

ÂNGULO SÓLIDO COM TRIÂNGULOS ISÓSCELES E ALGUMAS APLICAÇÕES

Por Amaral, L. C. M.
em 04/04/2007

INTRODUÇÃO

Seja um ponto a uma altura h do plano de um triângulo isósceles e sobre seu vértice principal. O artigo se propõe calcular o ângulo sólido sob o qual o ponto vê o triângulo. Algumas aplicações interessantes são mostradas.

CÁLCULO

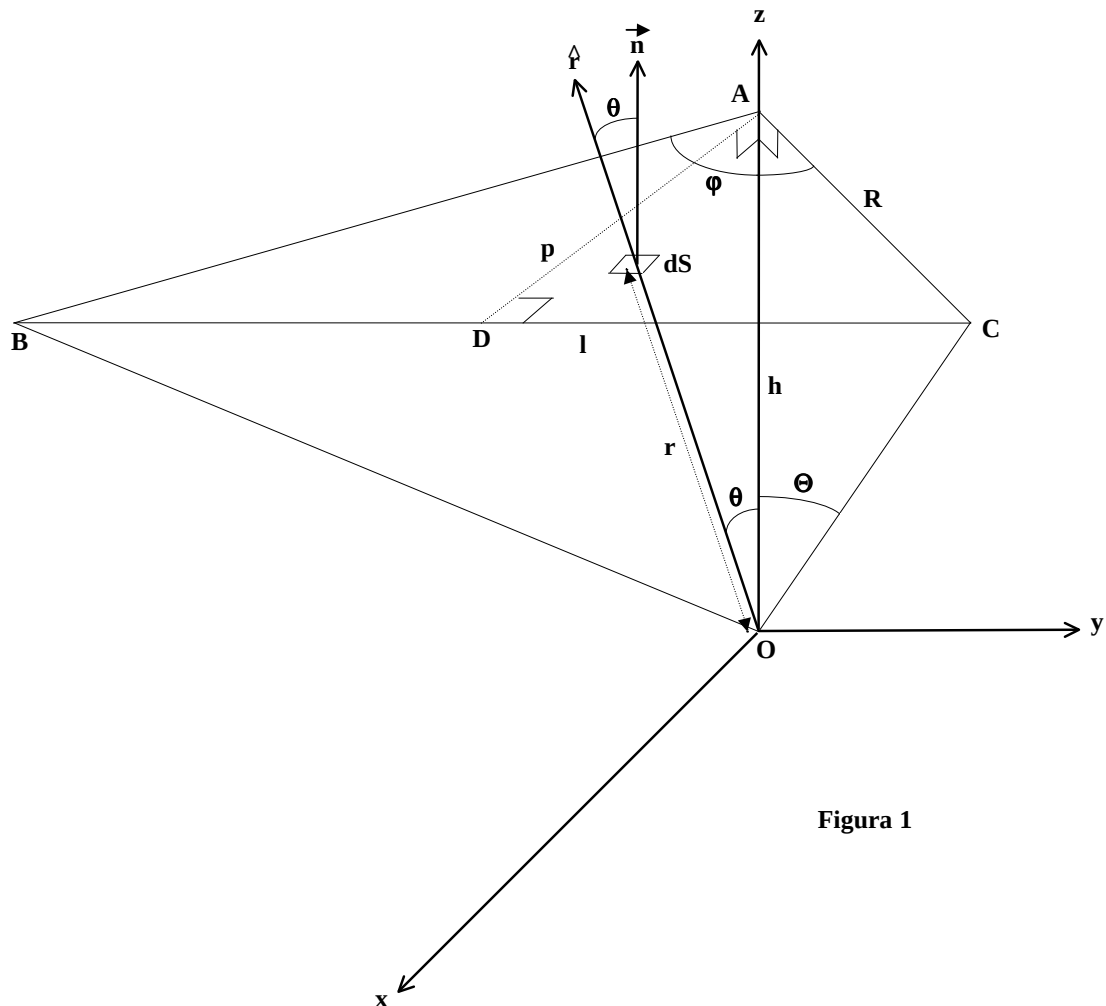


Figura 1

Seja, como na Figura 1, o triângulo isósceles **ABC** paralelo ao plano x-y e com a base **BC** = **l** e numa distância **h** do plano x-y.

Por Amaral, L. C. M. em 04/04/2007

O ponto **D** está, assim, sobre o plano **x-z**.

Vamos calcular o ângulo sólido sob o qual a origem vê o triângulo.

Para a área **dS**:

$d\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/r^2 \cdot dS$ com **n** = vetor unitário normal a **dS**
e **r** = vetor unitário na direção de **r**.

$$d\Omega = \cos \theta / r^2 \cdot dx \cdot dy = h \cdot dx \cdot dy / r^3$$

A reta suporte de **A-C** é dada por **z = h** e **y = tg φ/2** e a reta suporte de **A-B** é dada por **z = h** e **y = -tg φ/2**

O ângulo sólido é:

$$\Omega = h \cdot \int_0^{1/(2 \cdot \text{tg } \varphi/2)} dx \cdot \int_{-x \cdot \text{tg } \varphi/2}^{x \cdot \text{tg } \varphi/2} dy / r^3$$

A integral em **y** resulta em (ver **APÊNDICE**):

$$I_y = y / [(h^2 + x^2) \cdot (h^2 + x^2 + y^2)^{1/2}] \Big|_{-x \cdot \text{tg } \varphi/2}^{x \cdot \text{tg } \varphi/2} = 2 \cdot x / \{(h^2 + x^2) \cdot [h^2 + x^2 \cdot (1 + \text{tg}^2 \varphi/2)]^{1/2}\} \cdot \text{tg } \varphi/2$$

Assim tem-se:

$$\Omega = 2 \cdot h \cdot \text{tg } \varphi/2 \cdot \int_0^{x \cdot \text{tg } \varphi/2} x \cdot dx / \{(h^2 + x^2) \cdot [h^2 + x^2 \cdot (1 + \text{tg}^2 \varphi/2)]^{1/2}\}$$

$$\Omega = 2 \cdot h \cdot \text{tg } \varphi/2 \cdot \int_0^{x \cdot \text{tg } \varphi/2} x \cdot dx / [(h^2 + x^2) \cdot (k^2 + x^2)^{1/2}]$$

$$\text{Com } k = h / (1 + \text{tg}^2 \varphi/2)^{1/2}$$

A integral em **x** resulta em (ver **APÊNDICE**):

$$I_x = 1 / (h^2 - k^2)^{1/2} \cdot \{ \text{tg}^{-1} [(h^2 - k^2)^{1/2} / k] - \text{tg}^{-1} [2 \cdot \text{tg } \varphi/2 \cdot (h^2 - k^2)^{1/2} / (l^2 + 4 \cdot \text{tg}^2 \varphi/2)^{1/2}] \}$$

Com $k^2 = h^2 / (1 + \text{tg}^2 \varphi/2)$, tem-se:

$$\Omega = 2 \cdot \text{tg}^{-1} (\text{tg } \varphi/2) - 2 \cdot \text{tg}^{-1} \{ h \cdot \sin \varphi/2 \cdot 2 \cdot \text{tg } \varphi/2 / [l^2 + 4 \cdot h^2 \cdot \text{tg}^2 \varphi/2 / (1 + \text{tg}^2 \varphi/2)]^{1/2} \}$$

$$\Omega = 2 \cdot \varphi/2 - 2 \cdot \text{tg}^{-1} \{ 2 \cdot h \cdot \text{tg}^2 \varphi/2 / [l^2 \cdot (1 + \text{tg}^2 \varphi/2) + 4 \cdot h^2 \cdot \text{tg}^2 \varphi/2]^{1/2} \} \quad (\text{I})$$

(I) é a nossa **Equação Fundamental**.

APLICAÇÕES

1 - Seja o caso em que o ponto **P** está sobre o vértice de um triângulo qualquer **P'SQ** a uma altura **h** do plano deste, como na Figura 2.

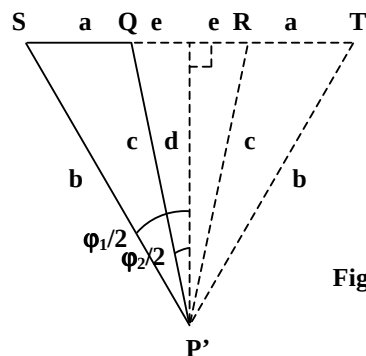


Figura 2

Por Amaral, L. C. M. em 04/04/2007

São dados **a**, **b**, **c** e **h**; **P'** é a projeção de **P** no plano do triângulo e está sobre o vértice oposto ao lado **a**. Com **b** sendo o maior dos dois lados restantes, constrói-se os dois triângulos isósceles **P'QR** e **P'RT**¹. O ângulo sólido **Ω** sob o qual **P** vê o triângulo **P'SQ** é dado obviamente por:

$$\Omega = (\Omega_1 - \Omega_2) / 2 \quad (\text{II})$$

Onde **Ω₁** e **Ω₂** são os ângulos sólidos relativos aos triângulos **P'ST** e **P'QR** respectivamente.

Tem-se ainda:

$$b^2 = d^2 + (a + e)^2$$

$$c^2 = d^2 + e^2$$

$$\text{ou } e = (b^2 - c^2 - a^2) / 2a$$

$$\text{tg } \varphi_1/2 = (a + e) / \sqrt{b^2 - (a + e)^2}$$

$$1 + \text{tg}^2 \varphi_1/2 = b^2 / [b^2 - (a + e)^2]$$

$$\text{tg } \varphi_2/2 = e / \sqrt{c^2 - e^2}$$

$$1 + \text{tg}^2 \varphi_2/2 = c^2 / (c^2 - e^2)$$

Usando-se (I), pode-se calcular **Ω₁** e **Ω₂** e tem-se para **Ω**:

$$\begin{aligned} \Omega = & \text{tg}^{-1} (b^2 - c^2 + a^2) / \sqrt{[2.(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2]} - \\ & - \text{tg}^{-1} h.(b^2 - c^2 + a^2) / \sqrt{[(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2] . (b^2 + h^2)} - \\ & - \text{tg}^{-1} (b^2 - c^2 - a^2) / \sqrt{[2.(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2]} + \\ & + \text{tg}^{-1} h.(b^2 - c^2 - a^2) / \sqrt{[(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2] . (c^2 + h^2)} \quad (\text{III}) \end{aligned}$$

Como qualquer polígono de **N** lados é visto por um ponto **P** através de **N** triângulos quaisquer, a expressão (III) é uma expressão fechada útil para se calcular o ângulo sólido sob o qual **P** vê o polígono. Este não necessita nem mesmo ser plano, podendo ser reverso no espaço, tendo de se levar em conta que para cada triângulo pode haver um plano diferente e os valores de **h** têm de ser cuidadosamente computados.

2 - Seja uma pirâmide regular reta de **N** lados de comprimento **l** e vértice situado na origem.

Assim $\varphi = 2.\pi/N$ e **Ω_T** = ângulo sólido sob o qual o vértice vê a base = **N.Ω**

$$\Omega = 2.\pi/N - 2.\text{tg}^{-1} \{2.h.\text{tg}^2 \pi/N / [l^2.(1 + \text{tg}^2 \pi/N) + 4.h^2.\text{tg}^2 \pi/N]^{1/2}\}$$

$$\Omega_T = 2.\pi - 2.N. \text{tg}^{-1} \{2.h.\text{tg}^2 \pi/N / [l^2.(1 + \text{tg}^2 \pi/N) + 4.h^2.\text{tg}^2 \pi/N]^{1/2}\}$$

$$\Omega_T = 2.\pi - 2.N. \text{tg}^{-1} [h.\text{tg} \pi/N / (l^2/\sin \pi/N + h^2)^{1/2}]$$

Se **R** = raio do círculo circunscrito à base, **R** = $l/(2. \sin \pi/N)$

$$\Omega_T = 2.\pi - 2.N. \text{tg}^{-1} [h.\text{tg} \pi/N / (R^2 + h^2)^{1/2}]$$

Mas $h/(R^2 + h^2)^{1/2} = \cos \Theta$ (ângulo entre a altura e a aresta lateral da pirâmide)

Então:

$$\Omega_T = 2.\pi - 2.N. \text{tg}^{-1} (\cos \Theta.\text{tg} \pi/N) \quad (\text{IV})$$

Por Amaral, L. C. M. em 04/04/2007

¹ O segmento **e** é a quantidade que falta para se completar um triângulo retângulo. Assim, se o ângulo em **Q** for agudo, **e** será negativo.

Alguns testes para (IV):

a - Se $\Theta = 0$ ($h \rightarrow \infty$), Ω_T deve ser nulo.

$$\Omega_T = 2\pi - 2N \cdot \text{tg}^{-1}(\text{tg } \pi/N) = 2\pi - 2\pi = 0$$

b - Se $\Theta = \pi/2$ ($h \rightarrow 0$), Ω deve ser 2π

$$\Omega_T = 2\pi - 2N \cdot \text{tg}^{-1} 0 = 2\pi$$

c - Se $N \rightarrow \infty$ temos um cone.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Omega_T = 2\pi - 2 \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{tg}^{-1}(\cos \Theta \cdot \text{tg } \pi/N)$$

Mas se $N \rightarrow \infty$, $\text{tg } \pi/N \rightarrow \pi/N$ e tende a zero e, portanto, $\cos \Theta \cdot \text{tg } \pi/N \rightarrow 0$ e

$$\text{tg}^{-1}(\cos \Theta \cdot \text{tg } \pi/N) \rightarrow \cos \Theta \cdot \pi/N$$

Assim $\Omega_T = 2\pi(1 - \cos \Theta)$, expressão bem conhecida.

3 - Por simples observação, vê-se que a razão linear entre um poliedro regular inscrito e outro semelhante circunscrito à mesma esfera é o co-seno do ângulo entre o segmento que vai do centro do poliedro ao centro de uma das bases e o segmento que vai do centro do poliedro ao vértice do mesmo. É, portanto, exatamente o ângulo Θ de uma pirâmide reta regular cujo vértice é o centro do poliedro e cuja base é a face do mesmo. As razões entre as áreas e entre os volumes dos dois poliedros são respectivamente $\cos^2 \Theta$ e $\cos^3 \Theta$.

De (IV) podemos tirar $\cos \Theta$:

$$\cos \Theta = \{\text{tg}[(2\pi - \Omega_T)/2N] / \text{tg}(\pi/N)\} \quad (\text{V})$$

Utilizando (V), calcular a razão de volumes R_v entre o poliedro inscrito e o circunscrito a uma esfera, para todos os 5 poliedros regulares.

Tetraedro: $N = 3$; $\Omega_T = \pi \therefore \cos \Theta = 1/3$ e $R_v = 1/27$

Cubo: $N = 4$; $\Omega_T = 2\pi/3 \therefore \cos \Theta = 1/\sqrt{3}$ e $R_v = \sqrt{3}/9$

Octaedro: $N = 6$; $\Omega_T = \pi/2 \therefore \cos \Theta = 1/\sqrt{3}$ e $R_v = \sqrt{3}/9$

Dodecaedro: $N = 5$; $\Omega_T = \pi/3 \therefore \cos \Theta = \sqrt{3}/[3 \cdot \text{tg}(\pi/5)]$ e $R_v = \sqrt{3}/[9 \cdot \text{tg}^3(\pi/5)]$

Icosaedro: $N = 3$; $\Omega_T = \pi/5 \therefore \cos \Theta = \text{tg}(3\pi/10)/\sqrt{3}$ e $R_v = \sqrt{3} \cdot \text{tg}^3(3\pi/10)/9$

Lembra-se que:

$$\text{tg}(\pi/5) = (5 - 2\sqrt{5})^{1/2}$$

$$\text{tg}(3\pi/10) = (\sqrt{5} - 2)^{1/2} \cdot (1 + \sqrt{5}) / [5^{1/4} \cdot (3 - \sqrt{5})]$$

4 - Pela utilização de (I), pode-se calcular o ângulo sólido no caso de qualquer pirâmide reta cuja base seja um polígono inscritível de N lados. Isto porque este último, obviamente, pode sempre ser dividido em N triângulos isósceles, com um vértice comum no centro do polígono. Dessa forma, a relação (I) pode ser utilizada calculando-se os ângulos sólidos sob os quais o vértice da pirâmide vê cada triângulo isósceles e somando esses ângulos sólidos.

5 - Aqui uma particularização interessante. Utilizando-se (I), é possível se calcular o ângulo sólido sob o qual um ponto do espaço vê um retângulo qualquer deste espaço, diretamente sem se usar (III).

Um retângulo, sempre inscritível, pode ser dividido em quatro triângulos isósceles iguais dois a dois, de modo que se pode usar (I) para se calcular o ângulo sólido sob o qual um ponto P , pertencendo à perpendicular que passa pelo centro do retângulo, vê este retângulo.

Usando-se se (I) para os quatro triângulos isósceles que formam o retângulo, o ângulo sólido Ω_R (sob o qual um ponto P a uma altura h do centro de um retângulo R de lados $2A$ e $2B$ o vê) é dado por:

$$\Omega_R = 2\pi - 4 \cdot \text{tg}^{-1}\{h \cdot A/[B \cdot (A^2 + B^2 + h^2)^{1/2}]\} - 4 \cdot \text{tg}^{-1}\{h \cdot B/[A \cdot (A^2 + B^2 + h^2)^{1/2}]\} \quad (\text{VI})$$

Por Amaral, L. C. M. em 04/04/2007

Vejamos agora o caso de um retângulo geral qualquer. A Figura 3 abaixo mostra um retângulo qualquer e a projeção P' de um ponto P sobre seu plano (a uma altura h deste). Procuramos o ângulo sólido Ω sob o qual P vê o retângulo.

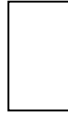


Figura 3

$\times$ P' = projeção do ponto P que está a uma altura h do papel.

A Figura 4 a seguir mostra a mesma figura anterior onde foram criados mais três retângulos idênticos ao original simplesmente pela reflexão sobre dois eixos que contém P' e são paralelos aos lados do retângulo original de lados $2a$ e $2b$. Agora o ponto P' está sobre no centro dos retângulos $(\alpha\delta\kappa\zeta)$, $(\beta\gamma\xi\psi)$, $(\epsilon\eta\mu\sigma)$ e $(\chi\lambda\nu\rho)$ e dista x e y do centro do retângulo original $(\alpha\beta\epsilon\chi)$.

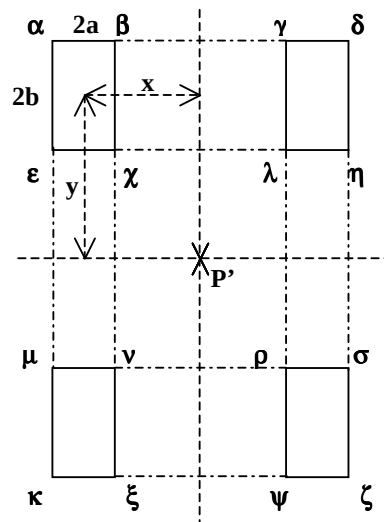


Figura 4

Seja Ω_1 o ângulo sólido sob o qual P vê $(\alpha\delta\kappa\zeta)$; Ω_2 o ângulo sólido sob o qual P vê $(\beta\gamma\xi\psi)$; Ω_3 o ângulo sólido sob o qual P vê $(\epsilon\eta\mu\sigma)$; Ω_4 o ângulo sólido sob o qual P vê $(\chi\lambda\nu\rho)$ e Ω o ângulo sólido sob o qual P vê o retângulo original $(\alpha\beta\epsilon\chi)$, que é o ângulo sólido procurado.

Vê-se claramente que $\Omega_1 = \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4 + 4 \cdot \Omega$

Assim tem-se para Ω :

$$\Omega = (\Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4)/4 \quad (\text{VII})$$

Usando-se (VI) em (VII) com:

$$A = x + a \text{ e } B = y + b \text{ para } \Omega_1$$

$$A = x - a \text{ e } B = y + b \text{ para } \Omega_2$$

$$A = x + a \text{ e } B = y - b \text{ para } \Omega_3$$

$$A = x - a \text{ e } B = y - b \text{ para } \Omega_4$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned}\Omega = & \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (x+a) / \{(y-b) \cdot [(x+a)^2 + (y-b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} + \\ & + \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (y-b) / \{(x+a) \cdot [(x+a)^2 + (y-b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} + \\ & + \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (x-a) / \{(y+b) \cdot [(x-a)^2 + (y+b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} + \\ & + \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (y+b) / \{(x-a) \cdot [(x-a)^2 + (y+b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} - \\ & - \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (x+a) / \{(y+b) \cdot [(x+a)^2 + (y+b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} - \\ & - \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (y+b) / \{(x+a) \cdot [(x+a)^2 + (y+b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} - \\ & - \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (x-a) / \{(y-b) \cdot [(x-a)^2 + (y-b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} - \\ & - \operatorname{tg}^{-1}\{h \cdot (y-b) / \{(x-a) \cdot [(x-a)^2 + (y-b)^2 + h^2]^{1/2}\}\} \quad (\text{VIII})\end{aligned}$$

Com certa manipulação, juntando-se dois a dois os oito termos de (VIII), obtém-se:

$$\begin{aligned}\Omega = & \operatorname{tg}^{-1}\{[(x+a)^2 + (y-b)^2 + h^2]^{1/2} \cdot h / [(x+a) \cdot (y-b)]\} + \\ & + \operatorname{tg}^{-1}\{[(x-a)^2 + (y+b)^2 + h^2]^{1/2} \cdot h / [(x-a) \cdot (y+b)]\} - \\ & - \operatorname{tg}^{-1}\{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + h^2]^{1/2} \cdot h / [(x+a) \cdot (y+b)]\} - \\ & - \operatorname{tg}^{-1}\{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + h^2]^{1/2} \cdot h / [(x-a) \cdot (y-b)]\} \quad (\text{IX})\end{aligned}$$

Testes podem ser efetuados sobre (IX) para comprovar sua validade. Por exemplo, fazendo-se $a=b$ no retângulo, obtém-se um quadrado e pondo-se $x=a$ e $y=b$ para o ponto P' , este coincide com o ponto χ (vértice do quadrado). Escolhendo-se $h=2.a$, o ponto P estará, com (IX), vendo 1/4 da face de um cubo e situado em seu centro. Multiplicando-se por 4 o ângulo sólido obtido, tem-se o ângulo sólido sob o qual o centro de um cubo vê uma das faces e se obtém $2\pi/3$, que, multiplicado por 6 (o número de faces), resulta em 4π .

É possível condensar (IX) mais ainda, mas sua expressão não parece ficar mais conveniente.

Fazendo-se $\Omega = \Omega_0 = \text{cte}$ e $h = z$, agora variável, temos uma relação transcendente entre x , y e z que corresponde à equação da 'superfície equi-ângulo sólido' para o valor Ω_0 e para o retângulo fixo $(\alpha\beta\epsilon\chi)$.

(VII) é uma expressão complexa, porém exata para o ângulo sólido que um ponto qualquer P no espaço vê um retângulo de dimensões, posição e orientação espacial arbitrárias.

É claro que isso poderia ter sido feito através da expressão (III) onde o polígono seria o retângulo em questão, mas (IX) é uma expressão bem mais simples por não necessitar de se ter previamente os comprimentos de todos os triângulos quaisquer envolvidos.

APÊNDICE.

$$1 - I_y = \int dy/r^3 = \int dy/(x^2+y^2+z^2)^{3/2} = \int dy/(b^2+y^2)^{3/2} = 1/b^3 \cdot \int dy/(1+y^2/b^2)^{3/2}$$

$$\text{Com } y/b = \operatorname{tg} \alpha, dy = b \cdot (1+\operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot d\alpha$$

$$\text{e } I_y = 1/b^2 \cdot \int (1+\operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot d\alpha / (1+\operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2} = 1/b^2 \cdot \int 1/(1+\operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} \cdot d\alpha = 1/b^2 \cdot \int \cos \alpha \cdot d\alpha = \sin(\alpha) / b^2 =$$

$$= (y/b) / [b^2 \cdot (1+y^2/b^2)^{1/2}] = y / [b^2 \cdot (b^2+y^2)^{1/2}]$$

$$\text{e } I_y = y / [(x^2+h^2) \cdot (x^2+h^2+y^2)^{1/2}]$$

$$2 - I_x = \int x \cdot dx / (x^2+h^2)(x^2+k^2)^{1/2}$$

$$\text{Com } x/k = \operatorname{tg} \alpha, dx = k \cdot (1+\operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot d\alpha \text{ e } \cos \alpha = k/(x^2+k^2)^{1/2}$$

$$I_x = \int \operatorname{tg} \alpha \cdot (1+\operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot d\alpha / [(h^2+k^2) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1+\operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}] = k \cdot \int \sin \alpha \cdot d\alpha / (h^2 \cdot \cos^2 \alpha + k^2 \cdot \sin^2 \alpha) =$$

$$= k \cdot \int \sin \alpha \cdot d\alpha / [(h^2-k^2) \cdot \cos^2 \alpha + k^2] = 1/k \cdot \int \sin \alpha \cdot d\alpha / [(h^2-k^2)/k^2 \cdot \cos^2 \alpha + 1] =$$

$$= 1/(h^2-k^2)^{1/2} \cdot \int [(h^2-k^2)^{1/2}/k] \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha / [(h^2-k^2)/k^2 \cdot \cos^2 \alpha + 1] = 1/(h^2-k^2)^{1/2} \cdot \int du/(u^2+1) =$$

$$= 1/(h^2-k^2)^{1/2} \cdot \operatorname{tg}^{-1} u = 1/(h^2-k^2)^{1/2} \cdot \operatorname{tg}^{-1} [(h^2-k^2)^{1/2}/(k^2+x^2)^{1/2}]$$

$$\text{e } I_y = 1/(h^2-k^2)^{1/2} \cdot \operatorname{tg}^{-1} [(h^2-k^2)^{1/2}/(k^2+x^2)^{1/2}]$$

As constantes de integração foram todas feitas nulas por simplicidade.

Por Amaral, L. C. M. em 04/04/2007

SOBRE O AUTOR

Luiz Cândido Motta do Amaral é Bacharel e Mestre em Física pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e assina seus trabalhos como Amaral, L. C. M.

Por Amaral, L. C. M. em 04/04/2007