Cálculo Numérico Trabajo práctico Nro 2
Ecuaciones no lineales

1. Obtener una cota al número de iteraciones necesarias del método de bisección para alcanzar una aproximación con precisión de 10^{-3} de la raíz real de $x^3 + x - 4 = 0$ en $(1, 4)$. Encontrar dicha aproximación a la raíz.

2. Usar el método de bisección para obtener con un error menor que 10^{-3} la raíz de $x\,2^x - 1 = 0$ en el intervalo $(0, 1)$.

3. Considerar el esquema iterativo $x_{k+1} = f(x_k)$ para las funciones:

1. $f(x) = 2x - a\,x^2$
2. $f(x) = 0.5\,(x - \frac{a}{x})$
3. $f(x) = \cos(x)$
4. $f(x) = \exp(x)$
5. $f(x) = \exp(-x)$

Analizar en cada caso la convergencia de la sucesión obtenida.
Hacer gráficos mostrando los gráficos de f, la función identidad y los sucesivos términos de la sucesión generada.

4. La ecuación $\exp(\frac{x}{4}) = x$ tiene dos raíces reales. Verificar que sólo una de ellas puede obtenerse con el método de punto fijo en la forma $x_{k+1} = \exp(\frac{x_k}{4})$. Explicar porqué no puede obtenerse la otra de esta manera. Obtener una aproximación a la raíz que sí puede obtenerse con un error menor que 10^{-3}.
En la línea de comando de *Matlab*:

```
x(1)=1;for k=1:10;x(k+1)=exp(x(k)/4);end;x'
```

5. Obtener la raíz de $\exp(x) = \sin(x)$ más próxima a cero con un error menor que 10^{-3}. En la línea de comando de *Matlab* y usando el método de Newton los primeros 11 términos de la sucesión obtenida a partir de -3:

```
x(1)=-3;
for k=1:10
          a=x(k);
          x(k+1)=a-(exp(a)-sin(a))/(exp(a)-cos(a));
end
x'
```

6. Desarrollar dos procedimientos iterativos de punto fijo para obtener el cero de $f(x) = 2\,x^2 + 6\,\exp(-x) - 4$ en $[0.5,\ 0.7]$. Obtener el cero con un error menor que 10^{-3}.

7. Obtener una aproximación de la raíz en (1,2) de $x^3 - x - 1 = 0$ usando un esquema iterativo de punto fijo con un error menor que 10^{-2}.

8. Realizar 4 iteraciones del método de Newton para el polinomio $P(x) = 4\,x^3 - 2\,x^2 + 3$ a partir del valor inicial $x_0 = -1$.

9. Obtener una fórmula iterativa usando el método de Newton para aproximar el cálculo de $R^{\frac{1}{3}}$ con $R \geq 0$. Hacer un análisis con un gráfico y determinar los valores iniciales para los cuáles la fórmula iterativa converge.

10. La ecuación $2\,x^4 + 24\,x^3 + 61\,x^2 - 16\,x + 1 = 0$ tiene dos raíces cercanas a 0.1. Determinarlas usando el método de Newton.

11. Para obtener la localización del máximo de la densidad espectral de la energía para la radiación del cuerpo negro con el modelo de Planck hay que resolver la siguiente ecuación trascendente:

$$e^{-x} + \frac{1}{5}\,x - 1 = 0.$$

Determinar x con cuatro decimales correctos. Usar el método de iteración a punto fijo y mostrar un gráfico de *escalera* con las sucesivas iteraciones.

12. Obtener la localización de los primeros 3 máximos (con $x \geq 0$) de la función $f(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ (intensidad del patrón de difracción lejana para una ranura).

13. Una masa de l kg de CO está contenida en un recipiente a una temperatura T = 215 °K y presión p = 70 bars. Calcular el volumen del gas utilizando la ecuación de estado de Van der Waals para un gas no ideal, dada por:

$$(p + \frac{a}{v^2})\,(v - b) = nRT$$

donde R =0.08314 $\frac{bar\, m^3}{kg\, mol\, °K}$, a = 1.463 $\frac{bar\, m^6}{kg^2}$ y b = 0.0394 $\frac{m^3}{kg}$.
Determinar el volumen v (en $\frac{m^3}{kg}$) con tres decimales correctos y comparar los resultados con el volumen calculado por la ecuación del gas ideal $pv = nRT$.

14. Las frecuencias naturales de vibración de una varilla uniforme sujeta por un extremo y libre en el otro son soluciones de:

$$1 + \cos z\, \cosh z = 0$$

donde z es el parámetro adimensional con el que se determinan esas frecuencias naturales. Usando el método de Newton a partir de $z = 2$ obtener el menor valor positivo de z con un error menor que 10^{-2}.

15. El código (en *Matlab*) que se muestra más abajo implementa la solución de un problema.

1. Indicar un problema del cuál dicho procedimiento aproxima su solución. Hacer una interpretación gráfica.
2. Usando una calculadora, y redondeando a tres decimales, obtener la aproximación con error menor que 0.001 a la solución del problema.

```
a=0.6;
N=10;
x(1)=a;
for k=1:N
```

```
        x(k+1)=sqrt(exp(-x(k)));
end
x'
```

16. La curva formada por un cable colgante se llama *catenaria*. Supongamos que el punto mas bajo de una catenaria es el origen (0 , 0), entonces la ecuación de la catenaria es

$$y = C\,\cosh(x/C) - C.$$

Si queremos determinar la catenaria que pasa por los puntos (a, b) y $(-a, b)$ entonces hay que resolver la ecuación:

$$b = C\,\cosh(a/C) - C$$

donde C es la incógnita.
Obtener la ecuación de la catenaria que pasa por los puntos $(10, 6)$ y $(-10, 6)$.

17. *Sobre la tasa interna de retorno :* Para un flujo de fondos uniformemente distribuido en el tiempo $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$ se define la *tasa interna de retorno* (TIR) como aquella tasa i para la cual el valor presente de ese flujo de fondos es cero al instante cero. Esto es:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{(1+i)^k} = 0$$

Suponiendo que $i \neq -1$ resulta:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(1+i)^{n-k} = 0$$

La determinación de i conduce a obtener la raíz real positiva de un polinomio en $i + 1$.

Para que la solución exista uno de los F_k debe ser negativo y otros positivos. Se considera fuera del problema la posibilidad de que los F_k sean todos positivos o bien todos negativos. Se considerará que la TIR podrá tomar valores en el intervalo (-1, 5).

Usando el método de Newton determinar la TIR si el flujo de fondos es el vector [-70000, 12000, 15000, 18000, 21000, 26000].

Rta: 8.66 % (0.0866). Puede chequear la respuesta con una planilla electrónica que tiene al cálculo de la TIR como una función predefinida.

18. Método de la falsa posición ó *Regula Falsi*
Este es otro método para encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ que se encuentra en el intervalo [a, b]. El método es similar a la técnica de bisección en que se generan intervalos $[a_i, b_i]$ encerrando a la raíz y el método es similar al método de la secante en la manera de obtener nuevos intervalos aproximados. Suponiendo que el intervalo $[a_i, b_i]$ contiene una raíz de $f(x) = 0$ calculamos la intersección con el eje x de la recta que une los puntos $[a_i, f(a_i)]$ y $(b_i, f(b_i))$, denotando este punto por p_i. Si $f(p_i)\,f(a_i) < 0$, definimos $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = p_i$, de otra manera, definimos $a_{i+1} = p_i$ y $b_{i+1} = b_i$.

1. Interprete geométricamente el procedimiento.

2. Construya un algoritmo que realice la búsqueda de una raíz por el método de posición falsa.
3. Usar el algoritmo para aproximar las raices de $3\,x^2 - \exp(x) = 0$ y $\exp(-x) + 0.2\,x - 1 = 0$ con tres decimales correctos.

19. Para un tiro oblicuo considerando el amortiguamiento viscoso del aire (fuerza resistente de módulo proporcional a la primera potencia de la velocidad) el alcance L satisface $A\,L + B\,\ln(1 - C\,L) = 0$.
Determinar el alcance L para los siguientes valores de los coeficientes:
a) $A = 2$, $B = 10$, $C = 0.1$ b) $A = 4$, $B = 10$, $C = 0.1$.