

CÁLCULO NUMÉRICO
TRABAJO PRÁCTICO NRO 5
INTEGRACIÓN NUMÉRICA

FRANCISCO VILLAVERDE

1. Determinar las constantes A , B y el orden de precisión de la siguiente fórmula de cuadratura:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A f(1/3) + B f(2/3)$$

Transformar la fórmula para que sea válida en el intervalo (a, b) .

Sug: Suponer que $f(x) = x^k$ para k tomando los valores $0, 1, 2, \dots$

2. Determinar los valores de las constantes A , B y C tales que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^2 x f(x) dx \approx A f(0) + B f(1) + C f(2)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

3. Verificar que la siguiente fórmula es exacta para polinomios de grado menor ó igual que 5 (la fórmula de cuadratura entonces tiene orden de precisión 5):

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{90} (7 f(0) + 32 f(0.25) + 12 f(0.5) + 32 f(0.75) + 7 f(1))$$

Transformar la fórmula anterior para que sea válida en el intervalo (a, b) .

4. ¿Cuál es el valor de α de manera tal que la siguiente fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(-\alpha) + f(\alpha)$$

sea exacta para todo polinomio de grado 2 ?.

¿Cuál es el orden de precisión de esta fórmula de cuadratura?.

5. Demostrar que existe una constante positiva c tal que la fórmula

$$\int_{-0.5}^{0.5} f(x) dx = \frac{1}{3} (f(-c) + f(0) + f(c))$$

es exacta para todos los polinomios de grado menor ó igual a tres.

6. Se conocen valores de una función f para puntos igualmente espaciados. Aproximar la integral de f en $(1.8, 2.6)$ usando los métodos de :

1. rectángulos
2. trapecios
3. Simpson
4. una fórmula de cuadratura de 5 puntos de Newton Cotes (ver ejercicio 3)

x	$f(x)$
1.8	3.12014
2.0	4.42569
2.2	6.04241
2.4	8.03014
2.6	10.46675

7. A partir de la siguiente tabla aproximar $\int_0^{0.8} f(x) dx$ con la regla de trapecios extendida para h tomando los valores 0.4, 0.2 y 0.1.

x	$f(x)$
0.0	0
0.1	2.1220
0.2	3.0244
0.3	3.2568
0.4	3.1399
0.5	2.8579
0.6	2.5140
0.7	2.1639
0.8	1.8358

8. Aproximar

$$\int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx$$

1. con la regla de trapecios generalizada con 8 subintervalos
2. con la regla de Simpson generalizada con 8 subintervalos.

En ambos casos rehacer el cálculo con el doble de subintervalos para determinar el número de decimales correctos.

9. Una partícula de masa m que se mueve a través de un fluido está sujeta a una resistencia viscosa R que es una función de la velocidad v . La relación entre la resistencia R , la velocidad v y el tiempo t está dada por :

$$t = m \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{1}{R(u)} du$$

Para un fluido particular $R(v) = -v\sqrt{v}$, donde R se mide en N y v en m/s. Si $m = 10$ Kg y $v(0) = 10$ m/s, aproximar el tiempo requerido para que la partícula reduzca su velocidad a $v = 5$ m/s, usando la fórmula generalizada de Simpson con $h = 0.25$.

10. Generar una *minitabla* de la función de distribución de la variable aleatoria normal estandar para el intervalo (0,0.5) con paso $h = 0.01$ y comparar con los valores publicados en alguna tabla. Usar la regla de Simpson generalizada o compuesta.

El siguiente código en *Matlab* implementa el método:

```
function s=simpson(a,b,M)

%Entrada
%      - a y b son los extremos del intervalo de integración
%      - M es el número de subintervalos.
%      La función f se debe definir en línea de comando de Octave.
%
%Salida - s es la aproximación por la regla de Simpson compuesta.

h=(b-a)/(2*M);
s1=0;s2=0;
for k=1:M
    x=a+h*(2*k-1);
    s1=s1+f(x);
end
for k=1:(M-1)
    x=a+h*2*k;
    s2=s2+f(x);
end
s=h*(f(a)+f(b)+4*s1+2*s2)/3;
```

11. Generar una tabla de valores de:

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1}$$

para x entre 0 y 5 en pasos de a 0.5 usando la regla generalizada de trapecios con 10 y 20 subintervalos por unidad (por ejemplo serán 20 y 40 subintervalos cuando $x = 2$). De esta manera se podrá tener una forma de asegurar alguna cantidad de decimales (comparando los resultados al calcular con pasos h y $\frac{h}{2}$).

El integrando tiene una singularidad evitable en $t = 0$ y tiene límite 0 para $t \rightarrow 0$.

El siguiente código en *Matlab* implementa el método:

```
function s=trapecio(a,b,M)
%Entrada
%      - a y b son los extremos del intervalo de integración
%      - M es el número de subintervalos.
%      La función f se debe definir en línea de comando de Octave.
%
%Salida - s es la aproximación por la regla de trapecios compuesta.

h=(b-a)/M; s=0;
for k=1:(M-1)
    x=a+h*k;
    s=s+f(x);
end
```

```
s=h*(f(a)+f(b))/2+h*s;
```

El método de trapecios en Matlab

La función `trapz` aproxima el cálculo de

$$\int_a^b f(x) dx$$

por el método de trapecios a partir de una tabla de datos $\{x_k, f(x_k)\}_{k=1}^n$.
 Por ejemplo si $f(x) = \cos(\pi x)$, $a = 0$ y $b = 0.5$:

```
>> x=0:0.01:0.5;
>> y=cos(pi*x);
>> trapz(x,y)
ans = 0.31828
```

siendo el valor exacto $1/\pi$ que con 5 decimales es 0.31831.

Si el extremo superior es variable

$$g(t) = \int_a^t f(x) dx$$

se puede obtener un vector de valores de aproximaciones a $g(t)$ con `cumtrapz`.
 Considerando el mismo ejemplo:

```
>> s = cumtrapz(x,y);
>> plot(x,s,x,(1/pi)*sin(pi*x),'x')
```

Si

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt$$

y se considera el intervalo $(0, 10)$:

```
>> x=0:0.01:10;
>> y(1)=0;t=x(2:1001);z=t.^3./(exp(t)-1);
>> y(2:1001)=z;
>> plot(y)
>> integral=trapz(x,y)
integral = 6.4319
>> acum=cumtrapz(x,y);
>> a=acum(1:100:1001);a=a'
a =
```

```
0.00000
0.22481
1.17635
2.55222
3.87705
4.89989
5.58585
6.00317
6.23962
6.36657
6.43192
```

El vector $\mathbf{a}$ tiene aproximaciones a $\Phi(x)$ para x tomando los valores $0, 1, 2, \dots, 10$.