CÁLCULO NUMÉRICO
TRABAJO PRÁCTICO NRO 3
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

FRANCISCO VILLAVERDE

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando eliminación gaussiana:

1.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3\,x_3 &= 2 \\ 3\,x1 - 3\,x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_1 - 0.5\,x_2 + x_3 &= 4 \\ 2\,x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - 0.5\,x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

En *Matlab*

```
inv([1 -0.5 1 0; 2 -1 -1 1; 1 1 0 0; 1 -0.5 1 1])*[4;5;2;5]
```

2. Obtener el polinomio de grado 3 cuyo gráfico pasa por los puntos (-1,1), (0,3), (1,5) y (2,17).
Rta: $P(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$.

En *Matlab*

```
A=[-1 1 -1 1;0 0 0 1;1 1 1 1;8 4 2 1];
Y=[-1;3;5;7];
coef=inv(A)*Y
```

3. Obtener el polinomio $P(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ de grado 3 que satisface: $P(1) = 1.5$, $P(2)$ =1.2, $P'(1)$ = -0.2 y $P'(2)$ =0.8.
Rta: $P(x) = 1.2\ x^3$ - 4.9 x^2 + 6 x - 0.8

4. Obtener la función $f(x)$ definida en [1, 3], con segunda derivada continua en (1,3) que es un polinomio P de grado 3 en (1,2], y el polinomio Q de grado 3 en [2, 3). Son datos: $f(1) = 4$; $f(2) = 3$; $f(3) = 6$; $f''(1) = 0$ y $f''(3) = 0$.
Plantear y resolver el sistema de 8 ecuaciones en las 8 incógnitas (los coeficientes de los dos polinomios).

5. Distribución de temperaturas en régimen estacionario.
Se desea obtener la distribución de temperaturas en régimen estacionario en una placa cuadrada cuyos bordes se mantienen a ciertas temperaturas constantes. Para aproximar dicha distribución se toman 9 puntos interiores (tres filas de tres puntos

equidistanciados en horizontal y vertical). Los puntos se numeran de 1 a 9 de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.
Se puede demostrar que en régimen estacionario la temperatura en un punto interior es aproximadamente el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda. Suponga que el borde superior se mantiene a 100°C, los laterales se mantienen en cada instante a 50°C mientras que el borde inferior se encuentra a 0°C.

1. Usando esta suposición establezca un sistema de ecuaciones para las aproximaciones T_1 a T_9 a las temperaturas en régimen estacionario en los nueve puntos interiores, considerando primero el punto 1, después el punto 2, etc. Por ejemplo, para T_1 se tiene:
$$T_1 = \frac{100 + T_2 + T_4 + 50}{4}$$
que se puede reescribir como $4T_1 - T_2 - T_4 = 150$.
2. Obtenga la matriz de coeficientes y la matriz ampliada para el sistema de ecuaciones lineales planteado. Describa el patrón que observe en la forma de la matriz de coeficientes. Tal matriz se llama *matriz de banda*.
3. Resuelva el sistema de ecuaciones por eliminación de Gauss.

En *Matlab* resuelva el sistema usando el comando `rref`. Suponga que `A` es la matriz de coeficientes y `b` el vector columna de términos independientes. Para usar `rref` tenga en cuenta que opera sobre la matriz ampliada `[A b]`.
Para resolver el sistema de ecuaciones puede usarse el comando `y = A  b`.

6. Considere el sistema de ecuaciones lineales `A x = b` donde:

```
A=[4 1 0 0;1 4 1 0;0 1 4 1;0 0 1 4];
b=ones(4,1);
```

1. Resolverlo como sistema tridiagonal (eliminación gaussiana y luego sustitución hacia atrás). Dar la respuesta con tres decimales.
2. ¿Cuántas multiplicaciones se requieren para resolver un sistema tridiagonal de n ecuaciones lineales con n incógnitas ? Justificar la respuesta.

7. Considere el sistema de ecuaciones lineales `A x = b` donde

```
A=[2 -1 0 0;-1 2 -1 0;0 -1 2 -1;0 0 -1 2];
b=[1;2;2;1];
```

1. Resolverlo como sistema tridiagonal (eliminación gaussiana y luego sustitución hacia atrás). Dar la respuesta con tres decimales.
2. Hacer la descomposición LU de la matriz `A` y resolver el sistema de ecuaciones usando esa factorización si `b=[1;0;0;1]`.

8. El sistema de ecuaciones lineales `S X = Y` con

```
S=[20514  4424  978  224; 4424  978  224  54; 978  224  54  14;224  54  14  4];
Y=[20514; 4424; 978; 224];
```

tiene como solución a `(1,0, 0, 0)` ya que `Y` es la primera columna de `S`.
Para analizar la sensibilidad de la respuesta a cambios en `Y` obtenga la solución del sistema adicionando a `Y` el vector `0.001*[1 1 1 1]'`.
En *Matlab*

```
S=[20514 4424 978 224; 4424 978 224 54; 978 224 54 14;224 54 14 4];
Y=[20514; 4424; 978; 224];
inv(S)*(Y+0.001*[1 1 1 1]')
```

9. El siguiente código en *Matlab* implementa la solución de un sistema de ecuaciones en forma iterativa pero tiene tres errores que determinaran mensajes de error cuando se lo invoque.

```
function X=iterslin(A,B,P,delta,max1)
N = length(B);
for k=1:max1
       for j=1:N-1
                 X(j)=(B(j)-A(j,[1:j-1,j+1:N])*P([1:j,j+1:N]))/A(j,j);
       end
       err=abs(norm(X'-P));
       P=X';
              if (err>delta)
                     break
             end
end
```

1. Cuál es el método iterativo y cuáles son los errores en el código ? Explique brevemente.
2. Indique el significado de cada uno de los 5 argumentos de entrada de la función `iterslin`.

10. El siguiente código en *Matlab* genera la matriz `A` y el vector `b` de un sistema de ecuaciones lineales. Resolverlo usando eliminación gaussiana y por el método iterativo de Gauss Seidel.
Observar que la matriz del sistema es tridiagonal (una matriz esparcida), simétrica, dominante diagonal estrictamente (por consiguiente no singular) y definida positiva (todos sus autovalores son positivos).

```
N=20;
A(1,:)=[ 2.05 -1 zeros(1,N-2)];
A(N,:)=[ zeros(1,N-2) -1  2.05];
A(2,:)=[ -1 2.05 -1 zeros(1,N-3)];
A(N-1,:)=[ zeros(1,N-3) -1   2.05  -1];
for k=3:N-2
          A(k,:)=[ zeros(1,k-2) -1 2.05 -1 zeros(1,N-(k+1))];
end
A
colormap(gray); image(20*(A+2))
disp('autovalores de A ' ) ; eig(A)
b=[1:N/2 N/2:-1:1]; b=b';
```

11. Considere el sistema de ecuaciones lineales `A x = b` donde

`A = [11 13; 11 -9] ; b = [286; 99]`

Resolver el sistema con el método de Gauss-Seidel partiendo de [0 ; 0]. Volver a resolverlo cambiando el orden de las ecuaciones, esto es:

```
A = [11 -9; 11 13];
b = [99; 286].
```

Observar que en un caso se obtiene una sucesión convergente mientras que en el otro caso resulta divergente.

12. Considere el sistema de ecuaciones lineales `A x = b`donde

```
A=[10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 -1;0 3 -1 8];
b=[6;25;-11; 15];
```

Resolver el sistema con los métodos iterativos de Jacoby y Gauss-Seidel (por ejemplo usando una planilla electrónica de cálculo).
Verificar que el método de Jacoby en este ejemplo puede escribirse de la siguiente manera

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

donde $x^{(k)}$ es el vector de aproximación a la solución en el paso k, y la matriz T y el vector c son:

```
T = [0 1/10  -1/5 0; 1/11 0 1/11 -3/11; -1/5 1/10 0 1/10; 0 -3/8 1/8 0];
C = [3/5; 25/11; -11/10; 15/8]
```

13. El problema de la determinación aproximada de la forma de una viga fija en ambos extremos sometida a carga distribuida conduce a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas son las ordenadas de la curva llamada *elástica* (que es la forma de la viga).
La viga de longitud L se subdivide en N intervalos y de la discretización del problema de valor en la frontera del cual es solución la elástica se obtiene un sistema de ecuaciones lineales. Sean M la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones e Y el vector de términos independientes.
El siguiente código en *Matlab* genera la matriz M y el vector Y:

```
h=5/N; % aquí se consideró L = 5
alfa=(2+0.32*h^2);
D=diag(ones(N-1,1)*alfa);
DU=diag(ones(N-2,1),1);DL=diag(ones(N-2,1),-1);
M=D+DU+DL;
Y=(1:N-1).*((1:N-1)*h-5)*1.25*h^3;
```

1. Escribir la matriz M y el vector Y si $N = 5$.
2. Resolver el sistema de ecuaciones con el método de Gauss Seidel (para una cota de error de 0.0001) y representar gráficamente los valores de las incógnitas para los siguientes valores de N: 10, 20 y 100.

Nota: La ordenada de la elástica es nula en ambos extremos de la viga (ya que está fija en ambos extremos).