concéntricas, contrariamente al gráfico de Doppler shift. Tenemos entonces que, considerando que un observador se acerca con velocidad relativa v a una fuente que emite ondas electromagnéticas con frecuencia f_s , observará una señal de frecuencia:

$f_o = (c + v) / \lambda = f_s + v / \lambda = f_s + f_s . v / c = f_s (1 + v / c)$

Sin embargo, resulta más cómodo para algunas aplicaciones desarrollar el segundo término y expresarlo como el corrimiento relativo (Doppler shift):

$\Delta f / f = (f_o - f_s) / f_s = v / c$

Evidentemente, esto expresa que el observador ve a las ondas electromagnéticas viajar más rápido que la luz, lo cual, según hemos visto en la teoría de la relatividad, no es posible. Sin embargo, a velocidades fuente-observador no muy elevadas, es decir, a velocidades no relativistas, es posible utilizar esta versión simplificada.

Hilando más fino, podemos proponer un efecto Doppler semi-clásico, en el cual aceptamos que las ondas electromagnéticas se propagan con velocidad *c* constante, y el movimiento produce una compresión de los frentes de onda, como viéramos para las ondas sonoras. Esto nos llevaría a plantear una ecuación del tipo

$f_o = f_s$. 1 / (1 - v / c), donde v es la velocidad relativa fuente-observador, que se reduce a $\Delta\lambda / \lambda = v / c$, ya que si en un intervalo de tiempo unitario, la onda recorre una distancia c y la fuente una distancia v, la longitud de onda observada será:

$\lambda_o = (c - v) / f = \lambda - \lambda\, v / c = \lambda (1 - v / c)$, de donde $\Delta\lambda / \lambda = (\lambda - \lambda_o) / \lambda = v / c$

Esta última fórmula, ampliamente utilizada en astronomía, pareciera contradecir a la anterior, de hecho, hemos planteado que $f_o = f_s$. 1 / (1 - v / c) luego de haber dicho que $f_o = f_s$ (1 + v / c). Afortunadamente, nuestra mecánica clásica se limita al entorno en el cual $v/c > 0$. En este entorno, podemos desarrollar en serie de Maclaurin el término 1 / (1 - v / c):

$$F(x) = \frac{1}{1-x}\ ;\ x = \frac{v}{c}$$
$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F^{(i)} x^i}{i!} = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)x^2}{2!} + \ ...\ + \frac{F^{(n)}(0)x^n}{n!}$$
$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \cong 1 + x \equiv 1 + \frac{v}{c}$$

Como vemos, en este entorno en el que trabajamos, ambas definiciones son equivalentes e igualmente aplicables.

Si el movimiento es en sentido opuesto, el desplazamiento relativo tendrá el mismo valor, pero de signo contrario, es decir, invertimos los signos igual como hiciéramos para las ondas sonoras.

Efecto Doppler relativista

En relatividad, las ondas electromagnéticas viajan con velocidad c para todo observador, e independientemente del movimiento de éste o de la fuente. Esto nos lleva a hacer el planteo del efecto Doppler relativista desde ambos puntos de vista: el de la fuente, y el del observador.Veremos que a pesar de desarrolar ecuaciones distintas, ambas resultan equivalentes con una mayor consistencia matemática aún que lo desarrollado para la mecánica clásica

Visto desde el observador

Consideremos una fuente que emite ondas de frecuencia f_s y que se mueve con velocidad v hacia un receptor "en reposo" (al menos para su sistema de referencia). En su unidad de tiempo propio, la fuente emite N ondas, tal que: $N = f_s \cdot \Delta t_s$

Si la fuente se mueve hacia el receptor, la primera onda recorrerá una distancia $c.\Delta t_r$ y la fuente recorrerá una distancia $v.\Delta t_r$ en el tiempo Δt_r medido en el sistema del receptor. La longitud de onda observada en el sistema del receptor será entonces :

$$\lambda_o = \frac{c\Delta t_r - v\Delta t_r}{N} = \frac{\Delta t_r (c-v)}{f_s \Delta t_s} = \lambda\left(1-\frac{v}{c}\right)\frac{\Delta t_r}{\Delta t_s} = \gamma\lambda\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

Quien mide el tiempo propio es la fuente, dado que cada onda sale del mismo lugar (en su sistema de referencia) a cada intervalo de tiempo, luego $\Delta t_r = \gamma \Delta t_s$.

La frecuencia observada en el receptor será:
$$f_o = \frac{c}{\lambda_o} = \frac{c}{\lambda\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)} = f_s \frac{1}{1-\frac{v}{c}} \frac{1}{\gamma}$$
que resulta similar a la calculada para las ondas sonoras, afectada por el término $1/\gamma$.

Si la fuente se aleja, invertiremos el signo menos, tal como hiciéramos en la ecuación clásica.

Visto desde la fuente

Hagamos ahora el cálculo en el sistema de referencia de la fuente. Ésta se halla ahora "en reposo" y el observador se mueve con velocidad *v*. En el intervalo de tiempo Δt_s, medido en el sistema de la fuente, el receptor encuentra todas las ondas situadas a la distancia $v.\Delta t_s$, además de las situadas a la distancia $c.\Delta t_s$, El número de ondas que encuentra es $N = (c.\Delta t_s + v.\Delta t_s) / \lambda$, similar a como viéramos para el caso de las ondas sonoras, sólo que el observador sigue viendo a las ondas viajar a velocidad *c*, porque hace su medición en un intervalo de tiempo diferente. En este caso, el observador es quien mide el tiempo propio, que es el intervalo de tiempo que transcurre entre que cruza a cada una de las ondas, luego $\Delta t_s=\gamma\Delta t_r$. La frecuencia y longitud de onda observadas en el receptor serán entonces:

$$f_o=\frac{N}{\Delta t_r}=\frac{(c\,\Delta t_s+v\,\Delta t_s)}{\lambda\,\Delta t_r}=\frac{\Delta t_s\,(c+v)\,f_s}{c\,\Delta t_r}=\gamma f_s\,(1+\frac{v}{c})$$

$$\lambda_o=\frac{c}{f_o}=\frac{\lambda}{\gamma\,(1+\frac{v}{c})}$$

Lo que resulta similar a la fórmula calculada para las ondas sonoras, afectada por el término γ.

Si el observador se aleja, invertiremos el signo, tal como hiciéramos en la ecuación clásica.

Conclusión

Las fórmulas deducidas parecen llevar a una incongruencia. Hemos postulado al enunciar la teoría de la relatividad que es indiscernible el movimiento relativo, es decir, no interesa quién se mueva respecto de quién; pero desarrollamos fórmulas que parecen expresar lo contrario, ya que resultan ecuaciones diferentes si partimos del movimiento de la fuente o del observador.

Sin embargo, desarrollando la expresión de γ y operando matemáticamente,

$$f_o=f\frac{1}{1-\frac{v}{c}}\frac{1}{\gamma}=f\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}}=f\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}}\times\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=f\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v}{c}}\;\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$f_o=\gamma f\frac{(1-\frac{v}{c})(1+\frac{v}{c})}{1-\frac{v}{c}}=\gamma f(1+\frac{v}{c})\;\leftarrow\;\mathrm{qelqqd}$$

se llega a que ambas ecuaciones expresan lo mismo, consistentemente con nuestros principios relativistas.

La relatividad resuelve, además, el efecto Doppler; de manera consistente e independiente del movimiento de la fuente y/o del observador.

El efecto Doppler y el viaje relativista

Si recordamos el ejemplo visto para explicar el viaje relativista, vimos que ahondábamos en los conceptos estudiando el comportamiento de sendas señales que los gemelos de la famosa paradoja se enviaban el uno al otro una vez por año. Según habíamos concluído, las señales se transmitían a razón de una por año, y eran recibidas a razón de una cada tres años durante el viaje de alejamiento y tres por año durante el viaje de acercamiento. Si ahora aplicamos lo deducido para el efecto Doppler, veremos que llegamos a los mismos resultados:

$f_o = \gamma f_s$ (1 + v / c) = 5/3 (1 + 4/5) = 3   para el acercamiento

$f_o = \gamma f_s$ (1 - v / c) = 5/3 (1 - 4/5) = 1/3 para el alejamiento

Aplicaciones

El efecto Doppler resulta de suma utilidad para realizar mediciones de velocidad, sobre todo en casos en los que no es posible utilizar métodos directos como la medición por tiempo de desplazamiento en una longitud conocida.

Radares para medición de velocidad

Son los conocidos radares que utiliza la policía en las rutas. El principio de funcionamiento consiste en enviar una señal de microondas, altamente direccional, contra el auto que se acerca. Dado que hay dos trayectos, el de ida y el de vuelta, y que la velocidad del automóvil más rápido es más de 1.000.000 de veces más chica que la velocidad de propagación de las microondas, podemos usar la forma aproximada: $\Delta f \,/\, f = 2\, v \,/\, c$. Es decir, el radar recibe de vuelta una señal cuyo corrimiento es proporcional a la velocidad del auto. Un receptor fácilmente extrae Δf, resultando v = $\Delta f\, c$ / (2 f).

El método para detectar el radar consistirá en conocer las *f* utilizadas y detectar su presencia cuando se las utiliza con los conductores que van delante de nuestro auto...

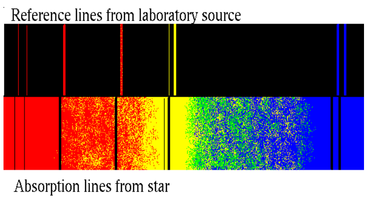
Medición de velocidades en astronomía

En astronomía, resulta imposible medir la velocidad de las estrellas o galaxias lejanas. Sin embargo, observando el corrimiento relativo Doppler de los espectros característicos de elementos conocidos, podemos calcular indirectamente esta velocidad.

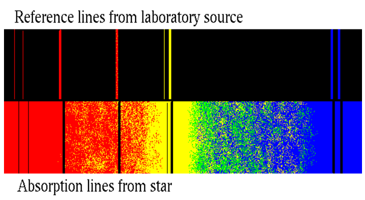
Espectros de emisión y de absorción

Todos los elementos en estado gaseoso presentan un espectro de emisión que les es característico, esto es fácilmente observable en el laboratorio, excitando átomos de hidrógeno y observando la luz emitida difractándola con un prisma.

En el seno de las estrellas, el espectro emitido es practicamente continuo, sin embargo en la periferia de las mismas se produce el efecto que comentáramos recién. En algún punto, ambos espectros interfieren, resultando en la cancelación de determinadas longitudes de onda, correspondientes al espectro característico de un elemento. Esto se denomina espectro de absorción.



La figura de la izquierda muestra un clásico espectro de absorción desplazado al rojo, mientras que la de la izquierda nos muestra un espectro corrido al azul.



Cálculos

Que el corrimiento sea hacia el rojo o hacia el azul nos da una idea de si la estrella se acerca o se aleja de nosotros, dado que el rojo es el color de frecuencia más baja (descenso de frecuencia) y el azul el de frecuencia más alta (aumento de frecuencia), es decir, las estrellas que se alejan de nosotros presentarán un corrimiento al rojo proporcional a la velocidad de escape: $\Delta\lambda / \lambda = v / c$, de donde calculamos $v = c.\Delta\lambda / \lambda$, para velocidades no relativistas. La ecuación relativista para el cálculo correcto de la velocidad es:

$$v = c\,\frac{\lambda_o^2 - \lambda^2}{\lambda^2 + \lambda_o^2}$$

Donde λ_o corresponde a la longitud de onda observada proveniente del espectro de absorción de la estrella, y λ es la longitud de onda conocida, observada en un espectro de emisión en laboratorio.

Consecuencias

Comunicaciones via satélite

Un satélite geoestacionario presenta un movimiento de oscilación alrededor de su órbita, es decir, se aleja y se acerca de la tierra regularmente. Este movimiento produce, por efecto Doppler, un desplazamiento de la frecuencia recibida. En consecuencia, el receptor terrestre recibirá una señal desplazada en frecuencia. En comunicaciones digitales de datos, esto significa que la velocidad de arribo de los datos es transitoriamente superior o inferior a la velocidad de sincronismo, por lo que se incluyen en los circuitos de los módems unos buffers destinados al almacenamiento temporario de la señal para absorber esta diferencia de velocidad.

Bibliografía

La Relatividad, Paul Couderc
El significado de la relatividad, Albert Einstein
Física Moderna, Paul A. Tipler
Paradoxes of Relativity Theory, Rangel Colessin PhD.
Documentos publicados por el Jet Propulsion Laboratory, NASA, USA
Documentos publicados por la University of Saskatchewan, Canadá
Documentos publicados por el Institute of Theorethical Science, University of Oregon, USA
Documentos publicados por el Physics & Astronomy Department, George Mason University, USA
Documentos publicados por el NCSA, University of Illinois, USA
Datos publicados por el Institut für Leichtbau und Flugzeugbau (ILFB), Technische Universität Wien (Instituto de Estructuras Livianas e Ingeniería Aeroespacial, Universidad Tecnológica de Viena, Austria)