# Cálculo numérico Trabajo práctico Nro 6
## Ecuaciones diferenciales ordinarias

**1.** Considere el problema de valor inicial $y'(t) = t\,y(t), \quad y(0) = 1$. Obtener una solución aproximada en (0,1) usando el método de Euler con paso $h = 0.25$.

La solución con calculadora o en planilla de cálculo:

| $k$ | $t_k$ | $y_k$ | $f(t_k, y_k)$ | $exacta_k$ | $error_k$ | $error\,rel_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0.25 | 1 | 0.25 | 1.03174 | 0.032 | 0.0307668 |
| 2 | 0.5 | 1.0625 | 0.53125 | 1.13315 | 0.071 | 0.062347 |
| 3 | 0.75 | 1.195313 | 0.896484 | 1.32478 | 0.129 | 0.0977308 |
| 4 | 1 | 1.419434 | 1.419434 | 1.64872 | 0.229 | 0.13907 |

Con *Matlab*:

```
% Un ejemplo con el método de Euler
% y'= t*y , y(0)=1
h=0.25; y(1)=1;
for k=1:5
             y(k+1)=y(k)+(k-1)*h*y(k)*h;
end
t=(0:4)*h;
resp=y(1:5);
[t' resp']
exacta=exp(t.*t/2);
plot(t,exacta,t,resp,'o')
[t' abs((resp'-exacta')./exacta')]
```

**2.** Para el problema de valor inicial

$$y'(t) = -20\,y(t) + 7\,\exp(-0.5\,t), \quad y(0) = 5,$$

obtener la solución aproximada en $(0, a)$ usando el método de Euler. Considerar dos casos:

1. $a = 2 \quad h =$0.1.
2. $a = 5 \quad h = 1$.

Comentar lo observado. La solución exacta del problema es

$$y(t) = 5\,\exp(-20\,t) + \frac{14}{39}\,(\exp(-0.5\,t) - \exp(-20\,t))$$

**3.** Para el problema de valor inicial $y'(t) = -2\,y(t), \quad y(0) = 1$, obtener la solución aproximada en $(0, 0.1)$ usando el método de Euler. Considerar tres casos:

1. $h = 0.02$
2. $h = 0.01$
3. $h = 0.001$. Comentar lo observado.

Como en este problema se puede obtener la solución exacta se puede experimentar con la elección del paso $h$, por ejemplo para lograr que el valor aproximado de $y(0{,}1)$ difiera del exacto en un porcentaje dado (1 % de error relativo por ejemplo).

**4. El problema del paracaidista.** Un hombre atrevido es llevado en un avión para hacer un lanzamiento acrobático con paracaídas. Se lanza desde una altura $H$. La masa conjunta del hombre y el paracaídas es de 75 Kg. Sea $v(t)$ la velocidad (en metros por segundo) $t$ segundos después del lanzamiento.
Durante los primeros 50 segundos de caída y antes de abrirse el paracaídas se supone que la resistencia del aire es 0.5 Kg/m $v^2(t)$. Después, una vez abierto el paracaídas, la resistencia del aire aumenta a 10 Kg/m $v^2(t)$. Se supone que la aceleración de la gravedad es 10 $\frac{m}{s^2}$.

1. Usando el método de Euler obtener una aproximación de la velocidad en función del tiempo.
2. Representar gráficamente la aceleración y la velocidad en función del tiempo.
3. Determinar en forma aproximada la altura $H$ si el tiempo total de caída es 100 s.

```
% El paracaidista en Matlab

m=75;TL=50;T=100;
g=10;b1=0.5;b2=10;

h=0.055; N=ceil(T/h);
t=0;v=zeros(1,N);acel=zeros(1,N);k=1;

while(t<T)
            beta=b1*(t<TL)+b2*(t>=TL);
            acel(k)=g-beta*(v(k)*v(k))/m;
            v(k+1)=v(k)+h*acel(k);
            k=k+1;
            t=t+h;
end
tiempo=0:h:T;
velocidad=v(1:length(tiempo));
aceleracion=acel(1:length(tiempo));
figure(1),plot(tiempo,velocidad)
figure(2), plot(tiempo,aceleracion)
```

**5.** Para el problema de valor inicial $y'(t) = -y(t) + t, \quad y(0) = 1$, obtener la solución aproximada en $(0, 1)$ usando el método de Heun. Como en este caso se puede obtener la solución exacta se puede experimentar con la elección del paso $h$, por ejemplo para lograr que el valor aproximado de $y(1)$ difiera del exacto en un porcentaje dado (1 % de error relativo por ejemplo).

**6.** Considere el problema de valor inicial

$$y'(t) = -20\, y(t) + 7 \exp(-0.5t), \quad y(0) = 5.$$

Obtener la solución aproximada en $(0, a)$ usando el método de Heun. Considerar $a = 2$, $h = 0.1$.

**7.** Considere el problema de valor inicial $y'(t) = -2\,y(t)$, $y(0) = 1$. Obtener la solución aproximada en $(0, 0.1)$ usando el método de Heun. Considerar dos casos: a) $h = 0.02$ b) $h = 0.01$.
Utilice la siguiente función de *Matlab* que implementa el método de Heun. Es necesario escribir un archivo `.m` que calcule la función $f$ que da la derivada de la función incógnita $y$.

```
function H=heun(f,a,b,ya,M)
%Entradas
%  - f es la función que da la derivada ingresada como una
%      cadena de caracteres 'f'
%  -  a y b son los extremos del intervalo de integración
%  -  ya es la condición inicial y(a)
%  -  M es el número de pasos
%Salida
%  - H=[T' Y'] donde T es el vector de las abscisas e Y el
%    vector de la solución aproximada.

h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
Y(1)=ya;
       for j=1:M
            k1=feval(f,T(j),Y(j));
            k2=feval(f,T(j+1),Y(j)+h*k1);
            Y(j+1)=Y(j)+(h/2)*(k1+k2);
       end
H=[T' Y'];
```

**8. El oscilador armónico simple.** Se puede plantear el método de Euler para resolver en forma aproximada un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de segundo orden (o de orden superior) o un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo consideremos el problema del oscilador armónico simple:

$$y''(t) = -4\,y(t) \qquad y(0) = 1,\; y'(0) = 0.$$

La ecuación diferencial de segundo orden se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden introduciendo la función auxiliar $v(t) = y'(t)$. Así resulta el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -4\,y(t) \\ y(0) &= 1 \\ v(0) &= 0. \end{aligned}$$

El método de Euler aplicado en este caso y para un paso de integración $h$ resulta en el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\, v_k \\ v_{k+1} &= v_k - 4\, h\, y_k \\ y_0 &= 1 \\ v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Analizar lo que resulta si se desea obtener $y(t)$ en $(0,\, 5)$ con este método con varios valores de $h$.
Plantear luego con el método de Heun y extraer alguna conclusión.

**9. El ilustre péndulo matemático.** La popularidad de este viejo conocido hace que no sea necesario explicar de que se trata...
La ecuación diferencial para el ángulo $\theta$ que el hilo (ó barra de masa despreciable) forma con la vertical es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\, \sin(\theta)$$

donde $\ddot{\theta}$ es la derivada segunda del ángulo $\theta$ respecto del tiempo , $l$ la longitud del péndulo y $g$ la aceleración de la gravedad. Esta ecuación diferencial es **no lineal** en la incognita $\theta$ (el seno no es una función lineal) pero se puede hacer una aproximación lineal del seno con lo cual la ecuación diferencial será lineal para *pequeñas oscilaciones* o de pequeña amplitud alrededor de $\theta = 0$ que es la posición de equilibrio estable del péndulo.
El movimiento es periódico si se desprecia la acción de alguna fuerza resistente, de aquí ya queda fijado cuál es el tiempo característico de este problema.
Si las oscilaciones son de pequeña amplitud el período $T$ es constante

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

La situación es otra si las amplitudes son *grandes*, en ese caso el período es dependiente de la amplitud de la oscilación (una novedad).

**El péndulo sin amortiguamiento**
Obtener la solución aproximada con el método de Heun para la ecuación horaria y la velocidad del péndulo matemático para grandes amplitudes si la longitud de la barra de masa despreciable al extremo de la cuál se sujeta un cuerpo de masa $m$ es 1 m y la aceleración de la gravedad es 10 $\frac{m}{s^2}$. Resolver para las siguientes amplitudes iniciales (en radianes) suponiendo velocidad inicial nula: a) 0.1 b) .5 c) 1 d) 2 e) 3 f) 3.1.
En cada caso determinar aproximadamente el período.

**El péndulo con amortiguamiento**
En este caso se puede usar el método de Euler sin modificación alguna.
Por ejemplo considerar un amortiguamiento de módulo proporcional a la velocidad instantánea. Suponga una amplitud inicial grande (2 ó 3) y estime (ensayo y error ...) un valor para el coeficiente de amortiguamiento de manera tal que en pocas pasadas por la posición de equilibrio prácticamente se detenga.

Realizar la representación de la velocidad en función de la posición (denominada representación en el espacio de las fases). Observe diferencias con lo obtenido para el caso sin amortiguamiento.

Una primera implementación en *Matlab*

```
h=0.01;T=10;
N=ceil(T/h);t=h*(0:N);
y(1)=1;v(1)=0;

for k=1:N
            k1=h*v(k);
            m1=(-10*sin(y(k)))*h;
            k2=k1+h*m1;
            m2=-h*10*sin(y(k)+k1);
            y(k+1)=y(k)+0.5*(k1+k2);
            v(k+1)=v(k)+0.5*(m1+m2);
end
plot(t,y)
```

**10.** Considere el siguiente problema de valor inicial $y'(t) = f(t)$, $y(0) = 0$. La función $f$ es continua por tramos, por consiguiente integrable.
La solución viene dada por

$$y(t) = \int_0^t f(s)\,ds$$

1. Obtener aproximaciones a la solución del problema inicial es equivalente a aproximar la integral de $f$ en $(0, t)$. Supongamos que se desea aproximar $y(T)$. El intervalo $(0, T)$ se parte en $N$ subintervalos de longitud $h = \frac{T}{N}$. Usando el método de Euler en los nodos $t_k = k\,h$ demostrar que:

   $$y(T) \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)$$

   Suponiendo que $f$ sea no negativa en $(0, T)$ observar que este resultado es una aproximación del área bajo el gráfico de $f$ por una suma de áreas de rectángulos de base $h$ y alturas $f(t_k)$.
2. Repetir el item anterior pero usando el método de Heun. Verificar que en este caso los rectángulos son reeemplazados por trapecios.

**11.** La ecuación diferencial de *Duffing*

$$x''(t) + x(t) + r\,x^3 = 0,$$

donde $r$ es una constante, es un modelo matemático para las oscilaciones de elongación instantánea $x(t)$ de una masa sujeta a un resorte *no lineal* sin amortiguamiento.
Para este modelo, ¿varía el período de vibración cuando cambia el parámetro $r$? ¿Varía el período cuando las condiciones iniciales se modifican?
Para responder a estas preguntas use el método de *Runge-Kutta* de orden 4 con paso temporal $h = 0.05$ para aproximar las soluciones, con $r$ tomando los valores 1, 2, 3 y 4 con condiciones iniciales $x(0) = a, \quad x'(0) = 0$, para la

posición inicial $a$ variando desde 0.2 hasta 3 en pasos de 0.2.
Haga una tabla de doble entrada para el período aproximado en función de $r$ y $a$ para los valores indicados de estos parámetros.
Acompañe con gráficos para la posición $x(t)$ y la velocidad $x'(t)$ en función del tiempo asi como de la velocidad en función de la posición (mapa de fases) para $r = 1$ y $a$= 1.5.

**12.** A continuación se muestran funciones en *Matlab* que implementan el cálculo de la derivada de una función (o de un vector) y que pueden ser utilizadas para aproximar la solución de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Utilizar el método de *Runge-Kutta* de orden 4 para obtener soluciones aproximadas en el intervalo indicado en cada caso.

1. Archivo `d.m` que implementa el cálculo de la derivada

```
function s = d(t,y)
s=-0.5*sign(y)+sin(2*t);
end
```

   Hacer una elección del paso $h$ y de la longitud del intervalo de $t$ para la aproximación de la solución.
   Nota: La ecuación diferencial modela la evolución de la velocidad de un punto material de masa $m = 1$ sobre el que actúa una fuerza de rozamiento coulombiano ( 0.5 es el producto $\mu\, g$ ) en un plano horizontal y una fuerza periódica dada por $\sin(2t)$. Suponga que la velocidad inicial es 1 y que el intervalo de tiempo de análisis es (0,10).

2. Archivo `poblac.m` que implementa el cálculo de la derivada

```
function s = poblac(t,y)
s=y*(1-(y/1000))+400*(t>15);
end
```

   Nota: La ecuación diferencial modela la población de cierta especie con el modelo denominado *logístico* (crecimiento exponencial para pequeños valores de la población y población estacionaria constante para valores próximos a 1000 en este ejemplo). A partir de $t = 15$ se supone que cada unidad de tiempo se añaden 400 individuos a esta población (como si se tratase de una inmigración). Se sugiere tomar 500 como población inicial y que el intervalo de tiempo de análisis sea (0,40).

3. Archivo `deriv.m` que implementa el cálculo de la derivada

```
function deriv = oscila(t,y);
deriv(1) = y(2);
deriv(2) = -0.2*y(2)-10*y(1);
end
```

   Nota: La ecuación diferencial modela la evolución de la posición de un oscilador masa-resorte-amortiguador ($m = 1\,, b = 0.2$ y $k = 10$) en una dimensión. Considerar el intervalo (0,10), la posición inicial 3 y la velocidad inicial 0.

4. Archivo `rigido.m` que implementa el cálculo de la derivada

```
function derivw = rigido(t,w)
I1=3 ;I2=4 ;I3=1.5;
a=(I2-I3)/I1;
```

```
b=(I3-I1)/I2;
c=(I1-I2)/I3;
derivw(1) =a*w(2)*w(3);
derivw(2) =b*w(1)*w(3);
derivw(3) =c*w(1)*w(2);
end
```

Nota: El sistema de ecuaciones diferenciales modela la evolución temporal de las tres componentes $\omega_1$, $\omega_2$, y $\omega_3$ del vector rotación de un cuerpo rígido asimétrico de momentos de inercia principales $I_1$, $I_2$ e $I_3$. El planteo se realiza con las ecuaciones de Euler. Suponga que las condiciones iniciales para las componentes del vector rotación son ( 0 0.2 1 ) y que el intervalo de tiempo de interés es (0,20).